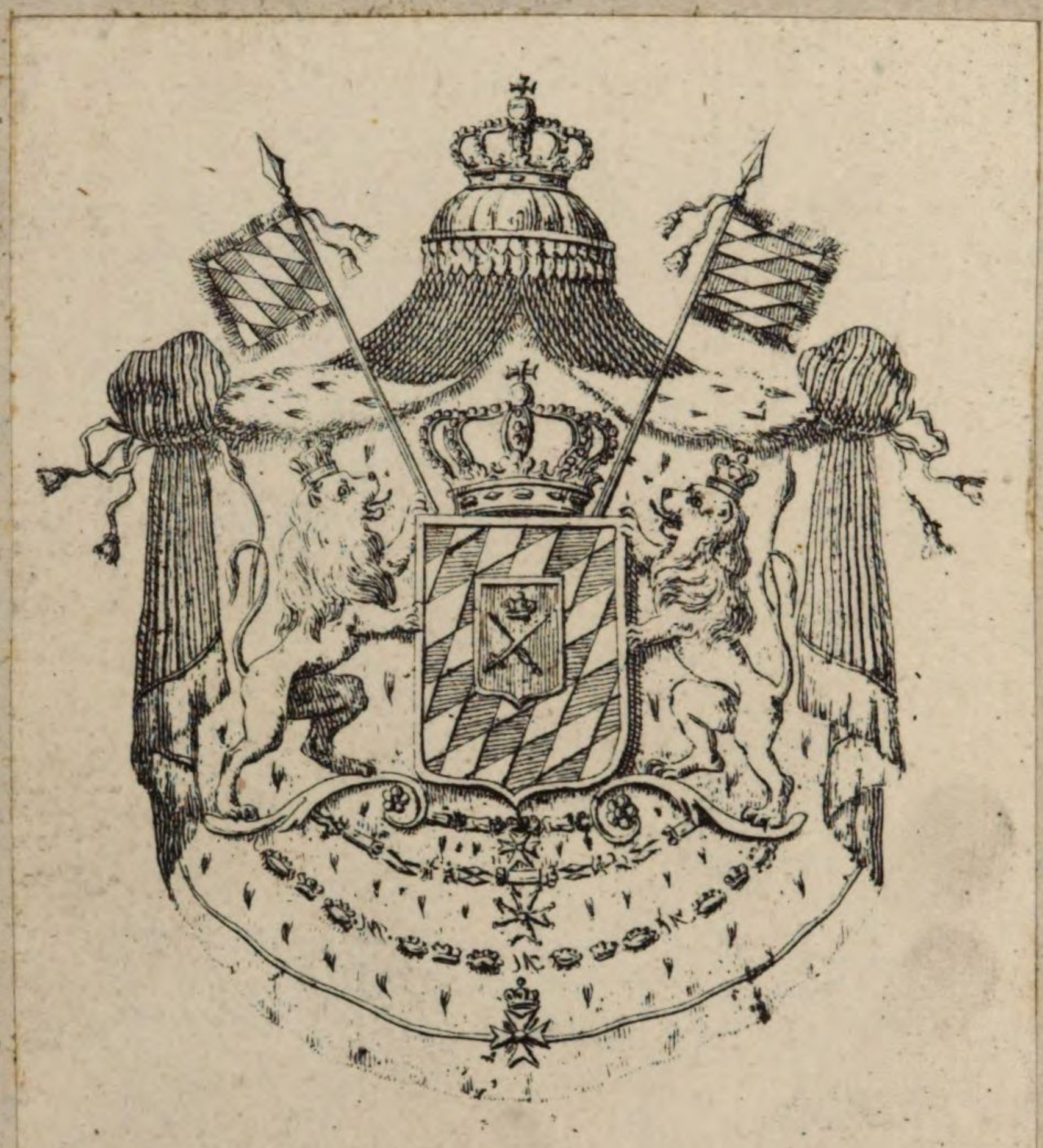
Math. 41 -
62 ☓

Gregory (Olinthus)



BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Olinthus Gregory's,
Professors der Mathematik an der königl. Militärakademie zu Woolwich,
vieler gelehrten Gesellschaften Mitgliedes,

Mathematik für Praktiker,

oder

Sammlung von Grund- und Lehrsätzen, Regeln und Tafeln

aus den

verschiedenen Theilen der reinen und angewandten Mathematik,

ein

Hand- und Lehrbuch für technische Anstalten, für Feldmesser, Architekten, Mechaniker, Techniker u. s. w.

Aus dem Englischen übersetzt

von

M. W. Drobisch,
Professor zu Leipzig.

Mit 3 Kupfertafeln und 227 Holzschnitten.

Leipzig, 1828.
Baumgärtner's Buchhandlung.

162.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Gedruckt bei Georg Maret.

Vorwort zur Uebersetzung.

Wenn der Verfasser eines Buches (wie der des vorliegenden in der nachfolgenden Vorrede) bei Herausgabe desselben zu erkennen giebt, daß er keine Erhöhung seines literarischen Rufes erwarten zu dürfen glaubt, so muß natürlich der Uebersetzer noch weit bescheidner in seinen Ansprüchen seyn. In der That, nur der Wunsch, ein nützliches, seines Wissens, durch kein deutsches Erzeugniß überflüssig gemachtes Werk dem auf dem Titel bezeichneten zahlreichen Publicum in vaterländischer Mundart vorlegen zu können, bewog ihn, aufmerksam gemacht durch eine vortheilhafte Anzeige in Férussac's Bulletin universelle, zur Unternehmung dieser Uebersetzung — zu einer Zeit, wo seine äußere Stellung dringender als gegenwärtig gebot, bei literarischen Arbeiten die lucrative Seite zu berücksichtigen; eine Nöthigung, durch welche leider mancher junge Mann, namentlich unter akademischen Docenten gezwungen wird, die Zeit, welche dem tieferen Studium und der Forschung gewidmet seyn sollte, mercantilischen Unternehmungen zu opfern. Diese Bemerkung glaubte der Uebers. denen schuldig zu seyn, die etwa finden dürften, daß er seine Muße zu einer eigenthümlicheren

Arbeit hätte benutzen sollen als zu einer blosen Uebertragung. Auch verzichtet er, wenn man der vorliegenden Arbeit einiges Verdienst zuzusprechen geneigt wäre, gern darauf, es sich ungetheilt zueignen zu wollen, indem er des wesentlichen Antheils gedenken muß, den zwei seiner mehrjährigen Zuhörer, Herr G. E. Seidemann und besonders Herr F. E. Thieme daran haben.

Daß das Werk selbst, abgesehen von den etwanigen Mängeln der Uebertragung, tadelfrei seyn sollte, kann nicht behauptet werden. Möglich, daß bei freier Bearbeitung etwas Systematischeres, in den theoretischen Theilen selbst Einfacheres hätte geliefert werden können. Allein, wenn es immer bedenklich und oft undankbar ist, sich zum Umbilder fremder Geisteserzeugnisse aufzuwerfen, so enthielt überdies, nach des Uebersetzers Dafürhalten, das Original, wie es sich von solch einem englischen Werke erwarten ließ, eine so praktische Tendenz, daß aus diesem Gesichtspuncte Vieles, wo nicht zu rechtfertigen doch gewiß zu entschuldigen seyn dürfte, was sonst zu Ausstellungen Veranlassung geben könnte. Ist daher irgend worin gefehlt, so wird dies eher in zu ängstlichem Anhalten an das Original als in willkürlichem Wegschneiden und Zusetzen geschehen seyn. In der Arithmetik sind blos die Beispiele, die sich auf englische Münzen, Gewichte oder Maße bezogen, mit deutschen vertauscht, die Maß- und Gewichtstabellen zu den andern am Ende des Buchs gestellt, mit den preußischen vermehrt, und das Täfelchen der englischen Münzen, der Zeit, und noch einige ähnliche von weniger Bedeutung außer England weggelassen worden. Auf den richtigen Wiederdruck der

Formeln und Tabellen ist die nöthige Sorgfalt verwendet, auch hin und wieder das Original berichtigt, doch bittet man vor dem Gebrauche die angezeigten Verbesserungen anzubringen. — Man wird gewiß in diesem Buche alles Nothwendige und sogar nicht selten Sätze finden, die in unsern Lehrbüchern vergeblich gesucht werden. (Das ganze Kapitel von der isometrischen Perspective dürfte vielen neu seyn.) Sollte hie und da in der Uebersetzung der Ausdruck allgemeiner Regeln oder Lehrsätze nicht ganz nach Wunsche gelungen seyn, so bieten doch die beigefügten Beispiele immer eine faßliche Erläuterung dar. Da, ausgenommen die zwei ersten Kapitel, die Begründung der Lehren durchgängig zurückgehalten ist, so eignet sich dadurch das Buch zu einem Leitfaden bei Vorlesungen in technischen Bildungsanstalten, indem der Zögling an einem so kurzen Lehrbuche keinen Rückhalt hat, der, wie er wähnt, die mündlichen Vorträge des Lehrers unentbehrlich macht. Daß es als Erinnerungs- und Wiederholungsbuch eines durchlaufenen Cursus, so wie als Handbuch zum Nachschlagen mehr Bequemlichkeit und eine schnellere Uebersicht gewährt als ein ausführliches Bändereiches Werk, braucht wohl eigentlich eben so wenig erwähnt zu werden, als daß es seiner Kürze wegen nicht geeignet ist, dem der Mathematik noch Unkundigen zum Selbstunterrichte zu dienen. — Leicht hätte die Zahl der sparsam und meistens nur den ersten Abschnitten beigefügten kleinen Anmerkungen beträchtlich vermehrt werden können; aber abgesehen davon, daß durch solche fortlaufende Einschaltungen und Ergänzungen das Buch ein buntes Ansehen erhalten hätte, das seinem Gebrauche eben nicht förderlich gewesen wäre, so gebrach es theils dazu an

Zeit, theils entsprach es nicht dem Wunsche der Verlagshandlung, durch reichlichere und ausgedehntere Zusätze den Umfang des ohnehin besonders wegen der zahlreichen Holzschnitte in seiner Ausstattung etwas kostspieligen Buches zu erweitern und so den Preis desselben zu erhöhen. Mögen daher Kenner, die angegebenen Umstände erwägend, diese Uebersetzung nicht unbillig beurtheilen.

Leipzig, im Juni 1828.

D.

Vorrede des Verfassers.

Das Werk, welches hiermit dem Publicum vorgelegt wird, verdankt seinen Ursprung meinem Wunsche, zum Gebrauche der jüngeren Mitglieder des Civil-Ingenieur-Corps einen Tractat über die Anfangsgründe und Anwendungen der mechanischen Wissenschaften zu entwerfen. Die ausgezeichneten Männer, welche mit Recht als die Hauptstützen dieses Instituts angesehen werden, bedürfen zwar nicht solcher Unterweisungen, wie ich sie zu geben im Stande bin; aber es schien mir nützlich einen Versuch auszuarbeiten, der innerhalb mäßiger Grenzen zur wissenschaftlichen Unterweisung mehrerer junger Männer voll Feuer und Unternehmungsgeist dienen möchte, die sich seit einigen Jahren dem interessanten und wichtigen Berufe gewidmet haben, zu dem die Mitglieder jenes Corps vorzüglich bestimmt sind. Mein erster Entwurf war, ein Heft auszuarbeiten, das etwa zu einer oder zwei Vorlesungen in den Versammlungen jenes Instituts Stoff geben möchte; aber, wie es in solchen Fällen häufig geht: der Embryo-Gedanke wuchs während des Meditirens von einer Abhandlung zu einem Buche heran, und das was erst eine wahrhaft compendiöse Sammlung von Grundlehren und Regeln werden sollte,

nahm nun das Ansehn einer systematischen Uebersicht von Grundsätzen, Lehrsätzen, Regeln und Tafeln an.

In der That die Verhältnisse, in welchen sich unsere Nation gegenwärtig rücksichtlich ihrer Liebe zu den Wissenschaften und ihrer Kenntnisse in denselben befindet, trieben mich fast unbewußt an, für meinen ursprünglichen Plan eine solche Erweiterung zu suchen, wie sie durch den Wunsch, zur Belehrung der zahlreichen Classe unserer praktischen Mechaniker etwas beizutragen, nothwendig wurde. Außer den früheren Hindernissen welche vielen von ihnen entgegen waren, giebt es andere, welche aus ihrer unermüdlichen Betriebsamkeit entspringen. Deshalb unfähig, sich mit den Einzelnheiten eines ausführlichen systematischen Cursus abzugeben, mußten sich solche meistens mit unvollkommenen Ansichten von Theorieen und Grundsätzen begnügen und vieles blos auf Treu' und Glauben annehmen, ein Uebel, welches jedoch durch Errichtung von Gesellschaften und Ausarbeitung von Lehrbüchern, nebst deutlicher Darstellung ihres Nutzens bald vermindert werden dürfte.

Herr Brougham bemerkt in seinen „Praktischen Bemerkungen zur Volkserziehung" folgendes: „Einen sehr wesentlichen Dienst werden diejenigen der Sache der Wissenschaft leisten, die ihre Zeit auf die Ausarbeitung von Elementarbüchern über die Mathematik verwenden, welche, hinreichend klar und zugleich gedrängt, die Schlußweise, deren man sich in dieser Wissenschaft bedient, durch Beispiele erläutern, und eine genaue Kenntniß von den nützlichsten Hauptsätzen und ihrer Anwendung zu praktischen Zwecken verschaffen; desgleichen von Handbüchern der Naturlehre, durch welche man von den wichtigen Lehren der Physik und ihrer praktischen Anwendung unterrichtet wird; von Lesebüchern, welche eine allgemeine Kenntniß von der Mathematik zum Ziele haben, oder welche für diejenigen taugen, welche jenseit der gemeinen Rechnungsregeln völlig unwissend in dieser Wissenschaft sind." Und an einem andern Orte: „Derjenige, welcher ein Lehrbuch schreibt, in dem kurz und einfach die Lehren der Algebra, Geometrie und Mechanik entwickelt und durch Beispiele versinnlicht werden, die auf ihre Verbindung mit andern Zweigen des Wissens und

die Künste des gemeinen Lebens Bezug haben, hat ein schönes Recht auf einen guten Antheil an der reichen Ernte von Entdeckungen und Erfindungen, welche tausend ingeniöse und thätige Männer, auf diese Weise in den Stand gesetzt, ihre Fähigkeiten auf gleich nützliche als erhabene Gegenstände zu richten, halten werden."

Ich maße mir nicht an zu glauben, daß gegenwärtiges Werk geeignet sey, die Lücken, welche diese Stellen bemerklich machen, auszufüllen; aber es mußte mich sehr befriedigen, nachdem volle zwei Drittel davon niedergeschrieben waren, zu finden, daß die Ansichten, welche mich bei dessen Ausführung geleitet hatten, so nahe mit dem Urtheile eines Mannes zusammenstimmten, der, wie Herr Brougham in seinem früheren Leben, sich durch die Eleganz und Tiefe seiner mathematischen Untersuchungen auszeichnete.

Mit Rücksicht auf die elementare Unterweisung derjenigen, welche keine vorläufigen mathematischen Kenntnisse haben, habe ich kurz, aber, wie ich hoffe, deutlich mit Abhandlungen über die Arithmetik und Algebra begonnen; eine hinlängliche Kenntniß beider ist nothwendig, um sich derjenigen Genauigkeit in den Rechnungen zu versichern, welche jeder Praktiker erreichen muß um mit Leichtigkeit die wissenschaftlichen Lehrsätze und Formeln zu begreifen, welche die Schlüssel zu den Vorrathshäusern des höheren Wissens werden. So wie Niemand sein Werkzeug oder seine Waffen schleift, nur damit sie geschliffen sind, sondern damit sie ihm zum Gebrauche dienen mögen; so lernt auch der denkende Mann nicht Arithmetik und Algebra, blos um diese Zweige des Wissens zu kennen, sondern um sie zu brauchen. Besitzt man diese schätzbaren Vorkenntnisse, so wird dadurch der Cursus eines Autors erleichtert: denn dann kann er, anstatt sich zu bestreben, ganz gemeine Dinge so vorzutragen, daß der Lernende nicht abgeschreckt wird, das Schwerere und Abstractere so ausdrücken, daß der verhältnißmäßig Unwissende (denn blose Kenntniß von Arithmetik und Algebra ist in unseren Zeiten verhältnißmäßig Unwissenheit) sie verstehen und praktisch anwenden kann.

Von den Materien, welche hinter den ersten 100 Seiten folgen, sind nur Uebersichten gegeben. Die allgemeinen Kapitel der Geometrie, Trigonometrie, Kegelschnitte, Curven, Perspective, Ausmessung, Statik, Dynamik, Hydrostatik, Hydrodynamik und Pneumatik sind so behandelt. Die Erklärungen und Grundsätze sind in geordneter Reihe aufgestellt, aber die Ableitungen und Beweise sind sparsam eingeführt. Dieser Theil des Werks ist seiner Natur nach ein Auszug eines Cursus von Vorlesungen über die Theile der Wissenschaft, die er behandelt; jedoch mit dem Unterschiede, der mich bei der Herausgabe leitete, daß ich häufiger gemeinfaßliche Erläuterungen eingeführt, auf praktische Anwendungen unaufhörlich aufmerksam gemacht und möglichst gut berechnete Tafeln, welche den Architekten, Mechanikern und Civil-Ingenieurs die Arbeit erleichtern, den passenden Kapiteln beigegeben habe. Was das letztere betrifft, so hatte ich Verschiedenes schon zu meinen früheren Lehrbüchern gesammelt, doch habe ich nicht Weniges eigens für diese Sammlung theils berechnet, theils zusammengetragen.

In einem Werke wie dieses würde es abgeschmackt seyn, Originalität zu verlangen. Plan, Anordnung und Ausführung sind mein eigen; aber die Materialien habe ich mit Recht immer als Gemeingut angesehen. Sie in den möglich kleinsten Raum zusammenzudrängen, war neben dem Hauptzweck mein Augenmerk; wo ich aber in irgend einem Werke in dieser Hinsicht vorgearbeitet fand, habe ich es übergetragen, jedoch mit der nöthigen Anzeige der Quelle, aus der ich schöpfte. Schriftstellern, welche die besten im Fache der gemischten Mathematik und der Naturlehre sind, wie Smeaton, Robison, Playfair, Young, Dû Bûat, Leslie, Hachette, Bland, Tredgold u. A. ist man es schuldig, sie bei der Vorbereitung zu solch einem Buche zu Rathe zu ziehen. Ich hoffe, man wird dies billigen, zugleich es aber auch löblich finden, daß da, wo jene zu ergänzen waren, ich mich selbst benutzte. Ich habe daher aus meinen früheren Schriften eine solche Auswahl getroffen, wie sie mir für meinen gegenwärtigen Zweck vollkommen passend schien; doch hoffentlich nicht so

häufig, daß dadurch die Brauchbarkeit jener Werke vermindert, oder ich selbst auf unredliche Weise mein eigner Schuldner wäre.

Außer unsern jüngeren Civil-Ingenieurs und zahlreichen Praktikern, die bemüht sind, ihren Verstand mit wissenschaftlichen Thatsachen und Lehrsätzen zu bereichern, werden, wie ich mir schmeichle, noch andern die nachfolgenden Blätter nützlich werden können. Lehrer der Mathematik und derjenigen Theile der Naturlehre, die in unseren geachteten Bildungsanstalten eingeführt sind, dürften vielleicht dies Buch nicht ungeeignet finden, die mittlere Stelle zwischen den rein populären Darstellungen der Wahrheiten der Mechanik, Hydrostatik ꝛc. und den ausführlichen Lehrbüchern einzunehmen, in denen ganze Reihen von Untersuchungen und Beweisen Glied für Glied sorgfältig entwickelt und die nachfolgenden Theile mit unerschütterlichen Grundlehren fest verbunden sind. Studirende, welche entweder auf unseren Universitäten oder auf anderen öffentlichen oder privaten Anstalten einen wissenschaftlichen Lehrgang beendigt haben, könnten vielleicht in dieser Sammlung einen kleinen Vorrath der wichtigsten Grund- und Lehrsätze nebst Winken zu ihrer Anwendung für praktische Zwecke finden.

Die einzigen mir bekannten Werke, mit welchen mir mein Buch einige Aehnlichkeit zu haben scheint, sind Martin's Denkschrift für junge Studirende, Jones's Synopsis Palmariorum Matheseos, und Bruton's Compendium der Mechanik; von welchen ich das letztere erst sah, als dieses Buch fast fertig war. Das zuerst und das zuletzt erwähnte sind geschickte und verdienstliche Erzeugnisse, aber in ihrer Nutzbarkeit durch den engen Raum, in welchen sie zusammengedrängt sind, beschränkt. Das dritte, verfaßt vom Vater des verstorbenen Sir William Jones ist eine recht elegante Einleitung in die Anfangsgründe der Mathematik, hinsichtlich auf die Zeit, in der es geschrieben wurde (1706); aber da es ganz theoretisch und überdies jetzt sehr selten geworden ist, so wird es, wie ich glaube, die Nothwendigkeit eines

solchen Handbuchs, wie ich es jetzt dem Publicum darbiete, welche meiner Meinung nach allerdings Statt findet, nicht beeinträchtigen.

Bei der Ausführung desselben habe ich nicht nach höherem Ruf, sondern nach Deutlichkeit, Correctheit und Nutzbarkeit gestrebt, und wenn ich so glücklich gewesen bin, in diesen Puncten etwas geleistet zu haben, so werde ich vollkommen zufrieden seyn.

Königl. Militär-Akademie Woolwich, den 1. October 1825.

Olinthus Gregory.

Inhalt.

I. Kapitel. Arithmetik.

		Seite
1.	Erklärungen und Bezeichnung	1
2.	Addition ganzer Zahlen	5
3.	Subtraction	6
4.	Multiplication	7
5.	Division	10
—	Proben zu den 4 ersten Regeln der Arithmetik	13
6.	Gemeine Brüche	14
—	Verwandlung derselben	15
—	Addition, Subtraction, Multiplication, Division derselben	18
7.	Decimalbrüche	19
—	Verwandlung derselben	20
—	Addition, Subtraction, Multiplication, Division derselben	23
8.	Complexe Brüche	24
—	Verwandlung derselben	24
—	Addition, Subtraction, Multiplication, Division derselben	25
—	Duodecimalbrüche	28
9.	Potenzen und Wurzeln	29
—	Extraction	30
—	Ausziehung der Quadratwurzeln	31
—	Cubikwurzeln u. s. w.	33
10.	Proportion	34
—	Regeldetri	37
—	Eigenschaften der Zahlen	40
—	Abkürzung eines Verhältnisses	44

II. Kapitel. Algebra.

		Seite
1.	Erklärung und Bezeichnung	48
2.	Addition und Subtraction	51
3.	Multiplication	52
4.	Division	54
5.	Potenzirung	56
6.	Wurzelausziehung	59
7.	Irrationalzahlen	61
8.	Einfache Gleichungen	68
—	Elimination	71
—	Auflösung allgemeiner Aufgaben	74
9.	Quadratische Gleichungen	76
10.	Gleichungen im Allgemeinen	81
11.	Progression	84
12.	Logarithmen	89
13.	Rechnung nach Formeln	91

III. Kapitel. Geometrie.

	Erklärungen	94
1.	Winkel, Gerade, Rechtecke	95
2.	Dreiecke	97
3.	Vierecke und Vielecke	100
4.	Kreise, eingeschriebene und umschriebene Figuren	103
5.	Ebene Flächen und Körper	111
6.	Praktische Geometrie	115

IV. Kapitel. Trigonometrie.

1.	Ebene Trigonometrie	126
2.	Höhen und Entfernungen	137
3.	Näherungsmethoden zur Bestimmung von Höhen und Entfernungen	145

V. Kapitel. Kegelschnitte.

	Erklärungen	150
1.	Eigenschaften der Ellipse	153
2.	Eigenschaften der Hyperbel	157
3.	Eigenschaften der Parabel	160
4.	Anwendungen auf Architektur	163

VI. Kapitel. Curven,

die dem Architekten nützlich sind.

1.	Die Konchoide	164
2.	Die Cissoide	166

Seite
3. Die Cykloide 167
4. Die Quadratrix 169
5. Die Kettenlinie und ihre Anwendung 170

VII. Kapitel.

Farish's isometrische Perspective . . 178

VIII. Kapitel. Ausmessung.

1. Ausmessung von Oberflächen 193
2. Ausmessung von Körpern 194
3. Approximationsregeln 197
Mechanik 203

IX. Kapitel. Statik.

1. Parallelogramm der Kräfte 204
2. Schwerpunct 207
3. Mechanische Potenzen, Hebel, Rad an der Welle, Rolle, geneigte Ebene, Keil, Schraube 214
4. Anwendung der Statik auf das Gleichgewicht von Bauwerken 223
— Gleichgewicht bei Pfeilern 223
— Druck der Erde gegen Wände 225
— Gleichgewicht von Polygonen 228
— Stabilität der Bogen 232
— Modelle 234

X. Kapitel. Dynamik.

Erklärungen 236
1. Gleichförmig Bewegung 237
2. Gleichförmige beschleunigte Bewegung 238
— Bewegung über Rollen 240
— Bewegung auf geneigten Ebenen 241
3. Bewegungen um einen Mittelpunct oder eine Axe, einfache Pendel 246
— Pendel, zusammengesetzte 256
— Rotations-Bewegung 263
— Central-Kräfte 265
— Stoß 270
— Grundlehren von den Chronometern 274

XI. Kapitel. Hydrostatik.

Erklärungen 284
1. Druck anelastischer Flüssigkeiten 285
— Erläuterungen und Anwendungen 287
2. Schwimmende Körper 292
3. Specifisches Gewicht 295

XII. Kapitel. Hydrodynamik.

	Seite
Erklärungen	303
1. Bewegung und Ausfluß von Flüssigkeiten	303
2. Bewegung des Wassers in Röhren, Canälen ꝛc.	305
— Wasserabfluß von Wehren	315
— Anschwellungen der Ströme durch Brückenpfeiler . . .	317
3. Strommesser	319
4. Wirkungen der Londoner Brücke bei Fluthen	324
5. Wassermühlen	329

XIII. Kapitel. Pneumatik.

1. Gleichgewicht der Luft und der elastischen Flüssigkeiten . .	334
2. Pumpen	337
3. Wind und Windmühlen	349
4. Dampf und Dampfmaschinen	357

XIV. Kapitel.

Vergleichende Tafeln und Bemerkungen über Dampfmaschinen, Eisenbahnen, Canäle und Chausseen	379

XV. Kapitel. Active und passive Kräfte.

1. Active Kräfte oder animalische Kräfte	387
2. Passive Kräfte	405

Hülfstafeln.

1. Münzen, Gewichte, Maße	418
2. Factoren, die mit dem Kreise zusammenhängen . . .	424
3. Durchmesser, Fläche, Umfang ꝛc. von Kreisen . . .	426
4. Relationen der Bogen, Abscisse, Ordinate und Subnormale der Kettenlinien	435

Mathematik für Praktiker.

I. Kapitel.

Arithmetik.

1. Abschnitt. Erklärungen und Bezeichnung.

Die Arithmetik ist die Wissenschaft von den Zahlen.

Mit dem Namen einer Zahl bezeichnet man eine Menge mehrerer Einheiten, oder mehrerer Theile einer angenommenen Einheit; Einheit ist diejenige Größe, welche unter allen Dingen einer und derselben Gattung ein Ganzes bildet, das als Grundlage oder Element angesehen werden kann. So wenn ich von einem Hause, einem Ducaten spreche, so spreche ich von Einheiten, von denen die erste das Ding ist, das man ein Haus, die andere das, was man einen Ducaten nennt. Sage ich aber vier Häuser, zehn Ducaten, drei Viertel von einem Ducaten, so spreche ich von Zahlen, von denen die erste bedeutet: die Einheit Haus, viermal wiederholt; die zweite: die Einheit Ducaten, zehnmal wiederholt; die dritte ist der vierte Theil der Einheit Ducaten viermal wiederholt.

Bei jeder besondern Zahlengattung ist die Einheit ein willkürlich angenommenes oder durch Brauch und Uebereinkunft bestimmtes Maß.

Zahlen, welche durch Wiederholung einer ungetheilten Einheit gebildet werden, heißen ganze Zahlen, als sieben Meilen, dreißig Groschen; diejenigen aber, welche aus einer Menge von Theilen einer Einheit gebildet sind, nennt man gebrochene Zahlen, oder kurz: Brüche, als zwei Drittel einer Klafter, drei Achtel einer Meile.

Ist die Einheit auf ein gewisses besonderes Ding beschränkt, als: ein Mann, ein Pferd, ein Pfund, so heißt die Verbindung mehrerer solcher Einheiten eine benannte Zahl, z. B. zehn Männer, zwanzig Pferde, funfzig Pfund. Wenn aber die Einheit kein besonderes Ding bezeichnet, sondern einfach durch eins ausgedrückt wird, so heißen die aus solchen Einheiten zusammengesetzten Zahlen unbenannte oder

abstracte. Hieraus folgt unmittelbar, daß unbenannte Zahlen nur mit ihrer Einheit, und eben so benannte nur mit der ihrigen verglichen oder durch dieselbe gemessen werden können; unmöglich aber ist es, eine unbenannte Zahl mit einer benannten, oder eine benannte Zahl mit einer benannten einer andern Gattung zu vergleichen; es können also nur meßbare Beziehungen zwischen Größen derselben Gattung statt finden.

Die Reihe der Zahlen ist unbegrenzt, aber nur die ersten neun werden mit verschiedenen Charakteren bezeichnet, die Ziffern heißen. Sie sind:

Namen: eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun.
Ziffern: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Außer diesen wird noch ein anderes Zeichen, nämlich 0 angewendet, das man die Null nennt; es hat dieselbe zwar an sich keinen besondern Werth, aber durch ihre Stellung verändert sie den Werth der andern bedeutlichen Ziffern, mit denen sie verbunden ist.

In dem jetzt allgemein angenommenen, von den Indianern entlehnten, Zahlensystem wird eine Unzahl von Worten und Zeichen durch ein einfaches aber höchst sinnreiches Verfahren entbehrlich gemacht, nämlich durch folgendes: jede Ziffer, die zur Linken einer andern steht, nimmt einen zehnmal so großen Werth an, als sie haben würde, wenn sie die Stelle der andern einnähme.

Z. B. um die Zahl, welche die Summe von 9 und 1 ist, oder zehn Einheiten, genannt zehn, auszudrücken, setzt man eine 1 zur Linken einer 0, also 10. Eben so wird die Summe von 10 und 1, oder eilf, durch 11 dargestellt; die Summe von 11 und 1 oder von 10 und 2, die zwölf heißt, durch 12; und so fort für dreizehn, vierzehn, funfzehn ꝛc., die beziehungsweise durch 13, 14, 15 bezeichnet werden, und wo die Ziffer 1 überall zehn bedeutet, weil sie die zweite Stelle einnimmt.

Auf ähnliche Weise werden zwanzig, einundzwanzig, zweiundzwanzig ꝛc. durch 20, 21, 22 dargestellt, weil die 2 in der zweiten Stelle der zweimal zehn oder zwanzig gleich ist. Und so verfahren wir mit allen Zahlen zwischen zwanzig und dreimal zehn oder dreißig, 30, viermal zehn oder vierzig, 40, fünfmal zehn oder funfzig, 50, sechsmal zehn oder sechzig, 60, siebenmal zehn oder siebzig, 70, achtmal zehn oder achtzig, 80, neunmal zehn oder neunzig, 90. Werden nun noch 9 zu den 90 (neunzig) hinzugefügt, so können die Zahlen nicht mehr durch zwei Ziffern ausgedrückt werden, sondern erfordern eine dritte Stelle zur Linken der zweiten.

Die Ziffer, welche die dritte Stelle oder die der Hunderter*) einnimmt, wird durch das Wort Hundert ausgedrückt. Z. B. 369 ist zu lesen: drei Hundert und neun und sechzig; 428, so viel als vier Hundert und acht und zwanzig; 837, acht Hundert und sieben und dreißig; u. s. f. für alle Zahlen die durch drei Ziffern dargestellt werden können.

Ist aber die Zahl so groß, daß sie nicht mehr durch drei Ziffern ausgedrückt werden kann, so ist es üblich, sie in Classen, jede zu drei Ziffern zu theilen, die von der rechten zur linken Hand gerechnet und jede mit einem besondern Namen belegt werden. Die zweite Classe heißt die der Tausende, die dritte die der Millionen, die vierte die der Milliarden oder Billionen**), die fünfte die der Trillionen u. s. w.; die Ausdrücke Einer, Zehner, Hunderter werden successiv für die erste, zweite, dritte Stelle der Ziffern von der Rechten zur Linken in jeder dieser Classen angewandt.

Z. B. 1111 ist auszusprechen: ein Tausend ein Hundert und eilf; 23456, drei und zwanzig Tausend vier Hundert und sechs und funfzig; 421835, vier Hundert ein und zwanzig Tausend acht Hundert und fünf und dreißig; 732846915, sieben Hundert und zwei und dreißig Millionen acht Hundert und sechs und vierzig Tausend neun Hundert und funfzehn.

Die hier beschriebene Weise, Zahlen zu lesen und zu schreiben heißt das Decimalsystem. Aber neben diesem sind von den Denkern noch andere Systeme erfunden worden und andere in wirklichen Gebrauch gekommen: z. B. das Duodecimalsystem, in welchem jede höhere Benennung zwölf Einheiten der nächst niedrigern enthält; das Sexagesimalsystem, in dem sechzig einer niedrigern Classe so viel gelten als eine Einheit der nächst höhern Classe. Die erste ist bei den Ausmessungen und Berechnungen der Feldmesser, die andere bei der Eintheilung des Kreises oder der Stunde eingeführt.

---

*) So wie die Ziffern, die die 1ste und 2te Stelle einnehmen beziehungsweise Einer und Zehner heißen. (D.)

**) Es war in England bräuchlich den Namen Billion den Millionen von Millionen, den der Trillionen den Millionen von Millionen von Millionen zu geben u. s. f.; die hier gegebene Methode aber, die Zahlen in Classen zu drei Ziffern anstatt zu sechsen zu theilen, ist auf dem Continent†) allgemein, und da sie mir einfacher und gleichförmiger scheint, so habe ich sie angenommen. A. d. V.

†) Es braucht wohl kaum darauf aufmerksam gemacht zu werden, wie einseitig dem Engländer der Franzose (denn bekanntlich zählen diese allein so) den ganzen Continent repräsentirt. Obgleich also bei uns diese Art zu zählen nicht bräuchlich ist und ohne Verwirrung es nicht werden kann, so war es doch wohl nicht nöthig, ja eigentlich wohl nicht einmal erlaubt, die Stelle umzuändern. (D.)

Zum Abschnitte von der Bezeichnung gehört auch die Erklärung der vornehmsten Symbole oder Charaktere, die man zur Bezeichnung der Operationen oder Resultate der Rechnung anwendet. Z. B.

Das Zeichen + (*plus*) gehört der Addition und deutet an, daß die Zahlen, zwischen denen es steht, zusammengezählt werden sollen. So bedeutet 5 + 7 die Summe von 5 und 7, oder daß 5 und 7 zusammenzuzählen sind.

Das Zeichen — (*minus*) zeigt an, daß die Zahl, die hinter ihm steht, von der vor ihm abzuziehen ist. So bedeutet 9 — 3, daß 3 von 9 wegzunehmen ist.

Das Zeichen ∽ bedeutet Verschiedenheit*) und wird zwischen zwei Größen gesetzt, wenn nicht unmittelbar einleuchtet, welche von beiden die größere ist.

Das Zeichen × (mal) deutet das Product der beiden Zahlen an, zwischen denen es steht. So 8 × 5 bedeutet 8 mal 5 oder 40.

Das Zeichen ÷ (durch) gehört zur Division und sagt an, daß die vorangehende Zahl durch die nachfolgende zu dividiren ist; der Quotient der sich aus dieser Operation ergibt, wird häufig dadurch angedeutet, daß man die erstere Zahl über die zweite setzt und beide durch einen kleinen Strich trennt. Z. B. 15 ÷ 8 bedeutet 15 dividirt durch 8 und der Quotient wird ausgedrückt durch $\frac{15}{8}$ **).

Zwei gleiche und gleichlaufende Horizontallinien (=) sind das Zeichen der Gleichheit. So 2 + 3 + 4 = 9 heißt: die Summe von 2, 3 und 4 ist gleich 9.

Die Ungleichheit wird durch zwei zu einem Winkel zusammenlaufende Linien dargestellt, die man so zwischen zwei Zahlen setzt, daß der Scheitel (der Winkelpunct) gegen die kleinere gewendet ist; z. B. $7 > 4$ und $A > B$ bedeuten: 7 ist größer als 4, und: die durch A bezeichnete Größe ist größer als die durch B angedeutete; umgekehrt ist $3 < 5$, $C < D$ so viel als 3 ist kleiner als 5 und C kleiner als D.

Kolons und Doppelkolons setzt man zwischen Größen, um ihre Proportionalität anzuzeigen, z. B. 3 : 5 :: 9 : 15 bedeutet 3 zu 5 wie 9 zu 15 oder $\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$ ***).

---

*) Bei uns nicht bräuchlich. (D.)

**) Bei uns ist bekanntlich statt dieses Zeichens das Kolon : bräuchlich. (D.)

***) Da Proportionalität nichts anders als Gleichheit der Verhältnisse, d. i. Gleichheit zweier Quotienten ist, so hat man bei uns mit Recht dasselbe Zeichen (:) zugleich für Division und Verhältniß, und eben

Die Ausziehung der Wurzeln zeigt man durch das Symbol $\sqrt{}$ an, über welches noch insbesondere die Ziffer gesetzt wird, welche den Grad der Wurzel ausdrückt. So zeigt an $\sqrt{4}$ die Quadratwurzel von 4; $\sqrt[3]{27}$ die Kubikwurzel aus 27, $\sqrt[4]{16}$ die vierte oder Biquadratwurzel aus 16, u. s. f.

Diese Charaktere sind von dem häufigsten Gebrauche in der Algebra und den höhern Theilen der Mathematik; wir können sie aber auch, wegen ihrer Kürze und Bestimmtheit, ohne Aufopferung der Deutlichkeit sogleich gebrauchen.

2. Abschnitt. Addition ganzer Zahlen.

Addition ist die Regel, nach welcher zwei oder mehrere Zahlen zu einem Aggregat oder einer Summe vereinigt werden.

Angenommen es sei die Summe der Zahlen 3731, 349, 12487 und 54 zu finden. Es ist einleuchtend, daß wenn man die Summen der Einer, Zehner, Hunderter, Tausender einzeln berechnet, ihre vereinigten Resultate denselben Betrag geben müssen, als ob man die gegebenen Zahlen im Ganzen zusammengezählt hätte. Man wird also haben 15 Tausender + 14 Hunderter + 20 Zehner + 21 Einer, oder 15000 + 1400 + 200 + 21; operirt man nun mit diesen wieder auf dieselbe Weise Classe für Classe, so hat man 10 Tausender + 6 Tausender + 6 Hunderter + 2 Zehner + 1, oder 16621, welches die verlangte Summe ist.

Bequemer wird jedoch die Rechnung geführt nach folgender

Regel.

Man setze die gegebenen Zahlen so unter einander, daß Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, Hunderter unter Hunderter ꝛc. stehen. Man addire alle Ziffern in der Colonne der Einheiten und merke für jede hiedurch erhaltene Zehn eine Eins, die an die Stelle der Zehner in der 2ten Colonne in Rechnung zu bringen ist, die Ziffer aber die den Ueberschuß anzeigt, setze man unter die erste. Eben so verfahre man mit der zweiten, dann mit der dritten Colonne und so fort bis alle Colonnen addirt sind. Die durch die einzelnen Summationen auf diese Weise erhaltenen Ziffern geben, nach den Regeln der Bezeichnung gelesen, die verlangte Summe.

---

so setzt man statt des überflüssigen (::) das was es sagen will (=). Wir werden uns in der Folge der deutschen Bezeichnung bedienen. (D.)

Anmerkung. Das Resultat ist dasselbe, man mag aufwärts oder abwärts addiren; am häufigsten addirt man jedoch aufwärts.

Beispiel. Wir nehmen dieselben Zahlen wie vorhin, ordnen sie gemäß der Regel und erhalten $7+9+1=21$. Hiervon wird die 1 unter die Einer gesetzt und die Zwei zu den Zehnern gerechnet; dann ist $2+5+8+4+3=22$, wovon die 2 zur Rechten unter die Zehner gesetzt, die andere zu den Hundertern gezählt wird; nun ist $2+4+3+7=16$, wovon 6 in die Stelle der Hunderter kommt und die 1 zu den Tausenden gezählt wird. Fährt man auf diese Weise fort, so erhält man dieselbe Summe wie vorher.

3731	
349	
12487	
54	
16621	

Andere Beispiele.

57	6475	77756	10376786
762	9830	3388	789632
5389	2764	9763	1589
97615	5937	90257	73
103823	25006	181164	11168080

3. Abschnitt. Subtraction ganzer Zahlen.

Subtraction ist die Regel, nach der man eine Zahl von einer andern wegzunehmen hat um ihren Unterschied oder den Ueberschuß zu erhalten. Die Zahl, welche weggenommen oder subtrahirt wird heißt der Subtrahend, die von welcher diese wegzunehmen ist, der Minuend, die resultirende Größe der Rest.

Regel.

Man schreibe den Minuend und den Subtrahend in zwei besondere Zeilen, Einer unter Einer, Zehner unter Zehner u. s. f. Man fange bei den Einern an und ziehe die Ziffer des Subtrahend von der entsprechenden des Minuend ab, und schreibe den Unterschied unter diese Ziffern in dieselbe Stelle oder Classe. Ist jedoch die Ziffer im Subtrahend größer als die entsprechende im Minuend, so addire man zur letztern zehn und ziehe dann die Ziffer des Subtrahend von der Summe ab, den Rest setze man wie zuvor unter; in diesem Falle addire man 1 zu der nächsten Ziffer des Subtrahend zur Linken, zur Ausgleichung für die in der vorhergehenden Stelle geborgten zehn. So fahre man fort bis alle Ziffern subtrahirt sind.

Anmerkung. Es ist bräuchlich den Minuend über den Subtrahend zu setzen, aber es ist nicht unbedingt nothwendig.

Indessen ist es bei vielen Rechnungen nützlich den Unterschied zweier Größen zu finden, von denen die größere unten steht; es ist daher rathsam die Operation auf beiderlei Art einzuüben, damit man, wie es auch vorkomme, ohne Anstoß die Rechnung vollziehen könne.

Beispiel . .	Minuend	26565874
	Subtrahend	9853642
	Rest	16712232

Hier sind die fünf ersten Ziffern zur Rechten im Subtrahend von den entsprechenden des Minuend einzeln subtrahirt. Die sechste Ziffer aber, nämlich 8, kann nicht von der darüberstehenden 5 weggenommen werden. Da nun aber eine Einheit in der siebenten Stelle gleich 10 Einheiten in der sechsten sind, so borge ich in jener eine Einheit (das ist der Kunstausdruck) und mache aus der 5 eine 15. Hierauf 8 von 15 genommen läßt 7, welche darunter gesetzt wird; zur siebenten Stelle des Subtrahend 9 wird 1 addirt, um die von der siebenten Stelle des Subtrahend geborgte 1 auszugleichen. Zu einem gleichen Verfahren wird man immer seine Zuflucht nehmen müssen, wenn eine Ziffer des Subtrahend die ihr entsprechende des Minuend übertrifft.

Andere Beispiele.

Von	8217		Von	44444	
zu nehmen	3456		zu nehmen	3456	
Rest	4761		Rest	40988	
Zu nehmen	21498		Zu nehmen	45624	
von	76262		von	80200	
Rest	54764		Rest	34576	

4. Abschnitt. Multiplication ganzer Zahlen.

Multiplication ganzer Zahlen ist die Regel, nach der man den Betrag findet, den eine gegebene Zahl giebt, wenn man sie so viel mal wiederholt, als eine andere gegebene Zahl vorschreibt*). Die Zahl, welche multiplicirt oder wiederholt werden soll, heißt der Multiplicand und kann sowohl eine benannte als eine unbenannte Zahl seyn. Die Zahl, mit der multiplicirt wird, heißt der Multiplicator und muß eine

*) Diese Erklärung, wiewohl nicht die wissenschaftlichste, steht hier, weil die andern, offenbar oder versteckt, von den Proportionen abhängen und daher, bei logischer Anordnung, nicht so früh in den Lehrgang aufgenommen werden können.

unbenannte Zahl seyn, weil sie einzig und allein die Anzahl von Malen anzeigen soll, die der Multiplicand zu wiederholen ist. Multiplicator und Multiplicand heißen gemeinschaftlich Factoren. Die durch die Multiplication erzeugte Zahl nennt man das Product.

Bevor jede vorgegebene Multiplication ausgeführt werden kann, muß der Anfänger folgende Tafel der Producte von 2 mal 2 bis 12 mal 12 dem Gedächtnisse einprägen.

mal	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144

Es ist von wahrhaft praktischem Nutzen, wenn man diese Tafel wenigstens noch bis 20 mal 20 weiter ausführt. Alle Producte bis zu dieser Ausdehnung sind leicht gemerkt.

Der Anfänger wird wahrnehmen, daß in dieser Tafel 7 mal 5 so viel als 5 mal 7 oder $7 \times 5 = 35 = 5 \times 7$ ist. Auf gleiche Weise, daß $8 \times 3 = 24 = 3 \times 8$, $4 \times 11 = 44 = 11 \times 4$ ist u. s. w. Man kann dies oft als eine formale Probe brauchen, z. B. daß $3 \times 5 \times 8 = 3 \times 8 \times 5 = 5 \times 3 \times 8 = 5 \times 8 \times 3$ ꝛc. Den Versuch, diese Dinge, die fast als Grundsätze anzusehen sind, zu beweisen übergehe ich als überflüssig.

Ehe wir nun die Regeln aufstellen, wollen wir ein einfaches Beispiel vornehmen und 4827 mit 8 multipliciren. Ordnen wir hier die Zahlen wie im nebenstehenden Ansatze und multipliciren der Reihe nach 7 Einer mit 8, 2 Zehner mit 8, 8 Hunderter mit 8, 4 Tausender mit 8, so sind die Einzelproducte 56 Einer, 16 Zehner, 64 Hunderter, 32 Tausender; diese ihrem Range nach, den Regeln der Bezeichnung gemäß, geordnet und dann zusammengezählt geben als Totalsumme oder als Product aus 4827 in 8 die Zahl 38616.

```
4827
   8
------
  56
  16
  64
 32
------
38616
```

Dasselbe Beispiel kann auch so ausgeführt werden:

$$\left.\begin{array}{rrr} 8 \times & 7 = & 56 \\ 8 \times & 20 = & 160 \\ 8 \times & 800 = & 6400 \\ 8 \times & 4000 = & 32000 \\ & & \hline & & 38616 \end{array}\right\}$$ offenbar dasselbe Ergebniß wie vorher.

Regel.

1. Fall. Eine vielziffrige Zahl mit einer andern zu multipliciren, die nicht größer als 12 ist.

Multiplicire jede Ziffer des Multiplicand mit dem Multiplicator und fange mit den Einern an; schreibe unter jede Ziffer die Einer des Products und addire die Zehner zu den Einern des folgenden Products.

Beispiele.

Zu multipl.	4827	218043	440052	8765400
mit	8	9	11	12
Producte	38616	1962387	4840572	10584800

2. Fall. Die Multiplication auszuführen wenn jeder Factor größer als 12 ist.

Man setze die Factoren unter einander (gewöhnlich den kleinern zu unterst) und zwar so, daß Einer unter Einern, Zehner unter Zehnern stehen u. s. w. Man multiplicire den Multiplicand mit der Ziffer, welche an der Stelle der Einer im Multiplicator steht, nnd ordne das Product so, daß seine Einer unter denen des Multiplicand stehen; dann multiplicire man allmälig mit der Ziffer in der Stelle der Zehner, Hunderter ꝛc. des Multiplicators und setze die erste Ziffer jedes Products unter diejenige des Multiplicators, die dies Product gegeben hat. Die Summe dieser Einzelproducte ist die verlangte Zahl.

Beispiel.

Zu multipl. 8214356 mit 132.

Multiplicand	8214356
Multiplicator	132
8214356 × 2 = ...	16428712
8214356 × 3 Zehner = . . .	24643068
8214356 × 1 Hunderter = .	8214356
8214356 × 132 = ...	1084294992

Andere Beispiele.

Zu multipl.	821436	Zu multipl.	8210075
mit	672576	mit	420306
	4928616		49260450
	5750052		24630225
	4107180		16420150
	1642872		32840300
	5750052	Product	3450743782950
	4928616		
Product	552478139136		

Anmerkung. Man kann die Multiplication häufig dadurch abkürzen, daß man den Multiplicator in seine Factoren zerfällt und mit diesen successiv multiplicirt. So kann z. B. das erste Exempel, weil 132 mal eine Zahl so viel als 12 mal 11 mal dieselbe ist, auch auf folgende Weise ausgeführt werden.

Zu multipl.	821436	Hier ist eine Zeile der Multiplication und eine der Addition erspart.
mit	11	
und dies Product	90357916	
mit	12	
Product wie zuvor	1084294992	

Eben so läßt sich der Multiplicator des zweiten Beispiels, nämlich 672576, in die drei Zahlen 600000, 72000 und 576 zerlegen, von denen sich, mit Uebergehung der Nullen, die 72 in 12×6 und die 576 in 8×72 zerfällen läßt. Es kann daher die Rechnung so geführt werden:

Multiplicand 821436
Multiplicator 6 in der 6ten Stelle.
4928616

Voriges Product $\times$ 12 . . . 59143392 wegen der 72 Tausender.
Zweites Product $\times$ 8 . . . . . 473147136 wegen der 576 Einer.
Dasselbe Product wie vorher 552478139136: drei Zeilen erspart.

Andere Methoden der Verkürzung werden sich weiter unten ergeben.

5. Abschnitt. Division ganzer Zahlen.

Division ist die Regel, nach welcher bestimmt wird, wie oft eine Zahl in einer andern enthalten ist. Oder sie ist die Regel, nach der, wenn ein Product oder einer seiner Factoren bekannt ist, der andere gefunden werden kann. Die Zahl, welche dividirt wird, heißt der Dividend; die, mit welcher

dividirt wird, der Divisor; die, welche sich aus der Division ergiebt, der Quotient. Wird die Division als das Umgekehrte der Multiplication angesehen, so ist der Dividend einerlei mit dem Product, der Divisor mit dem Multiplicator, der Quotient mit dem Multiplicand.

Regel.

Man ziehe senkrechte Striche zur Rechten und Linken des Dividend, und setze den Divisor zur Linken. Man suche die Zahl, welche angiebt, wie vielmal der Divisor in so viel Ziffern auf der linken Seite des Dividend enthalten ist, als nur eben nöthig sind um sie wirklich mit jenem dividiren zu können. Die gefundene Zahl setze man zur Rechten. Man multiplicire den Divisor mit derselben und setze das Product unter die vorher erwähnten Ziffern des Dividends. Hierauf ziehe man dasselbe von dem Theile des Dividends ab, unter dem es steht, und ziehe die nächste Ziffer des Dividends herunter zur Rechten des Restes. Nun dividire man den so vermehrten Rest wie zuvor; kommt hierbei etwa einmal eine Zahl zum Vorscheine, die kleiner als der Divisor ist, so setze man in den Quotienten eine Null, ziehe die folgende Ziffer des Dividenden herunter und setze dies Verfahren fort bis das Ganze beendigt ist. Die Ziffern des Quotienten geben verbunden gelesen das Gesuchte.

Beispiele.

Zu dividiren 743256 durch 324.

Dividend.
Divisor 324 / 743256 / 2294 Quotient.
648
952
648
3045
2916
1296
1296
Rest 0

Divisor 324
Quotient 2294
1296
2916
648
648
Dividend 743256 als Probe.

71 / 29754 / $419\frac{5}{71}$
284
135
71
644
639
5 Rest.

131 / 135076 / $1031\frac{15}{131}$
131
407
393
146
131
15 Rest.

In diesen zwei Beispielen sind die übrig gebliebenen Zahlen über ihre respectiven Divisoren gesetzt und den Quotienten beigefügt worden. Das Weitere hierüber wird in der Lehre von den Brüchen erläutert werden.

Anmerkung. Wenn der Divisor nicht 12 übersteigt, so kann die Rechnung gleich in einer einzigen Zeile ausgeführt werden; es wird dies sehr deutlich werden, wenn man das folgende Beispiel mit den beiden Verfahrungsarten im ersten Multiplicationsexempel vergleicht.

Zu dividiren 38616 durch 8.

8 / 38616 / 4827
32
66
64
21
16
56
56
0

Dividend 38616
Divisor 8
Quotient 4827.

Hier geht 8 in 38 4 mal, bleibt 6; diese zu der nächsten 6 als 6 Zehner zugerechnet macht 66; 8 in 66 geht 8 mal, bleibt 2; diese als 2 Zehner der nächsten Ziffer 1 zugerechnet, macht 21; u. s. f.

In der Division kann auch, nach demselben Princip wie in der Multiplication, die Arbeit durch Zerfällung des Divisors in Factoren abgekürzt werden. So ist im ersten Beispiele der Divisor gleich 4 mal 81 oder 4 mal 9 mal 9. Daher kann der Dividend nach und nach durch 4, 9 und 9 dividirt werden, so wie es sich im Beistehenden zeigt; das Resultat ist dasselbe wie zuvor.

Zu dividiren 743256
durch 4
diesen Quotient 185814
durch 9
und diesen 20646
durch 9
Quotient 2294

Da 25 der vierte Theil von 100, und 125 der 8te von 1000 ist, so ist es leicht mit jeder von diesen beiden Zahlen in einer einzigen Zeile zu multipliciren und zu dividiren — nämlich so:

Soll man 4827 mit 25 multipliciren, so hänge man jener Zahl zur Rechten zwei Nullen an, was so viel ist als ob sie mit 100 multiplicirt wäre, und dividire durch 4.

4 / 482700
121175 Product.

Ist 582100 durch 25 zu dividiren, so streiche man zur Rechten zwei Ziffern ab, d. i. man dividire durch 100, dann multiplicire man mit 4.

5821|00
4
23284

Soll 6218 mit 125 multiplicirt werden, so hänge man drei Nullen an, d. i. man multiplicire mit 1000, dann dividire man mit 8.

8 / 6218000
777250 Product.

Ist 4567000 durch 125 zu dividiren, so streiche man drei Ziffern zur Rechten ab, d. i. man dividire durch 1000, dann multiplicire man mit 8.

4567|000
8
36536

Proben zu den vier ersten Regeln der Arithmetik.

So einfach auch die vorstehenden vier Regeln sind, so ist es doch nicht unmöglich, bei Ausführung derselben Rechnungsfehler zu begehen; daher ist es nützlich Proben für sie zu kennen.

1. Die Addition kann geprüft werden, indem man sowohl hinaufwärts als herabwärts zusammenzählt und Acht giebt, ob die beiden Summen übereinstimmen; oder, wenn man die zu addirenden Zahlen in 2 Classen vertheilt, die Summe von jeder findet und dann diese Separatsummen zusammenzieht. So ist im nebenstehenden Beispiele die Summe der vier Zahlen 7355, die der beiden obersten 5857, der beiden untersten 1498 und die Summe dieser beiden Summen 7355 wie zuvor.

2758	2758
3099	3099
469	469
1029	1029
7355	5857
	1498
	7355

2. Die Probe der Subtraction besteht darin, den Rest zum Subtrahend zu addiren; ist die Summe mit dem Minuend einerlei, so war die Rechnung richtig, im Gegentheile falsch.

3. Multiplication und Division prüfen sich einander gegenseitig.

Es giebt jedoch noch eine andere Probe der Multiplication, die mit dem Kunstausdrucke die Neunerprobe heißt. Man zähle die Ziffern des Multiplicand von der Linken zur Rechten zusammen und nehme von dem Betrage so viel als möglich 9 hinweg und bemerke den Rest. Eben so verfahre man mit dem Multiplicator und mit dem Producte; ist nun das Product aus den ersten zwei Resten gleich dem dritten Reste*), so ist dies ein Zeichen der Richtigkeit der ausgeführten Multiplication. Nehmen wir z. B. das zweite Exempel der Multiplication, so beträgt die Ziffernsumme des Multiplicand 6 über zwei Neunen, dieselbe im Multiplicator 6 über 3 mal 9, endlich eben dieselbe im Product 0 über sechs Neunen; das Product aus den zwei ersten Ueberschüssen ist aber 6×6 gleich 36 oder 0 über 4 mal 9. In der Uebereinstimmung der beiden gefundenen Nullen liegt die Probe der Richtigkeit. Es ist jedoch klar, daß die Probe ganz dieselbe bleiben wird, so lange die Ziffern des Productes dieselben sind, was auch übrigens ihre Ordnung sei; daher ist diese Probe, obgleich sinnreich erdacht, mangelhaft**).

---

*) Wie das folgende Beispiel zeigt, muß zur Vollständigkeit der Regel hier noch hinzugefügt werden: oder der Ueberschuß dieses Productes über ein möglichst großes Vielfaches von 9 gleich demselben Ueberschusse des Hauptproductes. (D.)

**) Die Richtigkeit dieser Probe mit der oben angegebenen Einschränkung kann algebraisch so dargethan werden: seien M und N die Zahlen der Neunen beziehungsweise im Multiplicand und Multiplicator, m und n

Eine ähnliche Probe ist auf die Division anwendbar *).

6. Abschnitt. Gemeine Brüche.

Die Brüche, von denen wir bereits im ersten Abschnitte gesprochen haben, werden gewöhnlich gemeine Brüche genannt, zum Unterschiede von einer andern Gattung, die wir weiterhin erwähnen werden, der Decimalbrüche.

Ein Bruch ist ein Ausdruck für Theile einer Einheit oder eines Ganzen, die wieder für sich ein Ganzes ausmachen. Nimmt man z. B. den Thaler als Einheit an, so ist der Groschen der vierundzwanzigste Theil dieser Einheit; vier Pfennige sind vier Zwölftel von jenem vierundzwanzigsten Theile. Dies wird nach der eingeführten Bezeichnung der gemeinen Brüche beziehungsweise dargestellt durch $\frac{1}{24}$, und $\frac{4}{12}$ von $\frac{1}{24}$.

Die untere Zahl des so dargestellten Bruches (welche die Zahl der Theile angiebt, in welche das Ganze getheilt gedacht werden soll) heißt der Nenner; und die obere (welche die Zahl der Theile andeutet, die der Bruch ausdrückt) der Zähler. So sind in den Brüchen $\frac{5}{7}$, $\frac{8}{15}$, 7 und 15 Nenner, 5 und 8 Zähler.

Man theilt die gemeinen Brüche in echte, unechte, gemischte, einfache, zusammengesetzte und complexe.

In den echten Brüchen ist der Zähler kleiner als der Nenner, z. B. $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$ ꝛc.

Bei den unechten Brüchen ist der Zähler gleich oder größer als der Nenner, z. B. $\frac{4}{4}$, $\frac{12}{8}$ ꝛc.

Gemischte Brüche sind Zahlen, welche aus echten Brüchen und ganzen Zahlen zusammengesetzt sind, wie $7\frac{5}{8}$, $12\frac{1}{4}$ ꝛc.

Einfache Brüche sind Ausdrücke für Theile gegebener Einheiten, z. B. $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{6}$ ꝛc.

Zusammengesetzte Brüche sind Ausdrücke für Theile gegebener Brüche, wie $\frac{3}{4}$ von $\frac{5}{8}$, $\frac{2}{3}$ von $\frac{7}{11}$ ꝛc.

In den complexen Brüchen ist entweder ein Glied oder es sind beide (Zähler und Nenner) gemischte Zahlen, z. B.

$$\frac{5\frac{2}{5}}{24}, \quad \frac{12}{14\frac{3}{4}}, \quad \frac{6\frac{5}{8}}{12\frac{2}{3}} \text{ ꝛc.}$$

---

ihre Ueberschüsse; so ist $9M + m$ = Multiplicand, $9N + n$ = Multiplicator, und das Product aus diesen Factoren $= 81MN + 9Mn + 9Nm + mn$. Nun aber enthält jedes der drei ersten Glieder 9 ohne Rest, weil allemal einer der Factoren 9 enthält; diese also bei Seite gesetzt ist nur noch das Glied mn durch 9 zu dividiren; mn ist aber das Product aus den beiden vorigen Ueberschüssen; die Richtigkeit der Methode ist also klar.

*) Auch auf Addition und Subtraction. S. Rothe's Arithmetik I. 342. (D.)

Eine Zahl, welche zwei oder mehrere Zahlen ohne Rest theilt, heißt ihr gemeinschaftliches Maß.

Verwandlung der gemeinen Brüche.

Diese besteht hauptsächlich in der Veränderung derselben in eine bequemere Form zum Behufe der Addition, Subtraction ꝛc.

1. Fall. Brüche auf ihre möglichst kleinsten Zahlen zu reduciren (sie zu verkleinern, aufzuheben).

Man theile Zähler und Nenner des gegebenen Bruches durch eine Zahl, die in beiden ohne Rest aufgeht; die Quotienten, wenn es möglich ist, wieder durch eine solche Zahl, u. s. f. bis 1 der größte gemeinschaftliche Divisor ist.

So ist $\frac{1470}{2205} = \frac{294}{441} = \frac{98}{147} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$, wo 5, 3, 7, 7, beziehungsweise die gemeinschaftlichen Theiler sind. Oder: es ist $\frac{1470}{2205} = \frac{2}{3}$, wenn man Zähler und Nenner auf einmal durch 735 dividirt.

Anmerkung. Diese Zahl 735 heißt das größte gemeinschaftliche Maß der Glieder des Bruchs; man findet es so: Dividire die größere von den beiden Zahlen durch die kleinere, dann den Divisor durch den gebliebenen Rest, u. s. f. bis kein Rest mehr bleibt; der letzte Divisor ist das gesuchet größte gemeinschaftliche Maß *).

---

*) Zur Abkürzung der gemeinen Brüche bedient man sich häufig folgender

Lehrsätze.

1) Ist die Endziffer einer Zahl zur Rechten eine Null oder eine durch 2 theilbare Ziffer, so ist das Ganze durch 2 theilbar; denn wenn in der zweiten Stelle bei der Division eine 1 übrig bleibt, so bedeutet diese für die letzte 10; aber 10 ist durch 2 theilbar, daher auch unter der angegebenen Bedingung das Ganze.

2) Schließt sich eine Zahl zur Rechten mit 0 oder 5, so ist sie durch 5 theilbar; denn eine jede in der 2ten Stelle etwa als Rest bleibende 1 gilt für die letzte 10, diese aber ist durch 5 theilbar, also ꝛc.

3) Wenn in einer Zahl die zwei letzten Ziffern zur Rechten (als zusammenhängende Zahl gelesen) durch 4 theilbar sind, so ist es auch die Zahl selbst; denn eine jede in der dritten Stelle restirende Einheit bedeutet 100; aber 4 geht in jedem Vielfachen von 100 auf, daher auch unter obiger Bedingung im Ganzen.

4) Eine Zahl ist durch 8 theilbar wenn es die drei letzten Ziffern zur Rechten (als zusammenhängeude Zahl gelesen) sind; denn jede bei der Division in der 4ten Stelle restirende Einheit bedeutet 1000; aber 8 ist in jedem Vielfachen von 1000 enthalten, also ist dann auch die ganze Zahl durch 8 theilbar.

5) Giebt in einer vorgelegten Zahl die Summe der Ziffern eine solche Zahl, die durch 3 oder 9 theilbar ist, so ist auch jene Zahl selbst durch 3 oder 9 theilbar.

6) Geht in der Summe der Ziffern einer vorgegebenen Zahl 3

2. Fall. Einen uneigentlichen Bruch in eine ganze Zahl oder einen gemischten Bruch zu verwandeln.

Dividire den Zähler durch den Nenner, der Quotient ist das Verlangte, wie aus der Natur der Division erhellt.

Beispiel. Sey $\frac{957}{43}$ und $\frac{5480}{274}$ in gleichgeltende ganze oder gemischte Zahlen zu verwandeln.

43/957/$22\frac{11}{43}$ Antwort.

86

97

86

11

274/5480/20 Antwort.

548

0

3. Fall. Eine gemischte Zahl in einen uneigentlichen Bruch zu verwandeln; und: eine ganze Zahl in einen gleichgeltenden Bruch mit vorgeschriebenem Nenner.

Dies ist offenbar die Umkehrung vom 2. Fall; man multiplicirt daher die ganze Zahl durch den Nenner des Bruchs und addirt den Zähler (wenn, wie im ersten Theile der Aufgabe, einer da ist), das Ergebniß ist der Zähler des gesuchten Bruchs.

Beispiel. $22\frac{11}{43}$ in einen unechten Bruch und 20 in einen Bruch mit dem Nenner 274 zu verwandeln.

$(22 \times 43) + 11 = 957$ ist der neue Zähler und $\frac{957}{43}$ der erste Bruch.

$(20 \times 274) = 5480$ ist der andere neue Zähler und $\frac{5480}{274}$ der zweite Bruch.

4. Fall. Einen zusammengesetzten Bruch in einen gleichgeltenden einfachen zu verwandeln.

Multiplicire alle Zähler mit einander, so hast du den Zähler, desgleichen alle Nenner mit einander, so hast du den Nenner des gesuchten einfachen Bruchs.

Wenn ein Theil des zusammengesetzten Bruchs eine gemischte oder eine ganze Zahl ist, so verwandle man ihn zuvor in einen uneigentlichen Bruch oder gebe ihm (im 2ten Falle) Bruchform, indem man unter den Zähler 1 setzt.

---

auf und in der letzten Ziffer zur Rechten 2, so ist sie durch 6 theilbar, denn da geht nach dem Vorigen in ihr 2 und 3 auf.

7) Wenn die Zahlen, welche die Summe der 1sten, 3ten, 5ten ꝛc. und wiederum der 2ten, 4ten, 6ten ꝛc. Ziffer geben, gleich *) sind, so ist die Zahl durch 11 theilbar; denn sind a, b, c, d, e, m, n die Ziffern, welche die Zahl bilden, so wird, wenn man mit 11 multiplicirt, das Product die Ziffern

(8) (7) (6) (5) (4) (3) (2) (1)

a, a + b, b + c, c + d, d + e, e + m, m + n, n,

erhalten, wo die Summe der geraden Glieder der der ungeraden gleich ist.

*) oder ein Vielfaches von 11. (D.)

Sind gleiche Factoren in Zähler und Nenner enthalten, so hebe man sie auf.

Beispiel. $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{4}$ von $\frac{5}{7}$ von $\frac{7}{9}$ von $\frac{8}{11}$ auf einen einfachen Bruch zu bringen.

$$\frac{2\times3\times5\times7\times8}{3\times4\times7\times9\times11} = \frac{2\times5\times8}{4\times9\times11} = \frac{1\times5\times8}{2\times9\times11} = \frac{1\times5\times4}{1\times9\times11} = \frac{20}{99}.$$

Hier wurden zuerst 3 und 7, die Zähler und Nenner gemeinsam waren, aufgehoben; dann wurden beide Glieder durch 2 dividirt; und dann noch einmal durch 2.

Beispiel. Drei Pfennige als Bruch eines Friedrichsdors auszudrücken.

Ein Pfennig ist der 12te Theil eines Groschens, ein Groschen der 24te eines Thalers, ein Thaler der 5te eines Friedrichsdors.

Daher $\frac{3}{12}$ von $\frac{1}{24}$ von $\frac{1}{5} = \frac{3}{1440} = \frac{1}{480}$.

5. Fall. Einen complexen Bruch in einen einfachen zu verwandeln.

Man verwandle sowohl Zähler als Nenner in unechte Brüche, multiplicire jeden der Zähler der letzteren durch den Nenner des andern Bruchs, so ist das Product aus dem Zähler des Bruchs, der den Zähler des complexen Bruchs bildete, der Zähler; das Product aus dem Zähler des Bruchs, der den Nenner des complexen bildete, der Nenner des gesuchten Bruchs, der nun weiter nach dem Vorigen vereinfacht wird.

Beispiel. Den complexen Bruch $\frac{2\frac{2}{3}}{4\frac{4}{5}}$ zu vereinfachen.

Werden die gemischten Zahlen auf unechte Brüche gebracht, so hat man $\frac{\frac{8}{3}}{\frac{24}{5}}$: multiplicirt man die Zähler 8,24, nun beziehungsweise mit 5 und 3, so hat man $\frac{40}{72}$, und wenn man die beiden Glieder des Bruchs mit 8 dividirt, so erhält man als den verlangten Bruch $\frac{5}{9}$.

6. Fall. Brüche von verschiedenen Nennern in gleichgeltende zu verwandeln, die einen gemeinsamen Nenner haben.

Man multiplicire jeden Zähler durch alle Nenner, seinen eigenen ausgenommen, so erhält man die neuen Zähler; man multiplicire alle Nenner unter einander, so hat man den gemeinsamen Nenner.

Beispiel. Man verwandle $\frac{2}{3}$, $\frac{6}{7}$ und $\frac{5}{9}$ in gleichgeltende Brüche von gemeinsamen Nenner.

$$\left.\begin{aligned} 2\times7\times9 &= 126\\ 6\times3\times9 &= 162\\ 5\times3\times7 &= 105 \end{aligned}\right\} \text{Zähler.}$$

$3\times7\times9 = 189$, gemeinsamer Nenner.

Es sind also die Brüche $\frac{126}{189}$, $\frac{162}{189}$, $\frac{105}{189}$, oder wenn man abkürzt, $\frac{42}{63}$, $\frac{54}{63}$, $\frac{35}{63}$.

Hieraus sieht man, daß $\frac{2}{3}$ größer als $\frac{5}{9}$, dagegen kleiner als $\frac{6}{7}$ ist.

Anmerkung. Andere Methoden der Verwandlung ergeben sich leicht bei einiger praktischer Uebung, und noch mehr, wenn man sich die Anfangsgründe der Algebra angeeignet hat.

Addition und Subtraction der Brüche.

Regel. Haben die Brüche einen gemeinschaftlichen Nenner, so addire oder subtrahire man die Zähler und setze die Summe oder Differenz als neuen Zähler über den gemeinschaftlichen Nenner.

Haben die Brüche keinen gemeinschaftlichen Nenner, so muß man sie in solche verwandeln, die einen gemeinsamen Nenner haben, ehe die Operation vor sich gehen kann.

Bei der Addition oder Subtraction gemischter Brüche ist es gewöhnlich am besten, die Summe oder Differenz der ganzen Zahlen und der Brüche abgesondert zu nehmen und dann ihre Summe als das Resultat zu betrachten.

Beispiele.

1. Die Summe von $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$ und $\frac{3}{4}$ zu finden.

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{7}+\frac{3}{4}=\frac{56}{84}+\frac{60}{84}+\frac{63}{84}=\frac{179}{84}=2\frac{11}{84}.$$

2. Von $\frac{1}{16}$ eines Thalers $\frac{3}{4}$ eines Groschens zu nehmen.

$\frac{3}{4}$ Groschen $=\frac{3}{4}$ von $\frac{1}{24}=\frac{3}{96}$ Thaler.

Aber $\frac{1}{16}$ Thaler $=\frac{6}{96}$, also $\frac{6}{96}-\frac{3}{96}=\frac{3}{96}=\frac{1}{32}$ Thaler $=$ 9 Pfennige.

3. Die Differenz zwischen $12\frac{5}{6}$ und $8\frac{3}{5}$ zu finden.

$$12\tfrac{5}{6}-8\tfrac{3}{5}=4+(\tfrac{5}{6}-\tfrac{3}{5})=4+(\tfrac{25}{30}-\tfrac{18}{30})=4\tfrac{7}{30}.$$

Oder $12\frac{5}{6}-8\frac{3}{5}=\frac{77}{6}-\frac{43}{5}=\frac{385}{30}-\frac{258}{30}=\frac{127}{30}=4\frac{7}{30}$.

Multiplication und Division der Brüche.

Regel 1. Ist ein Bruch mit einer ganzen Zahl zu multipliciren, so multiplicire man den Zähler mit derselben und behalte den Nenner bei.

2. Ist ein Bruch durch eine ganze Zahl zu dividiren, so multiplicire man den Nenner mit der Zahl und behalte den Zähler bei.

3. Zwei oder mehrere Brüche mit einander multipliciren ist eben so viel, als einen Bruch von einem Bruche nehmen; und wird daher dadurch bewirkt, daß man das Product der Zähler als neuen Zähler, das der Nenner als neuen Nenner

annimmt. (Das Product ist offenbar kleiner als jeder Factor, wenn diese kleiner als die Einheit sind).

4. Soll ein Bruch durch einen andern dividirt werden, so kehre man den dividirenden um und verfahre wie bei der Multiplication (der Quotient ist stets größer als der Dividend, wenn der Divisor kleiner als die Einheit ist).

Beispiele.

1. $\frac{3}{4}$ mit 2 zu multipliciren und $\frac{6}{7}$ durch 5 zu dividiren.

$\frac{3}{4} \times 2 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$, und $\frac{6}{7} : 5 = \frac{6}{7 \times 5} = \frac{6}{35}$.

2. $2\frac{2}{3}$ mit $\frac{3}{4}$ zu multipliciren und $\frac{8}{9}$ mit $\frac{4}{5}$ zu dividiren.

$2\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{8}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{8}{4} = 2$, und $\frac{8}{9} : \frac{4}{5} = \frac{8}{9} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}$.

3. 2 Rthlr. 13 gr. 4 pf. mit $4\frac{1}{2}$ zu multipliciren, und 4 Rthlr. 18 gr. mit $2\frac{2}{5}$ zu dividiren.

2 Rthlr. 13 gr. 4 pf. $= 2 + \frac{1}{2}\frac{3}{4} + \frac{4}{1\,2}$ von $\frac{1}{2}\frac{3}{4} = 2\frac{5}{9} = \frac{2}{9}\frac{3}{9}$, und $\frac{2}{9}\frac{3}{9} \times 4\frac{1}{2} = \frac{2}{9}\frac{3}{9} \times \frac{9}{2} = \frac{2}{2}\frac{3}{9} = 11\frac{1}{2} = 11$ Rthlr. 12 gr.
und: 4 Rthlr. 18 gr. : $2\frac{2}{5} = 4\frac{3}{4} : 2\frac{2}{5} = \frac{1}{4}\frac{9}{9} : \frac{1}{5}\frac{2}{9} = \frac{1}{4}\frac{9}{9} \times \frac{5}{1\,2} = \frac{9\,5}{4\,8} = 1\frac{4\,7}{4\,8} = 1$ Rthlr. 23 gr. 6 pf.

Anmerkung. Bei der Multiplication gemischter Zahlen ist es oft weniger mühsam, die Multiplication mit jedem Theile insbesondere vorzunehmen und dann die Theilsummen zu vereinigen, (wie im beigefügten Beispiele) als die gemischten Zahlen auf unechte Brüche zu bringen und umgekehrt ihr Product wieder in eine gemischte Zahl zu verwandeln.

Zu multiplic. $45\frac{3}{4}$
mit $17\frac{2}{3}$

45×7	$= 315$
45×1 Zehn	$= 45.$
$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$	$= \frac{1}{2}$
$45 \times \frac{2}{3}$	$= .30$
$17 \times \frac{3}{4}$	$= .12\frac{3}{4}$
Product	$808\frac{1}{4}$

7. Abschnitt. Decimalbrüche.

Die Mühe und der Zeitaufwand, welcher mit der Rechnung mit gemeinen Brüchen verbunden ist, hat die Idee erzeugt, die Benennung, den Nenner, ein für allemal festzustellen und jeden vorgegebenen Ausdruck darauf zurückzuführen. Es entspringen hieraus zwei Arten von Zahlen, die Decimalbrüche und die complexen oder benannten Zahlen. Von den letztern, solchen z. B. wo ein Längenmaaß in Klaftern, Fußen (oder Sechsteln der Klafter) und Zollen (oder Zwölfteln des Fußes) ausgedrückt wird, soll bald nachher gesprochen werden, jetzt wollen wir zunächst die ersten betrachten.

Decimalbrüche oder schlechthin Decimalen sind Brüche, welche wie ganze Zahlen geschrieben werden, deren Werthe aber von der Stelle der Einheiten an fortschreitend in demselben

zehnfachen Verhältnisse nach der Rechten hin abnehmen, in welchem die Scale der gemeinen Zahlen nach der Linken hin wächst. Man trennt sie gewöhnlich durch ein Komma von den ganzen Zahlen. So wird $22\frac{7}{10}$ nach der Bezeichnung der Decimalen geschrieben 22,7.

Eben so ist 0,1 so viel als $\frac{1}{10}$,
0,01 = = = $\frac{1}{100}$,
0,001 = = = $\frac{1}{1000}$,
0,0001 = = = $\frac{1}{10000}$,
0,7 = = = $\frac{7}{10}$,
0,43 = = = $\frac{43}{100}$,
0,125 = = = $\frac{125}{1000}$,
7,3 = = = $7\frac{3}{10}$,
42,85 = = = $42\frac{85}{100}$,
57,217 = = = $57\frac{217}{1000}$ u. s. w.

Der Werth eines Decimalbruchs wird nicht durch Nullen zur Rechten verändert; 0,500 oder $\frac{500}{1000}$ ist seinem Werthe nach dasselbe als $\frac{5}{10}$ oder 0,5, d. i. $\frac{1}{2}$.

Wenn sich Decimalen nach einer gewissen Anzahl von Ziffern schließen, so nennt man sie geschlossene, z. B.

$0{,}125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$; $0{,}958 = \frac{958}{1000} = \frac{239}{250}$.

Wiederholt sich in einem Decimalbruche eine Ziffer oder eine Reihe von Ziffern regelmäßig, so heißt er ein wiederkehrender oder periodischer, z. B. 0,333333 ꝛc. $= \frac{1}{3}$; 0,66666 ꝛc. $= \frac{2}{3}$; 0,428571428571 ꝛc. $= \frac{3}{7}$ u. dgl. m.

Verschiedene Schriftsteller haben Regeln zur Behandlung dieser letzteren Art von Decimalbrüchen gegeben; aber im Allgemeinen ist es einfacher und bequemer, die verlangten Rechnungsoperationen mit den gleichgeltenden gemeinen Brüchen vorzunehmen, aus denen die periodischen Decimalen abgeleitet sind.

Verwandlung der Decimalbrüche.

Unter Verwandlung der Decimalbrüche versteht man die Regel, nach welcher die bekannten Theile gegebener Einheiten in gleichgeltende Decimalbrüche, und umgekehrt, verwandelt werden.

1. Fall. Einen gegebenen gemeinen Bruch in einen gleichgeltenden Decimalbruch zu verwandeln.

Man hänge dem Zähler Nullen an und dividire ihn durch den Nenner, der Quotient wird der verlangte Decimalbruch seyn *).

---

*) Man vergesse jedoch nicht, für jede angehängte Null, durch die es doch noch nicht möglich wird, in den Zähler mit dem Nenner zu dividiren, im Quotienten (dem Decimalbruche) auch eine Null zu setzen, z. B. bei $\frac{1}{137}$;

137 / 1,000000
0,007299 ꝛc. $= \frac{1}{137}$. (D.)

Beispiele.

1. Verwandle $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{16}$, $\frac{11}{64}$ in gleichgeltende Decimalbrüche.

2/1,0
0,5 = $\frac{1}{2}$;

4/3,00
0,75 = $\frac{3}{4}$;

16{ 4/7,0000
4/1,7500
0,4375 = $\frac{7}{16}$;

64{ 8/11,000
8/1,375000
0,171875 = $\frac{11}{64}$.

2. Verwandle $\frac{4}{27}$ und $\frac{11}{63}$ in gleichgeltende Decimalbrüche.

27{ 3/4,000000
9/1,333333
0,148148 ꝛc. = $\frac{4}{27}$.

63{ 7/11,0000000
9/1,571428571428 5
0,174603174603 1 ꝛc. = $\frac{11}{63}$.

Diese beiden Brüche sind offenbar periodisch, weil in dem einen die Ziffern 148, in dem andern die Ziffern 174603, ins Unbestimmte wiederholt vorkommen.

3. Verwandle 13 gr. 6 pf. in einen Decimalbruch vom Thaler.

Erstens 13 gr. 6 pf. = $\frac{13}{24}$ + $\frac{1}{2}$ von $\frac{1}{24}$ = $\frac{26}{48}$ + $\frac{1}{48}$ = $\frac{27}{48}$ = $\frac{9}{16}$; dann $\frac{9}{16}$ = 0,5625, der verlangte Decimalbruch.

4. Verwandle $\frac{44}{57}$ in einen gleichgeltenden Decimalbruch.

57 / 44,000000 / 0,77192, ꝛc. = $\frac{44}{57}$.

399
410
399
110
57
530
513
170
114
56

Anmerkung. Dieser Bruch ist = $\frac{4}{3} \cdot \frac{11}{19}$, von welchen beide Nenner Primzahlen sind (d. h. Zahlen die durch keine andere als die Einheit theilbar sind), der ganze Decimalbruch hat eine Periode von 18 Stellen, d. h. mit jeder 19ten Stelle kehren alle Ziffern in derselben Ordnung wieder;
0,771929824561403508,7719, u. s. w. bis ins Unendliche*).

*) Sind die Nenner der Brüche Primzahlen, so kommen dabei mehrere interessante Eigenschaften vor; eine davon, die sich auf Brüche bezieht, deren Nenner 7 ist, will ich hier mittheilen. Die wiederkehrenden Ziffern der gleichgeltenden Decimalbrüche sind genau dieselben

2. Fall. Einen gegebenen Decimalbruch in einen gleichgeltenden gemeinen Bruch zu verwandeln; oder seinen Werth in ganzen Zahlen von niederer Benennung auszudrücken.

Wenn der gleichgeltende gemeine Bruch verlangt wird, so schreibe man unter den Decimalbruch als Nenner eine Eins mit so viel Nullen als Ziffern in dem gegebenen Decimalbruche sind, dann läßt sich der Bruch, wenn er auf diese Weise bestimmt ist, in seinen kleinsten Ausdruck verwandeln.

Oder, wenn der Werth des Decimalbruches in niederer Benennung verlangt wird, multiplicire man den gegebenen Decimalbruch durch den Werth seiner Einheit in der nächst niedern Ordnung; und schneide von der Rechten zur Linken so viel Ziffern von dem Producte ab, als Stellen in dem gegebenen Decimalbruche waren.

Man multiplicire ferner den letzt gefundenen Decimalbruch durch seinen Werth in der nächst niedern Ordnung, schneide wie zuvor dieselbe Zahl von Decimalen ab, und führe so die Berechnung fort bis zu der niedrigsten Einheit, oder bis die abgeschnittenen Decimalstellen Nullen sind; dann werden die verschiedenen Zahlen, welche auf der linken Seite des Komma's stehen, mit den übrig gebliebenen Decimalen, wenn welche vorhanden sind, den verlangten Werth des Decimalbruches ausdrücken.

Beispiele.

1. Suche die gemeinen gleichgeltenden Brüche für 0,25 und 0,375.

$$0{,}25 = \tfrac{25}{100} = \tfrac{1}{4}; \text{ und } 0{,}375 = \tfrac{375}{1000} = \tfrac{3}{8}.$$

2. Suche den Werth von 0,4921875 Rthlr. in Groschen und Pfennigen.

$$\left.\begin{array}{r} 0{,}4921875 \\ \hline 1{,}9687500 \,(4 \\ \hline 11{,}8125000 \,(6 \\ \hline 12 \\ \hline 9{,}7500000 \end{array}\right\} \text{Antw. 11 gr. } 9\tfrac{3}{4} \text{ pf.}$$

3. Suche den Werth von 0,74375 Ruthen in Fußen und Zollen.

---

und in derselben Ordnung für $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$ u. s. w., die Periode beginnt für jeden Zähler an einer verschiedenen Stelle.

$\frac{1}{7} = 0{,}14285714$, u. s. w.
$\frac{2}{7} = 0{,}28571428$, u. s. w.
$\frac{3}{7} = 0{,}42857142$, u. s. w.
$\frac{4}{7} = 0{,}57142857$, u. s. w.
$\frac{5}{7} = 0{,}71428571$, u. s. w.
$\frac{6}{7} = 0{,}85714285$, u. s. w.

0,74375 (12
8,92500 (12
11,10000

Antw. 8 Fuß $11\frac{1}{10}$ Zoll.

Addition und Subtraction der Decimalbrüche.

Diese beiden Rechnungsarten werden genau wie in ganzen Zahlen verrichtet, die Zahlen werden so geordnet, daß Einheiten unter Einheiten, Zehntel unter Zehntel u. s. w., oder, was auf dasselbe hinausläuft, daß die Decimalkommata unter einander zu stehen kommen. Z. B.

Addire
421,75
32,8165
0,0027
11,
465,5692

Von 2486,173
zieh' ab 14,56789
Rest 2471,60511
Probe 2486,17300

Multiplication und Division der Decimalbrüche.

Auch hier werden die Operationen wie bei ganzen Zahlen verrichtet. In der Multiplication giebt man übrigens dem Producte so viel Decimalstellen als in beiden Factoren zusammen enthalten sind, und wenn das Product nicht so viel Stellen enthält, so werden zur Ergänzung linker Hand Nullen vorgesetzt. In der Division bestimme man so viel Decimalstellen für den Quotienten, als die Anzahl derselben im Dividend (die ergänzenden Nullen, wenn es einige giebt, mit eingeschlossen), die des Divisors übertrifft.

Beispiele.

1. Multiplicire 43,7 mit 3,91, und 2,4542 mit 0,0053.

43,7
3,91
437
3933
1311
170,867

Hier sind $43,7 \times 3,91 = \frac{437}{10} \times \frac{391}{100} = \frac{170867}{1000}$ $= 170\frac{867}{1000}$, wie in der Decimalrechnung.

2,4542
0,0053
73626
122710
0,01300726

Hier ist im Producte eine Null vorgesetzt worden, um die erforderliche Anzahl von Decimalstellen zu erhalten.

2. Dividice 172,8 durch 0,144, und 192 durch 5,423.

0,144 / 172,8 / 1200 Quotient.

144
288
288
...00

5,423 / 192,000 / 35,40475

16269
29310
27115
21950
21692
25800
21692
41080
37961
31190
27115
4075

In dem ersten dieser Beispiele sind unterwärts zwei Nullen angefügt, diese machen mit der Decimalstelle 8, eben so viel Decimalstellen im Dividend als im Divisor, daher ist der Quotient eine ganze Zahl. In dem zweiten Beispiele sind dem Dividend drei Nullen beigefügt worden, diese betragen mit denen, welche niederwärts hinzugekommen sind 8, davon die im Divisor abgezogen, bleiben 5 Decimalstellen für den Quotienten.

8. Abschnitt. Complexe Brüche.

Im Handel und Gewerbe ist es gebräuchlich, eine Reihe von Einheiten, welche eine beständige Beziehung aufeinander haben, anzunehmen, so daß die Einheiten einer Benennung als Brüche einer andern erscheinen. Ein Pfennig z. B. ist $\frac{1}{12}$ eines Groschens, 1 Groschen $\frac{1}{24}$ eines Thalers. Eben so ist ein Quentchen $\frac{1}{4}$ eines Lothes, 1 Loth $\frac{1}{32}$ eines Pfundes, 1 Pfund $\frac{1}{22}$ eines Steins, 1 Stein $\frac{1}{5}$ eines Centners. Mehreres hierüber ist in den am Ende dieses Buches befindlichen Tafeln nachzusehen. Die Regeln, nach welchen die arithmetischen Operationen bei complexen Zahlen dieser Art verrichtet werden, sind gewöhnlich einfacher, als die bei gemeinen Brüchen; es wird daher von Nutzen sein, sie hier genauer zu betrachten.

Verwandlung oder Reduction.

Hier giebt es zwei allgemeine Fälle.

1. Fall. Wenn die Zahlen von einer höhern Benennung auf eine niedere zu bringen sind.

1. Man multiplicire die Zahl der höhern Benennung durch so viel Einheiten der nächst niedern, als zur Einheit dieser höhern gehören, und setze das Product darunter.

2. Zu diesem Producte addire man den Zähler, wenn es einen giebt, welcher schon zuvor diese nächst niedere Benennung hatte, und multiplicire die Summe durch so viel Einheiten der nächst niedern Benennung, als zu einer Einheit dieser gegenwärtigen gehören.

3. Fahre man auf diese Art bei allen Benennungen bis zur letzten fort; die letztgefundene Zahl wird gleich seyn allen Zahlen in den höhern Benennungen zusammen genommen.

2. Fall. Wenn die Zahlen aus einer niedern Benennung auf eine höhere zu bringen sind.

1. Man dividire die gegebene Zahl durch so viel Einheiten dieser Benennung, als zur Einheit der nächst höhern gehören, und schreibe unten hin was übrig bleibt.

2. Man dividire den Quotienten durch so viel Einheiten von diesen, als wieder zur Einheit der nächst höhern Benennung gehören, was übrig bleibt schreibe man auf gleiche Weise wie vorher unter.

3. Fahre man auf dieselbe Weise alle Benennungen hindurch fort, bis zu der höchsten; der letztgefundene Quotient mit den verschiedenen Resten, wenn es welche giebt, wird der gegebenen Zahl gleich seyn.

Zur Probe dient die umgekehrte Operation. (1. Fall)

Beispiele.

Verwandle 14 Rthlr. in Groschen und Pfennige, und 24316 Pfennige in Thaler u. s. w.

14
24
336 Groschen
12
4032 Pfennige.

12 | 24316
24 | 2026 Rest 4
84 Rest 10
84 Rthlr. 10 gr. 4 pf.

2. Verwandle 22 Ruthen 8 Fuß 9 Zoll in Zoll, und 52187 Zoll in Ruthen.

22 . 8 . 9
12
272 Fuß
12
3273 Zoll.

12 | 52187
12 | 4348 Rest 11
362 Rest 4
362 Rth. 4 Fß. 11 Z.

Addition und Subtraction.

Regel. Man schreibe die Theile, welche gleiche Benennung haben in eine Columne unter einander und berechne der Reihe nach jede von ihnen, indem man mit der kleinsten Columne anfängt. Wenn (beim Addiren) die Summe einer Co-

lumne mehr Einheiten enthält, als zur Bildung einer oder mehrerer Einheiten der nächst höhern Art nöthig sind, so schreibe man nur den Ueberschuß über jene unter, und die erhaltenen höhern Einheiten addire man zur folgenden Columne. Auf ähnliche Weise verfahre man in Hinsicht des Borgens in der Subtraction.

Beispiele.

	Rthlr.	gr.	pf.	Cent.	Pf.	Lth.	Quent.
Addire	368	10	3	16	19	29	1
	275	10	5	10	101	19	3
	88	11	$4\frac{1}{2}$	8	12	15	3
	33	10	—	24	5	31	2
	12	13	5	1	54	16	2
	8	8	$8\frac{1}{2}$	6	22	13	1
	786 Rthl.	16 gr.	2 pf.	66 Ct.	106 Pf.	30 Lth.	—

Von 16 Rthlr. 12 gr. $8\frac{3}{4}$ pf.
zu nehmen 10 = 11 = $6\frac{1}{4}$ =

Rest 6 Rthlr. 1 gr. $2\frac{1}{2}$ pf.

Von 18 Cent. 95 Pf. 24 Lth. 3 Quent.
zu nehmen 9 = 104 = 31 = 1 =

Rest 8 Cent. 100 Pf. 25 Lth. 2 Quent.

Multiplication und Division.

1. In der zusammengesetzten Multiplication schreibe man den Multiplicator unter die kleinste Benennung des Multiplicand. — Multiplicire die Zahl der kleinsten Benennung durch den Multiplicator, untersuche sodann wie viel Einheiten der nächst höhern Benennung in dem Producte enthalten sind, und schreibe den Rest darunter. — Die gefundenen Einheiten nehme man weiter zu dem Producte der nächst höhern Benennung, und fahre so fort wie zuvor alle Benennungen hindurch, bis zu der höchsten; dieses Product, mit den verschiedenen Resten zusammengenommen, wird der ganze verlangte Betrag seyn.

Wenn der Multiplicator über 12 hinausgeht, multiplicire man der Reihe nach durch seine Factoren, wie in den folgenden Beispielen.

2. In der zusammengesetzten Division setze man den Divisor und Dividend wie in der einfachen Division. — Man fange linker Hand an, in die höchste Benennung des Dividend zu dividiren, und schreibe den Quotient unten hin. — Bleibt nach dieser Division ein Rest, so untersuche man, wie vielen Einheiten der nächst niedern Benennung der Rest gleich ist, und addire sie zu der Zahl, wenn eine vorhanden ist, welche in

dieser Benennung steht. — Diese so gefundene Zahl theile man durch den Divisor, und schreibe den Quotienten unter seine eigenthümliche Benennung. — Auf diese Art verfahre man alle Benennungen hindurch bis zu der niedrigsten, und der ganze, so gefundene Quotient, wird die verlangte Antwort seyn.

Beispiele.

1) Multiplicire 4 Rthlr. 17 gr. $6\frac{1}{4}$ pf. durch 441.

4 Rthlr. 17 gr. $6\frac{1}{4}$ pf.

$9 . 7 . 7 = 441$

9
42 = 13 = $8\frac{1}{4}$
7
297 = 23 = $9\frac{3}{4}$
7
2085 Rthlr. 22 gr. $8\frac{1}{4}$ pf.

Multiplicire 3 Ruthen 2 Fuß 11 Zoll durch 531.

10
32 = 5 = 2 =
10
324 = 3 = 8 = das 100 fache
5
1621 = 6 = 4 = das 500 fache
97 = 3 = 6 = 30 mal das obere
3 = 2 = 11 = 1 mal dasselbe
1722 Ruthen 0 Fuß 9 Zoll.

2. Dividire 521 Rthlr. 18 gr. 6 pf. durch 432.

$432 = 12 . 12 . 3$

Daher nach der kürzern Art zu dividiren:

12 / 521 Rthlr. 18 gr. 6 pf.
12 / 43 = 11 = $6\frac{1}{2}$ =
3 / 3 = 14 = $11\frac{3}{4}$ =
1 Rthlr. 4 gr. $11\frac{6}{7}\frac{1}{2}$ pf.

Nach der weitläuftigern Division.

432 / 521 Rthlr. 18 gr. 6 pf. / 1 Rthlr. 4 gr. $11\frac{6}{7\frac{1}{2}}$ pf.

```
  432
  ---
   89
   24
 ------
432 / 2154 (4
 1728
 ----
  426
   12
 ------
432 / 5118 (11
  432
  ---
  798
  432
  ---
  366
```

$\frac{3}{4}\frac{6}{3}\frac{6}{2} = \frac{6}{7}\frac{1}{2}$.

Von den Duodecimalbrüchen.

Brüche deren Nenner 12, 144, 1728 u. s. w. sind, werden Duodecimalbrüche genannt, und man versteht dabei die Eintheilung und Untereintheilung der Einheit, ohne sie, wie bei den Decimalbrüchen auszudrücken. Die Methode mit dieser Gattung von Brüchen zu rechnen, ist vorzüglich unter den Künstlern im Gebrauche, wenn sie den Inhalt eines Körpers berechnen, von welchem die Dimensionen in Fußen, Zollen und Zwölfteln eines Zolls (Linien) genommen werden.

Regel. Man setze die ineinander zu multiplicirenden Dimensionen untereinander, so daß Fuß unter Fuß, Zoll unter Zoll u. s. w. zu stehen kommen. Multiplicire jedes Glied des Multiplicands, bei dem niedrigsten anfangend, durch die Fuß im Multiplicator, und setze das Resultat eines jeden unmittelbar unter sein entsprechendes Glied, indem man beachtet, für jede 12 in Zollen 1 Fuß, für jede 12 in Linien 1 Zoll zu setzen. Auf gleiche Weise multiplicire man den ganzen Multiplicand durch die Zolle des Multiplicators, und dann durch die Zwölftelzolle, indem man das Resultat eines jeden Gliedes eine Stelle nach der rechten Hand fortrückt, wenn der Multiplicator in Zollen besteht, und zwei Stellen, wenn mit den Linien multiplicirt wird. Die Summe dieser partialen Producte wird die verlangte Antwort seyn.

Oder, anstatt durch Zolle u. s. w. zu multipliciren, nehme man den sovielten Theil des Multiplicand als jene Theile eines Fußes sind *).

*) Kaum wohl bedarf es der Erinnerung, daß nach dem strengen Begriffe der Multiplication, nicht von Multipliciren benannter Zahlen

Beispiele.

1. Multiplicire 4 Fuß 7 Zoll in 8 Fuß 4 Zoll.

4 Fuß	7 Zoll		oder	4 Fuß	7 Zoll
8	4				8
36	8	$4 = \frac{1}{3}$		36	8
1	6 4			1	$6\frac{1}{3}$
38	2 4			38	$2\frac{1}{3}$

Die 2, welche hier in der zweiten Stelle steht, bezeichnet nicht Quadratzoll, sondern das Rechteck von einem Fuß Länge und einem Zoll Breite, welches zu den Quadratzollen in der dritten Stelle hinzukommt, so daß $(2.12)+4=28$ Quadratzoll sind, und das Product 38 Quadratfuß, 28 Quadratzoll beträgt.

2. Multiplicire 35 F. $4\frac{1}{2}$ Zoll in 12 F. $3\frac{1}{3}$ Z.

35	4	6		oder	35	$4\frac{1}{2}$	
12	3	4				12	
424	6	0			424	6	
8	10	1	6	$3 = \frac{1}{4}$	8	10	$1\frac{1}{2}$
	11	9	6	$\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ von 3		11	$9\frac{1}{2}$
434	3	11			434	3	11

Hier ist wieder das Product 435 Quadratfuß, $+(3.12)$ $+11$ Zoll, oder 434 Quadratfuß, 47 Quadratzoll. Und diese Manier die Zolle zu berechnen, muß in allen Fällen beobachtet werden, wo zwei Dimensionen in Fußen und Zollen ineinander zu multipliciren sind.

9. Abschnitt. Potenzen und Wurzeln.

Unter Potenz versteht man eine Größe, welche erzeugt wird, indem eine gegebene Zahl, die Wurzel oder Radix genannt, eine gewisse Anzahl Male fortwährend mit sich selbst multiplicirt wird. Die Erhebung der Größen zu Potenzen nennt man Involution *).

$3 = 3$ ist die Wurzel, oder 1ste Potenz von 3.

$3 \times 3 = 3^2 = 9$, ist die 2te Potenz, oder das Quadrat von 3.

$3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 27$, ist die 3te Potenz oder der Cubus von 3.

$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 = 81$, ist die 4te Potenz, oder Biquadrat von 3. ꝛc.

---

durch benannte die Rede seyn kann, da, wenn so etwas vorzukommen scheint, man es im Grunde immer mit unbenannten zu thun hat. Es ist aber, wie häufig in der Mathematik, erlaubt, sich der Kürze wegen jener bequemen Redensart zu bedienen. (D.)

*) Bei uns Potenzirung. (D.)

Tafel für die ersten neun Potenzen der ersten neun Zahlen.

1ste	2te	3te	4te	5te	6te	7te	8te	9te
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256	512
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489

Eben so $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ = Quadrat von $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{9} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$ = Cubus von $\frac{2}{3}$; $\frac{8}{27} \times \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$, Biquadrat von $\frac{2}{3}$; und so in andern Fällen. Hieraus erhellet, daß wie die Potenzen der ganzen Zahlen immer allmälig größer werden, so die Potenzen der reinen oder eigentlichen Brüche immer successive abnehmen.

Evolution*).

Evolution, oder die Ausziehung der Wurzeln, ist das Gegentheil von Involution oder Potenzirung. Eine Potenz einer gegebenen Zahl kann genau gefunden werden; aber wir können nicht umgekehrt jede Wurzel einer gegebenen Zahl genau finden. So wissen wir, daß die Quadratwurzel von 4 genau 2 ist; aber die Cubikwurzel von 4 können wir nicht genau bezeichnen. Eben so, obschon wir die Cubikwurzel von 8, $= 2$, wissen, so können wir doch die Quadratwurzel von 8 nicht genau ausdrücken. Von 64 hingegen können wir beide, die Quadrat- und Cubikwurzel bestimmen; die erstere ist 8, die letztere 4.

Mittels der Decimalbrüche können wir in allen Fällen die Wurzel bis zu einem beliebigen Grade von Genauigkeit annähernd finden.

Diese blos angenäherten Wurzeln werden surdische Wurzeln oder Irrationalzahlen genannt; als $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{9}$, u. s. w., weil jene, welche genau gefunden werden können, rational genannt werden; als $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt[3]{125} = 5$, $\sqrt[4]{16} = 2$.

---

*) Bei uns Extraction. (D.)

Ausziehung der Quadratwurzeln.

Regel. Man theile die gegebene Zahl durch Striche in Classen, die Ganzen von der Rechten zur Linken, die Decimalbrüche von der Linken zur Rechten, und gebe jeder Classe zwei Ziffern.

Man suche das Quadrat, das der Zahl in der ersten Classe linker Hand am nächsten kommt, und schreibe seine Wurzel rechter Hand hinter den Strich der gegebenen Zahl, nach Art einer Quotientenziffer in der Division.

Das so gefundene Quadrat subtrahire man von der genannten Classe, und dem Reste füge man die zwei Ziffern der nächst folgenden Classe als Dividend bei.

Die vorher erwähnte Wurzel verdoppelt, mache man zum Divisor, und suche wie oft er in dem besagten Dividend enthalten ist, und setze die Quotientenziffer sowohl in die Stelle der Quotienten als zur Rechten neben den Divisor.

Multiplicire den ganzen so vermehrten Divisor durch die neue Quotientenziffer, subtrahire das Product vom besagten Dividend, und schreibe die nächste Classe der gegebenen Zahl neben den Rest als neuen Dividend herunter.

Man wiederhole das ganze Verfahren aufs Neue, suche nämlich einen andern neuen Divisor, indem alle Ziffern der bis jetzt gefundenen Wurzel verdoppelt werden; hieraus und aus dem zu letzt erhaltenen Dividend suche man die nächste Ziffer der Wurzel, wie zuvor, und so durch alle Classen, bis zu der letzten *).

Anmerkung. Die beste Art die Wurzel zu verdoppeln, um neue Divisoren zu erhalten, ist, daß man die neue Ziffer immer dem Divisor so beifügt, wie aus den folgenden Beispielen zu sehen ist. — Uebrigens kann, nachdem die Ziffern der gegebenen Zahl ganz erschöpft sind, die Rechnung in Decimalstellen nach Belieben forgeführt werden, wenn eine Anzahl Classen von Nullen beigefügt wird.

---

*) Der Grund, warum die Ziffern des Dividend in Classen oder Abtheilungen, jede von zwei Stellen, gesondert werden, liegt darin, daß das Quadrat einer einzifferigen Zahl nicht mehr als zwei Stellen haben kann; das Quadrat einer Zahl von zwei Ziffern, nicht mehr als vier Stellen, u. s. f. So daß daher so viel Ziffern in der Wurzel enthalten sind, als die gegebene Zahl solche Classen oder Abtheilungen enthält.

Der Grund der verschiedenen Wendungen bei der Operation erhellt aus der algebraischen Form des Quadrats einer Zahl von zwei, drei oder mehrern Gliedern. So ist $35^2 = 30^2 + 2.30.5 + 5^2$, oder allgemein $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + (2a+b)b$, das Quadrat von 2 Gliedern; also a der erste Divisor; der neue Divisor ist $2a+b$, oder das doppelte erste Glied, vermehrt um das

Beispiele.

1. Die Quadratwurzel von 17,3056 zu finden.

17,	30	56	4,16	die Wurzel, in welcher die Zahl von Decimalstellen dieselbe ist als die Anzahl der Decimalclassen, in welche die gegebene Zahl getheilt war.
16				
81	130			
1	81			
826	4956			
	4956			
	....			

2. Man suche die Quadratwurzel von 2 auf sechs Decimalstellen.

2	1,414213 Wurzel.
1	
24	100
4	96
281	400
1	281
2824	11900
4	11296
28282	60400
2	56564
282841	383600
1	282841
2828423	10075900
	8485269
	1590631

3. Man suche die Quadratwurzel von $\frac{5}{12}$.

$\frac{5}{12} = 0{,}41666666$ u. s. w.

0,	41	66	66	0,64549, u. s. w.
36				
124	566			
4	496			
1285	7066			
5	6425			
12904	64166			
4	51616			
129089	1255066			
9	1161801			
	93265			

zweite. Hieraus ergiebt sich also die Methode die Wurzel auszuziehen, welche die gegebene Regel andeutet.

Anmerkung. Besitzt man eine Tabelle, welche die Quadratwurzeln der ganzen Zahlen bis 1000 enthält, so kann man ein solches Exempel, wie das vorhergehende, leichter durch eine kleine Reduction auflösen. Z. B. $\sqrt{\frac{5}{12}} = \sqrt{(\frac{5}{12} \cdot \frac{12}{12})} = \sqrt{\frac{60}{144}}$ $= \frac{1}{12}\sqrt{60} = \frac{7{,}459667}{12} = 0{,}645497$, u. s. w.

Cubikwurzeln und Wurzeln höherer Grade.

Die Regeln, welche in Lehrbüchern der Arithmetik für die Extraction der Cubik- und höhern Wurzeln gewöhnlich gegeben werden, sind in der Ausübung sehr mühsam; daher ist es rathsam, sie mittels Annäherungsregeln oder mittels Logarithmen zu bestimmen. Das Letztere ist im Allgemeinen die beste Methode. Wir wollen hier blos Dr. Hutton's Annäherungsregel für die Cubikwurzel anzeigen, welche bisweilen vortheilhaft ist, wenn keine Logarithmen-Tafeln zur Hand sind.

Regel. Nach Versuchen nehme man den nächsten rationalen Cubus von der gegebenen Zahl, sey er größer oder kleiner, und nenne ihn den angenommenen Cubus. Dann sage man nach der Regeldetrie, wie sich die Summe der gegebenen Zahl und des Doppelten des angenomenen Cubus zur Summe des angenommenen Cubus und des Doppelten der gegebenen Zahl verhält, nahe so verhält sich die Wurzel des angenommenen Cubus zu der verlangten Wurzel. Oder: wie sich die erste Summe zur Differenz des gegebenen und angenommenen Cubus verhält, nahe so verhält sich die angenommene Wurzel zur Differenz der Wurzeln *).

Indem man auf gleiche Weise den Cubus der zuletzt gefundenen Wurzel als einen neuen angenommenen Cubus betrachtet, wird eine andre Wurzel noch näher erhalten; und so nach Belieben fort, indem wir stets den Cubus der letzt gefundenen Wurzel als den angenommenen Cubus betrachten.

---

*) Diese in unsern Lehrbüchern, so weit ich sie kenne, nicht vorkommenden Regeln lassen sich leicht ableiten. Heißt nämlich die gegebene Zahl a^3, der angenommene Cubus b^3, so behauptet die erste: $a^3 + 2b^3 : b^3 + 2a^3 = b : a$ nahe; dies ist aber so viel als: $a^4 + 2ab^3 = b^4 + 2a^3b$; oder $a^4 - b^4 = 2ab\,(a^2 - b^2)$; d. i. wenn man durch $a^2 - b^2$ dividirt, $a^2 + b^2 = 2ab$; oder endlich $a^2 - 2ab + b^2 = 0$; $a - b = 0$; $a = b$. Da nun angenommen wird, daß nahe $a = b$ sey, so ist die Richtigkeit der Näherungsregel erwiesen.

Der andere Ausdruck der Regel stellt auf: $a^3 + 2b^3 : a^3 - b^3 = b : a - b$, d. i. $a^4 + 2ab^3 - a^3b - 2b^4 = a^3b - b^4$; oder nach gehörigen Reductionen $a^4 - b^4 = 2ab(a^2 - b^2)$ u. s. w. wie vorher.

(D.)

Beispiel.

Die Cubikwurzel von 21035,8 zu finden.

Hier finden wir bald, daß die Wurzel zwischen 20 und 30 liegt, und dann zwischen 27 und 28. Nehmen wir 27, so ist der Cubus davon 19683, welches also der angenommene Cubus ist.

Dann 19683 21035,8
2 2
39366 42071,6
21035,8 19683
also 60401,8 : 61754,6 = 27 : 27,6047
27
4322822
1235092
60401,8 / 1667374,2 (27,6047 die Wurzel näherungsweise.
459388
36525 Nimmt man wieder 27,6 als
284 die Annäherungswurzel und
42 verfährt wie zuvor, so wird man die Wurzel 27,60491 finden.

10. Abschnitt. Proportion.

Zwei Größen können aus zwei verschiedenen Gesichtspuncten mit einander verglichen werden; nämlich man kann untersuchen, wie groß der Ueberschuß der einen über die andere, oder wie oft die eine in der andern enthalten ist. Das Resultat dieser Vergleichung erhält man im ersten Falle durch Subtraction, im zweiten durch Division. Das Verhältniß zweier Zahlen wird durch den Quotienten angezeigt, welchen man erhält, indem die eine durch die andere dividirt wird. So kann man 3 als das Verhältniß von 12 zu 4 betrachten; weil $\frac{12}{4}$ oder 3 der Quotient aus den Zahlen 12 und 4 ist. Die erste der beiden Zahlen, welche ein Verhältniß bestimmen, heißt das Vorderglied, die zweite das Hinterglied.

Der Unterschied zweier Zahlen bleibt ungeändert, wenn jede um eine gleiche Zahl vermehrt oder vermindert wird. So $12-5=(12+2)-(5+2)=14-7=(12-2)-(5-2)=10-3$.

Eben so bleibt das Verhältniß ungeändert, wenn beide Glieder durch eine gleiche Zahl multiplicirt oder dividirt werden.

Also $\frac{14}{4}=(\frac{14}{4}\cdot\frac{3}{3}=)\frac{42}{12}=(\frac{14}{4}:\frac{2}{2}=)\frac{7}{2}$.

Da Irrationalzahlen mittels ihrer Annäherungswerthe arithmetische Berechnungen zulassen, so kann man von ihrem Verhältnisse eine hinlänglich genaue Vorstellung erhalten: als $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{1{,}73205}{1{,}41421}$. Dieses Verhältniß ist oft commensurabel sogar in Rücksicht auf die Irrationalzahlen: als

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{(12:3)}}{\sqrt{(3:3)}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{1}} = \frac{2}{1}.$$

Gleichheit der Unterschiede, oder Aequidifferenz *), ist ein Ausdruck dessen man sich bedient um anzuzeigen, daß der Unterschied zwischen zwei Zahlen derselbe ist als der Unterschied zwischen zwei andern. So z. B. $12-9=8-5=7-4$.

Gleichheit der Verhältnisse, oder Proportion **), wird auf ähnliche Weise gebraucht, zu bezeichnen, daß das Verhältniß zwischen zwei Zahlen dasselbe ist, als zwischen zwei andern. So haben 20 und 10, 14 und 7 zum Maaß ***) des Verhältnisses 2; wir haben daher zwischen 20 und 10, 14 und 7 eine Proportion, welche so ausgedrückt wird: $20:10=14:7$, und daher sagt man: 20 verhält sich zu 10 wie 14 zu 7. Dieselbe Proportion kann auch so dargestellt werden: $\frac{20}{10}=\frac{14}{7}$. Durch welche Bezeichnung sie auch dargestellt seyn mag, so ist es doch am besten, sie wie oben zu lesen oder anzusagen, weil es wahr ist, daß sich in allen Fällen, wenn zwei Brüche gleich sind, der Zähler des einen von ihnen zu seinem Nenner verhält, wie der Zähler des andern zu seinem Nenner.

In jeder Proportion, z. B. $20:10=14:7$, werden das zweite und dritte Glied die mittlern genannt, das erste und vierte die äußern. Wenn die beiden mittlern Glieder gleich sind, so sagt man die Proportion ist stetig. Also $3:6=6:12$ ist eine stetige Proportion. Diese wird gewöhnlich so ausgedrückt $\div 3:6:12$, und das zweite Glied nennt man die mittlere Proportionalzahl.

In dem Falle der Geichheit der Unterschiede, z. B. $12-9=7-4$, ist die Summe der äußern Glieder (12 und 4) gleich der Summe der mittlern (9 und 7). Eben so in einer Proportion, z. B. $20:10=14:7$, ist das Product der äußern (20×7) gleich dem Producte der mittlern Glieder (10×14).

---

*) Bei uns üblicher: arithmetische Proportion. (D.)
**) Auch geometrische Proportion. (D.)
***) Bei uns gewöhnlicher: Exponenten oder Quotienten des Verhältnisses. (D.)

Das Umgekehrte findet gleichfalls statt, daß, wenn $20 \times 7 = 10 \times 14$, dann $20 : 10 = 14 : 7$.

Daher 1. Wenn 4 Zahlen, 5, 3, 15, 9, von der Beschaffenheit sind, daß die Producte 5×9 und 3×15 gleich gefunden werden, so können wir die Gleichheit ihrer Verhältnisse herleiten, oder die Proportion $\frac{5}{3} = \frac{15}{9}$, oder $5 : 3 = 15 : 9$, so daß also eine Proportion stets durch die Factoren zweier gleichen Producte bestimmt werden kann.

2. Wenn die mittlern Glieder gleich sind, so wird ihr Product ein Quadrat; daher ist die mittlere Proportionalzahl zwischen zwei Zahlen gleich dem Quadrate aus ihrem Producte. So: zwischen 4 und 9 ist die mittlere Proportionalzahl $\sqrt{(4 \times 9)} = 6$.

3. Wenn eine Proportion ein unbekanntes Glied enthält, z. B. $5 : 3 = 15 :$ einer unbekannten Größe; so muß die unbekannte Größe 5 mal genommen, gleich seyn 3×15 oder 45. Diese Größe selbst ist gleich $45 : 15$ oder 9. Allgemein: eines der äußern Glieder ist gleich dem Producte der mittlern, dividirt durch das andere äußere; und eins der mittlern ist gleich dem Producte der äußern, dividirt durch das andere mittlere.

4. Wir können, ohne der Richtigkeit einer Proportion zu nahe zu treten, die verschiedenen Bedingungen angeben, unter welchen, nach allen möglichen Versetzungen, eine Proportion entstehen kann, so lange das Product der übrigen äußern Glieder gleich dem der mittlern ist. Also z. B. wenn $5 : 3 = 15 : 9$, welches giebt $5 \times 9 = 3 \times 15$, können wir

I. die Stellen der mittlern vertauschen, ohne die der äußern zu verändern, oder die Stellen der äußern vertauschen, ohne die der mittlern zu verändern: und dieses bezeichnet man durch *alternando*.

So, $5 : 3 = 15 : 9$
wird $5 : 15 = 3 : 9$
oder $9 : 3 = 15 : 5$
oder $9 : 15 = 3 : 5$

II. Setzt man die äußern Glieder in die Stellen der mittlern, so heißt dies *invertendo*.

$3 : 5 = 9 : 15$

III. Multiplicirt oder dividirt man die beiden Vorderglieder oder die beiden Hinterglieder durch eine und dieselbe Zahl.

Hieraus ergiebt sich in Beziehung auf die Proportionen, daß die Summe oder der Unterschied der Vorderglieder sich zu der der Hinterglieder verhält, wie das eine Vorderglied zu seinem Hintergliede.

Ebenso: daß die Summe der Vorderglieder zu ihrem Unterschiede sich verhält, wie die Summe der Hinterglieder zu ihrem Unterschiede

$$\frac{15+5}{9+3}=\tfrac{5}{3}=\tfrac{15}{9} \text{ und } \frac{15+5}{9+3}=\frac{15-5}{9-3}.$$

Wenn daher eine Reihe gleicher Verhältnisse dargestellt ist durch $\frac{6}{3}=\frac{10}{5}=\frac{14}{7}=\frac{30}{15}$, so haben wir $\frac{6+10+14+30}{3+5+7+15}=$ $\frac{60}{30}=\frac{6}{3}=\frac{10}{5}=$ u. s. w. Daher verhält sich in einer Reihe gleicher Verhältnisse, die Summe der Vorderglieder zur Summe der Hinterglieder wie ein einziges Vorderglied zu seinem Hintergliede.

Wenn ferner zwei Proportionen, wie $30:15=6:3$, und $2:3=4:6$ gegeben sind, und man multiplicirt sie Glied für Glied, so bekommt man $30\times2:15\times3=6\times4:3\times6$, welches offenbar wieder eine Proportion ist, weil $30\times2\times3\times6=15\times3\times6\times4=1080$.

Diesem nach stehen auch Potenzen von Größen einer Proportion in Proportion; und umgekehrt die Wurzeln.

$$\left.\begin{matrix}2:3=6:9\\2:3=6:9\\2:3=6:9\end{matrix}\right\} \text{ geben } \left\{\begin{matrix}2^2:3^2=6^2:9^2\\ \\2^3:3^3=6^3:9^3\end{matrix}\right.$$

Regeldetrie.

Wenn die Elemente eines Problems eine Proportion bilden, in welcher die unbekannte Größe das letzte Glied ist, so kann es durch eine einfache Rechnung bestimmt werden, und man sagt dann, dies Problem gehöre in die goldne Regel, oder Regel de Tri. Das Verfahren gründet sich auf die vorhergehenden Sätze von der Proportion.

Von den drei gegebenen Zahlen, nennt man zwei die Bedingungsglieder, das dritte das Frageglied. Wenn nun das Frageglied größer oder kleiner als das andere Glied derselben Art ist, und die Frage verlangt das gesuchte Glied respective größer oder kleiner als das andere, so gehört die Frage der directen Regeldetrie zu; im andern Falle gehört sie in die umgekehrte Regeldetrie.

Für die directe Regeldetrie haben wir diese

Regel. Man schreibe die drei gegebenen Glieder in folgender Ordnung: man setze das Frageglied in die dritte Stelle und das andere von derselben Art in die erste, dann erhält das noch übrige Glied, welches mit dem gesuchten vierten gleichartig ist, die zweite Stelle. Sind die Zahlen so geordnet, d. h.

ist der Ansatz gemacht, so bringt man das erste und dritte Glied unter gleiche Benennung (auf dieselbe Einheit); und wenn das zweite Glied zusammengesetzt ist, wird es auf die niedrigste Benennung zurückgeführt. Nun multiplicire das zweite und dritte Glied ineinander, und dividire das Product durch das erste, und der Quotient wird die Antwort in derselben Einheit geben, auf welche das zweite Glied reducirt worden ist.

Wenn das zweite Glied eine zusammengesetzte Einheit, und das dritte Glied eine complexe Zahl ist, so ist es im Allgemeinen besser, das zweite Glied, ohne eine vorhergegangene Reduction, durch die des dritten, wie in der zusammengesetzten Multiplication, zu multipliciren, und hierauf das zusammengesetzte Product durch das erste Glied, oder durch seine Factoren, zu dividiren. (Hier sind in einem gegebenen Verhältnisse das erste und dritte Glied gleichartig, und das zweite und vierte ebenfalls.)

Für die umgekehrte Regeldetrie.

Man mache den Ansatz und verwandle die Glieder wie in der directen Regeldetrie; dann multiplicire man das erste und zweite Glied ineinander und theile das Product durch das dritte, der Quotient wird die verlangte Antwort seyn.

Beispiele für die directe Regeldetrie.

1. Wenn 3 Ellen Zeug 19 Groschen kosten, wie theuer kommen 126 Ellen?

Ell. gr. Ell.
3 : 19 = 126 : ?

19
1134
126
24
3/2394(798|33 Rthl.
21 72
29 78
27 72
24 6 gr.
24
..

Antw.: 33 Rthlr. 6 gr.

2. Wie viel Ellen Zeug erhält man für 33 Rthlr. 6 gr., wenn man für 3 Ellen 19 gr. zahlt?

gr. Ell. Rthlr. gr.
19 : 3 = 33 6 : ?

24
798
3 Ell.
19/2394(126 Antw.
19
49
38
114
114
...

3. Wenn 21 Pfund Waare 25 Rthlr. 16 gr. kosten, was kosten alsdann 1 Centner 50 Pfund?

Pf. Rthlr. gr. Cent. Pf.
21 : 25 16 = 1 50 : ?
3.7 × 4 110
102 16 160 = 4.4.10
× 4
410 16
× 10
3) 4106 16
7) 1368 21 4
Rthl. 195 13 gr. 4 pf. Antw.

4. Ein Tuchhändler verkauft die Elle Tuch für 5 Rthlr. 12 gr. und gewinnt daran 10 Procent, wie viel würde er gewinnen, wenn er die Elle für 5 Rthlr. 16 gr. verkaufte?

Rthlr. gr. Rthlr. gr.
5 12 : 110 = 5 16 : ?
24 24
132 136
× 110
132 { 11, 4, 3, } 11) 14960
4) 1360
3) 340
Betrag 113 1/3
Abzug 100
Gewinn vom Hundert 13 1/3 Rthlr.

5. Was betragen die einfachen Interessen von 5650 Rthl. auf 5 Jahr zu 4 Procent?

Rthlr. Rthlr. Rthlr.
100 : 4 = 5650 : ?
4
100) 22600
226 Rthlr.

Interessen für 1 Jahr 226 Rthl.

J. Rthlr. J.
dann 1 : 226 = 5 : ?
5
Antw.: 1130 Rthlr.

6. Wenn 100 Arbeiter eine Arbeit in 12 Tagen vollenden können, wie viel Menschen müßten daran arbeiten, wenn sie in 3 Tagen beendet werden sollte?

Dieses Beispiel gehört offenbar in die umgekehrte Regeldetrie.

Tg. Arb. Tg.
Daher 12 : 100 = 3 : ?
12
3) 1200
Antw. 400 Arbeiter.

Man hat auch eine bestimmte Regel zur Auflösung der Aufgaben, die auf zusammengesetzte Proportion führen; aber sie können im Allgemeinen mit größrer Leichtigkeit mittels getrennter Sätze gelöst werden. Z. B.

7. Wenn Jemand in 10 Tagen, den Tag zu 10 Stunden, einen Weg von 80 Meilen zurücklegt, in wie viel Tagen, jeden zu 16 Stunden, wird er 160 Meilen zurücklegen?

Erstens, wenn die Tage von derselben Länge wären, so erhielt man die gerade Proportion, wie

Meil. Tg. Meil.
80 : 10 = 160 : 20 Tagen.

Aber dieses würden Tage seyn, jeden zu 12 Stunden, statt von 16, deren weniger erforderlich sind. Daher nach der umgekehrten Proportion, nämlich

St. Tg.
$12 : 20 = 16 : \frac{12 \times 20}{16} =$

15 Tage.

8. Wenn eine Familie von 9 Personen in 8 Monaten 480 Rthlr. bedarf, wie viel wird eine Familie (welche auf dieselbe Weise lebt) von 24 Personen in 16 Monaten nöthig haben?

Pers. Rthlr. Pers.
Erstens 9 : 480 = 24 : $\frac{480 \times 24}{9}$ = 1280 Rthlr.

Aber dieses würde blos der Bedarf für 8 Monate seyn.

Daher wiederum

M. Rthlr. M. Rthlr.
wie 8 : 1280 = 16 : 2560

die Ausgabe der 24 Personen für 16 Monate.

Anmerkung. Die Regeldetrie findet ihre Anwendung bei der Interessen=, Disconto=, Gesellschafts=, Wechsel=Rechnung u. s. w.

Eigenschaften der Zahlen.

Um diese dem Anfänger klar zu machen, wollen wir hier einige Erklärungen zusammen stellen.

1. Eine Einheit bezeichnet eine Sache an sich betrachtet, ohne Rücksicht auf die Theile, aus welchen sie zusammengesetzt ist.

2. Ein Ganzes besteht entweder aus einer Einheit oder einer Menge von Einheiten; und ein Bruch aus einem oder mehrern Theilen der Einheit.

3. Ein Vielfaches einer Zahl ist, das dieselbe eine Anzahl Male genau enthält.

4. Eine Zahl ist das Maß einer andern, wenn sie dieselbe theilt, ohne einen Rest zu lassen.

5. Und wenn eine Zahl zwei oder mehrere Zahlen genau theilt, wird sie dann ihr gemeinschaftliches Maß genannt.

6. Eine Zahl heißt gerade, wenn sie halbirt, oder in zwei gleiche Theile getheilt werden kann.

7. Eine Zahl, welche nicht halbirt werdenkann, oder welche von einer geraden um Eins verschieden ist, heißt ungerade.

8. Eine Zahl, welche nur durch 1 oder die Einheit gemessen werden kann, heißt eine Primzahl.

9. Eine Zahl ist prim zu einer andern, wenn die Einheit die einzige Zahl ist, durch welche sie beide gemessen werden können.

10. Eine Zahl heißt zusammengesetzt, wenn sie durch eine größre Zahl als die Einheit gemessen werden kann.

11. Eine Zahl heißt vollkommen, wenn sie gleich ist der Summe aller ihrer aliquoten Theile: z. B. $6 = \frac{6}{2} + \frac{6}{3} + \frac{6}{6}$.

Lehrsätze. 1. Die Summe, oder der Unterschied zweier geraden Zahlen, ist wieder eine gerade Zahl.

2. Die Summe oder Differenz zweier ungeraden Zahlen ist gerade; aber die Summe von drei ungeraden Zahlen ist ungerade.

3. Die Summe einer geraden Anzahl ungerader Zahlen ist gerade, aber die Summe einer ungeraden Anzahl ungerader Zahlen ist ungerade.

4. Die Summe oder Differenz einer geraden und einer ungeraden Zahl ist ungerade.

5. Das Product aus einer geraden und einer ungeraden Zahl, oder aus zwei geraden Zahlen ist gerade.

6. Eine ungerade Zahl kann durch eine gerade ohne Rest nicht getheilt werden.

7. Eine Potenz einer geraden Zahl ist gerade.

8. Das Product aus zwei ungeraden Zahlen ist eine ungerade Zahl.

9. Das Product einer Anzahl ungerader Zahlen ist ungerade, und jede Potenz einer ungeraden Zahl ist ungerade.

10. Wenn eine ungerade Zahl eine gerade Zahl theilt, so wird sie auch ihre Hälfte theilen.

11. Wenn eine Zahl aus einigen Theilen besteht, und jeder von ihnen einen gemeinschaftlichen Divisor d hat, so wird auch die ganze Zahl zusammengenommen, durch d theilbar seyn.

12. Weder die Summe, noch die Differenz zweier Brüche, welche auf ihre niedrigsten Benennungen gebracht sind, und von welchen der Nenner des einen einen Factor enthält, der dem andern nicht gemein ist, kann einer ganzen Zahl gleich seyn.

13. Wenn eine Quadratzahl durch eine Quadratzahl entweder multiplicirt oder dividirt wird, so ist das Product oder der Quotient ein Quadrat; und umgekehrt, wenn eine Quadratzahl durch eine Zahl, die kein Quadrat ist, entweder multiplicirt oder dividirt wird, so ist das Product oder der Quotient kein Quadrat.

14. Das Product, welches aus zwei verschiedenen Primzahlen entsteht, kann keine Quadratzahl seyn.

15. Das Product aus zwei verschiedenen Zahlen, die prim zu einander sind, kann kein Quadrat seyn, wenn nicht jede von ihnen eine Quadratzahl ist.

16. Die Quadratwurzel einer ganzen Zahl, die kein vollständiges Quadrat ist, kann weder durch eine ganze Zahl, noch durch einen rationalen Bruch ausgedrückt werden.

17. Die Cubikwurzel einer ganzen Zahl, die kein vollständiger Cubus ist, kann weder durch eine ganze Zahl, noch durch einen rationalen Bruch ausgedrückt werden.

18. Jede Primzahl größer als 2 ist von einer dieser Formen: $4n+1$, oder $4n-1$.

19. Jede Primzahl größer als 3 ist von einer der Formen $6n+1$, oder $6n-1$.

20. Keine algebraische Formel kann Primzahlen allein enthalten.

21. Die Anzahl der Primzahlen ist unbestimmt.

22. Die ersten zwanzig Primzahlen sind: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61 und 67.

23. Eine Quadratzahl kann sich nie mit einer ungeraden Anzahl Nullen endigen.

24. Wenn sich eine Quadratzahl mit einer 4 endigt, so wird die vorletzte Ziffer (rechter Hand) eine gerade Zahl seyn.

25. Wenn eine Quadratzahl mit 5 schließt, so wird sie mit 25 schließen.

26. Wenn eine Quadratzahl mit einer ungeraden Ziffer endigt, so wird die vorletzte Ziffer gerade seyn; und wenn sie mit einer geraden, die 4 ausgeschlossen, endigt, wird die vorletzte Ziffer ungerade seyn.

27. Keine Quadratzahl kann mit zwei gleichen Ziffern schließen, ausgenommen mit zwei Nullen oder zwei Vieren.

28. Keine Zahl, deren letzte Ziffer 2, 3, 7 oder 8 ist, ist eine Quadratzahl.

29. Wenn eine Cubikzahl durch 7 theilbar ist, so ist sie auch durch den Cubus von 7 theilbar.

30. Der Unterschied zwischen einem vollständigen Cubus und seiner Wurzel ist stets durch 6 theilbar.

31. Weder die Summe noch die Differenz zweier Cubikzahlen kann eine Cubikzahl sein.

32. Eine Cubikzahl kann mit einer jeden der natürlichen Zahlen, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 oder 0 endigen.

33. Wenn eine Reihe von Zahlen, die mit 1 anfängt, in geometrischer Proportion fortgeht, so werden die 3te, 5te, 7te,

u. s. w. Zahl Quadrate; die 4te, 7te, 10te u. s. w. Cuben; und die 7te, der Reihe, beides ein Quadrat und ein Cubus.

34. Alle Potenzen einer Zahl die mit 5 oder 6 endigt, endigen mit 5 oder 6, beziehungsweise.

35. Eine Potenz, n, der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 u. s. w. hat so viel Ordnungen von Differenzen, als Einheiten in dem allgemeinen Exponenten von allen diesen Zahlen sind; und die letzte dieser Differenzen ist eine constante Größe, und gleich dem continuirlichen Producte $1\times2\times3\times4\times\ldots\times n$, fortgeführt bis der letzte Factor, oder die Anzahl der Factoren n, der Exponent der Potenzen ist. Also, die 1sten Potenzen 1, 2, 3, 4, 5, u. s. w. haben nur eine Ordnung von Differenzen 1 1 1 1 u. s. w. und diese Differenz ist 1.

Die 2ten Potenzen 1, 4, 9, 16, 25 haben zwei Ordnungen von Differenzen 3 5 7 9

2 2 2

von welchen die letzte constant ist, $2=1\times2$.

Die 3ten Potenzen 1, 8, 27, 64, 125, u. s. w. haben drei Ordnungen von Differenzen 7 19 37 61

12 18 24

6 6

von denen die letzte ist $6=1\times2\times3$.

Eben so die 4ten oder letzten Differenzen der 4ten Potenzen, sind jede $=24=1\times2\times3\times4$; und die 5ten oder letzten Differenzen der 5ten Potenzen, sind jede $125=1\times2\times3\times4\times5$.

36. Wenn eine Einheit in zwei ungleiche Theile getheilt ist, so ist die Summe von einem dieser Theile und dem Quadrate des andern, gleich der Summe des andern Theils addirt zu dem Quadrate von diesem. Daher von den zwei Theilen $\frac{1}{5}$ und $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{5}+(\frac{4}{5})^2=\frac{4}{5}+(\frac{1}{5})^2=\frac{21}{25}$; eben so von den Theilen $\frac{2}{5}$ und $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{5}+(\frac{3}{5})^2=\frac{3}{5}+(\frac{2}{5})^2=\frac{19}{25}$.

Was die Beweise dieser und einer Menge anderer Eigenschaften der Zahlen betrifft, verweise ich die Leser, welche von den Untersuchungen dieses interessanten Gegenstandes mehr zu wissen verlangen, auf folgende Schriften: Legendre „Sur la Théorie des Nombres," „Disquisitiones Arithmeticae," von Gauß, oder „Barlow's Elementary Investigation of the Theory of Numbers."

Was nun die höchst interessanten Eigenschaften der periodischen Decimalbrüche und ihre Verbindung mit Primzahlen anlangt, so sind zu empfehlen die Werke des verstorbenen Mr. H. Goodwyn, betittelt „A first Centenary," und

„A Table of the Circles arising from the Division of a Unit by all the Integers from 1 to 1024.“

Eine nützliche, in die Zahlenrechnung gehörige Aufgabe ist die, einen gegebenen Bruch, oder ein gegebenes Verhältniß, auf die kleinsten Zahlen zurückzuführen, und so nahe als möglich denselben Werth beizubehalten.

Regel 1. Es seyen A, B, die zwei Zahlen. Man theile beide Zahlen durch die erstere A, und man erhält zu Quotienten: A für 1 und eine Zahl nebst einem Bruche für B, man nenne diesen Quotienten C. Setze diese in die erste Stelle.

Dann subtrahire man die Bruchtheile von dem Nenner, und was übrig bleibt setze man hinter C + 1 mit einem negativen Zeichen. Dann werfe man den Nenner weg und setze 1 und die zuletzt erhaltene Zahl in die zweite Stelle. Dies ist die Grundlage alles Uebrigen.

Wenn die Bruchtheile in beiden beinahe gleich sind, so addire man diese zwei Stellen zusammen; wenn nicht, multiplicire man die kleinern durch eine solche Zahl, welche die Brüche, in beiden, fast gleich macht, und addire sie dann. Dieser Multiplicator wird gefunden, indem man den größern Bruch durch den kleinern dividirt, und den Quotienten so weit nimmt, als er in ganzen Zahlen reicht. Wenn man die Sätze zusammen addirt, muß man die Brüche von einander abziehen, weil sie entgegengesetzte Vorzeichen haben.*)

Die Operation wird auf dieselbe Weise fortgeführt, indem man den letzten Satz, oder sein Vielfaches zu einem vorhergehenden Satze addirt, nämlich zu dem, welcher den kleinsten Bruch hat.

Anmerkung. Die so gefundenen Verhältnisse werden abwechselnd größer und kleiner als das einzig wahre, welchem sie sich stets nähern. Und dasjenige ist in kleinen Zahlen das nächste, welches die größern Zahlen am genügendsten vertritt; der Ueberschuß oder das Deficit eines jeden wird durch die Rechnung sichtbar.

---

*) Wenn diese Anweisung vielleicht etwas dunkel scheinen sollte, so wird sie klarer werden, wenn man nach ihr das nachfolgende Beispiel durchgeht.

(D.)

1. Beispiel.

Das Verhältniß von 10000 zu 7854, in kleinern Zahlen zu finden.

	A	B	
1	1	$0 + 0{,}7854$	
2	1	$1 - 0{,}2146$,	erstes Verhältniß.
	$0{,}2146)0{,}7854(3$		
3	3	$3 - 0{,}6438$	
4	4	$3 + 0{,}1416$,	2tes Verhältniß.
5	5	$4 - 0{,}0730$,	3tes Verhältuiß.
6	9	$7 + 0{,}0686$,	4tes Verhältniß.
7	14	$11 - 0{,}0044$,	5tes Verhältniß.
	$0{,}0044)0{,}0686(15$		
8	210	$165 - 0{,}0660$	
9	219	$172 + 0{,}0026$,	6tes Verhältniß.
10	233	$183 - 0{,}0018$,	7tes Verhältniß.
11	452	$355 + 0{,}0008$,	8tes Verhältniß.
	$0{,}0008)0{,}0018(2$		
12	904	$710 + 0{,}0016$	
13	1137	$893 - 0{,}0002$,	9tes Verhältniß.
	$0{,}0002)0{,}0008(4$		
14	4548	$3572 - 0{,}0008$	
15	5000	$3927 \pm 0{,}0000$,	10tes Verhältniß.

Erläuterung.

Das Verhältniß von 10000 zu 7854 ist dasselbe wie 1 zu $0 + 0{,}7854$ oder 1 zu $1 - 0{,}2146$; hier ist 1 zu 1 das erste Verhältniß. Aber 2146 ist kleiner als 7854, daher dividire man die letztere Zahl durch die erstere, so kommt 3 als Quotient; dann multiplicire man 1 und $1 - 0{,}2146$ durch 3, so kommt 3 und $3 - 0{,}6438$ wie in dem dritten Satze. Diesen 3ten Ansatz addire man zu dem ersten, so kommt 4 und 3 für die Ganzen, und indem die Brüche subtrahirt werden bleibt 0,1416. So ist der 4te Satz 4 und $3 + 0{,}1416$, und die Ganzen 4 und 3 geben das zweite Verhältniß. Auf diese Art fährt man fort bis zu Ende; und die verschiedenen annähernden Verhältnisse sind $\frac{1}{1}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{9}{7}$, $\frac{14}{11}$, $\frac{219}{172}$, $\frac{233}{183}$, $\frac{452}{355}$, $\frac{1137}{893}$, und $\frac{5000}{3927}$. Hier ist $\frac{14}{11}$ das nächste in kleineren Zahlen, der Fehler beträgt nur $\frac{44}{100000}$.

2. Beispiel.

Das Verhältniß von 268,8 zu 282 in den kleinsten Zahlen zu finden.

$$2688)2820(1\tfrac{132}{2688} = 2 - \tfrac{2556}{2688}.$$

$$\frac{2688}{132}$$

1	1	1 +	0132, erstes Verhältniß.
2	1	2 —	2556
		132)2556(19	
3	19	19 +	2508
4	20	21 —	48, 2tes Verhältniß.
		48)132(2	
5	40	42 —	96
6	41	43 +	36, 3tes Verhältniß.
7	61	64 —	12, 4tes Verhältniß.
		12)36(3	
8	183	192 —	36
9	224	235	, 5tes Verhältniß.

Hier sind die verschiedenen Verhältnisse $\frac{1}{1}$, $\frac{20}{21}$, $\frac{41}{43}$, $\frac{61}{64}$, $\frac{224}{235}$, und Deficit oder Ueberschuß ist leicht erkennbar; z. B. ist $\frac{41}{43}$ von dem wahren Werthe nur um $\frac{36}{2688}$ Theile verschieden; und $\frac{20}{21}$, um 48 solcher Theile.

Regel 2. Man theile die größere Zahl durch die kleinere und den Divisor durch den Rest, und den letzten Divisor durch den letzten Rest, und so fort bis 0 bleibt. Dann theile man 1 durch den ersten Quotienten, dies giebt das erste Verhältniß.

Die Glieder des ersten Verhältnisses multiplicire man durch den zweiten Quotienten, addire 1 zu dem Nenner, so erhält man das zweite Verhältniß.

Allgemein: man multiplicire die Glieder eines jeden Verhältnisses durch den nächsten Quotienten, addire die Glieder des vorhergehenden Verhältnisses hinzu, so erhält man das nächst folgende Verhältniß.

3. Beispiel.

Die Zahlen mögen seyn 10000 und 31416, oder das Verhältniß $\frac{10000}{31416}$.

```
10000 ) 31416 ( 3
  30000
  -----
   1416 ) 10000 ( 7
          9912
          ----
            88 ( 1416 ( 16
                 88
                 --
                 536
                 528
                 ---
                   8 ) 88 ( 11
                       88
                       --
                        0
```

Dann ist $\frac{1}{3}$ = 1ten oder kleinsten Verhältnisse.

$\frac{1 \times 7}{3 \times 7 + 1}$ oder $\frac{7}{22}$ = 2ten Verhältnisse.

$\frac{7 \times 16 + 1}{22 \times 16 + 3}$ oder $\frac{113}{355}$ = 3ten Verhältnisse.

$\frac{113 \times 11 + 7}{355 \times 11 + 22}$ oder $\frac{1250}{3927}$ = 4ten Verhältnisse.

4. Beispiel.

Man verlangt das Verhältniß von 268,8 zu 282.

```
2688 ) 2820 ( 1
  2688
  ----
   132 ) 2688 ( 20
         264
         ---
          48 ) 132 ( 2
               96
               --
               36 ) 48 ( 1
                    36
                    --
                    12 ) 36 ( 3
                         36
                         --
                          0
```

Dann ist $\frac{1}{1}$ = dem ersten Verhältnisse.

$\frac{1 \times 20}{1 \times 20 + 1}$ oder $\frac{20}{21}$ = dem 2ten Verhältnisse.

$\frac{20 \times 2 + 1}{21 \times 2 + 1}$ oder $\frac{41}{43}$ = dem 3ten Verhältnisse.

$\frac{41 \times 1 + 20}{43 \times 1 + 21}$ oder $\frac{61}{64}$ = dem 4ten Verhältnisse.

$\frac{61 \times 3 + 41}{64 \times 3 + 43}$ oder $\frac{224}{235}$ = dem 5ten Verhältnisse.

II. Kapitel.

Algebra.

1. Abschnitt. Erklärungen und Bezeichnung.

Algebra ist die Wissenschaft der Größenrechnung im Allgemeinen, so wie die Arithmetik die besondere Wissenschaft der Zahlenrechnung ist.

Jede Ziffer oder arithmetisches Zeichen hat einen bestimmten und unveränderlichen Werth; die Ziffer 5 z. B. bezeichnet stets eine und dieselbe Zahl, nämlich die Menge von 5 Einheiten, einer Ordnung, welche von der Stellung und dem Gebrauche der Ziffer selbst abhängt. Algebraische Zeichen hingegen, sollen im Allgemeinen von jeder besondern Bezeichnung unabhängig seyn, und sich eignen, alle Arten von Zahlen oder Größen darzustellen, nach der Natur der Aufgaben, auf welche wir sie anwenden wollen. Ueberdieß müssen sie einfach und leicht zu behandeln seyn, und weder den Geist noch das Gedächtniß ermüden. Diese Vortheile gewähret die Anwendung der Buchstaben des Alphabets, a, b, c u. s. w., um diejenigen Größen darzustellen, welche bei einer mathematischen Untersuchung als gegeben vorkommen. Die Folge hiervon ist, daß, wenn wir alle die Aufgaben von derselben Art, durch eine einzige algebraische Berechnung gelöst, und sie in der allgemeinsten Form, deren sie fähig ist, dargestellt haben, die Anwendung des Gefundenen auf alle besondere Fälle, blos arithmetische Ausführung erfordert.

Es ist gewöhnlich, obschon aus keinem Grunde absolut nothwendig, daß man die bekannten Größen durch die An=

fangsbuchstaben des Alphabets, a, b, c, d, u. s. w., und die unbekannten durch die letzten Buchstaben, w, x, y, z, bezeichnet. Aber es ist oft bequem, besonders um dem Gedächtnisse zu Hülfe zu kommen, eine Größe, welche eine Untersuchung herbeiführt, sey sie bekannt oder unbekannt, durch ihren Anfangsbuchstaben zu bezeichnen; als Summe durch s, Product durch p, Dichtigkeit durch d, Schnelligkeit (velocitas) durch v, Zeit (tempus) durch t, u. s. f.

Wenn nun s die Summe von 4 Gliedern, durch a, b, c und d ausgedrückt, bezeichnet, und wir dann die anderen zu Anfang der Arithmetik erklärten Zeichen anwenden, so erhalten wir diesen algebraischen Ausdruck: $s = a + b + c + d$.

Sind die 4 Größen gleich, oder $s = a + a + a + a$, so läßt sich dies offenbar zurückführen auf $s = 4 \times a$, oder einfach $s = 4a$, indem das Zeichen der Multiplication, welches hierbei zu denken ist, wegfällt. Die Ziffer 4 heißt der Coefficient. In den Größen $3a$, $5a$, $7a$, na, sind demnach 3, 5, 7 und n die Coefficienten.

Das stetige Product aus drei oder mehrern Größen wird ausgedrückt, indem man entweder das Zeichen der Multiplication dazwischen setzt, als $a \times b \times c \times d$, oder durch dazwischengesetzte Punkte, welche dasselbe bezeichnen, als $a.b.c.d$; oder indem man die Buchstaben ohne Zeichen zusammenstellt, als abcd.

Sind die Größen gleich, so werden ihre Producte Potenzen, als aa, aaa, aaaa, u. s. w., wo man gewöhnlich anstatt die Buchstaben zu wiederholen, eine Zahl ein wenig rechter Hand über den einzelnen Buchstaben schreibt, um anzuzeigen, wie viel gleiche Factoren in einander multiplicirt worden sind; diese Zahl wird der Exponent genannt. Also, anstatt aa, aaa, aaaa, setzen wir a^2, a^3, a^4, wo 2, 3, 4, die Exponenten sind. Weil die Wurzeln das Umgekehrte der Potenzen sind, so werden sie durch Exponenten ausgedrückt, welche die Reciproken von denen sind, welche die correspondirenden Potenzen bezeichnen. Man stellt also die Quadratwurzel von a dar entweder durch $\sqrt{a}$, oder durch $a^{\frac{1}{2}}$; die Cubikwurzel von $a+b$, entweder durch $\sqrt[3]{a+b}$, oder durch $(a+b)^{\frac{1}{3}}$; die vierte Wurzel aus $a+b-c$, entweder durch $\sqrt[4]{(a+b-c)}$ oder durch $(a+b-c)^{\frac{1}{4}}$.

Wenn eine Größe von einer andern durch das Zeichen + oder — getrennt wird, heißt sie ein Glied. Ein Monom hat ein Glied; ein Binom hat zwei Glieder, als $a+b$, $ac-4ab$. Wenn das zweite Glied eines Binoms das Zei-

chen — hat, wird es häufig ein Residuum genannt. Ein Trinom hat drei Glieder, als a+b+c, ad—4ab+5bc. Ein Quadrinom hat vier, als a+b+c—d. Ein Multinom oder Polynom hat mehrere Glieder.

Die Zeichen + und —, welche in der Arithmetik blos die Operationen der Addition und Subtraction anzeigen, haben in der Algebra eine ausgedehntere Bedeutung; sie bezeichnen außer der Addition und Subtraction noch alle diejenigen Operationen oder Zustände, die ihrer Natur nach wie Addition und Subtraction einander entgegengesetzt sind. Und wenn in einer algebraischen Rechnung einer Größe das Zeichen + vorgesetzt ist, so deutet dies an, daß sie in einem gewissen Zustande, wie Lage, Richtung u. s. w. vorhanden ist; dann, wenn das Zeichen — mit einer solchen Größe in Verbindung kommt, zeigt es genau den entgegengesetzten Zustand, Lage u. s. w. an, und niemals irgend einen zwischenliegendrn. Dies ist Sache der bloßen Uebereinkunft und von metaphysischen Schlüssen entfernt. Sollten, um diese Gegensätze zu bezeichnen, andere Zeichen erfunden werden, würden sie überflüssig seyn, weil die Zeichen + und —, ob sie schon ursprünglich bestimmt sind, Addition und Subtraction zu bezeichnen, sehr wohl auf andere Bestimmungen ausgedehnt werden können.

Wenn also + a	zu addirendes,	so bezeichnet	— a	zu subtrahirendes,
bezeichnet	rechter Hand,			linker Hand,
Etwas	vorwärts,		Etwas	rückwärts.

Bezeichnet	Wachsen	so bezeichnet	— a ein	Abnehmen,
+ a ein	Schwere			Leichtigkeit,
bestimmtes	Vermögen		entsprechendes	Schuld,
	Bewegung nach oben			Bewegung nach unten.

Und so für jede Art von Gegensatz. Zwei so mit einander verbundene Größen zerstören ihren gegenseitigen Einfluß, oder sind gleich Null als + a — a = 0. Wenn also Jemand 10 Rthlr. Vermögen hat, und zu derselben Zeit 10 Rthlr. Schulden, so hat er so viel als Nichts. Und wenn ein Schiff in einer Stunde 6 Meilen segelte, dann aber 6 Meilen in Verlauf einer Stunde zurück führe, so käme es keinen Schritt vorwärts.

Gleichartige Zeichen sind entweder alle positiv (+), oder alle negativ (—). Und ungleichartig sind sie, wenn sie theils positiv, theils negativ sind. Wenn aber vor einer Größe kein Zeichen steht, so hat man dabei das Zeichen (+) zu verstehen.

Unter einer Gleichung versteht man zwei Ausdrücke von Größen, deren Aggregate einander gleich sind, und durch das

Zeichen der Gleichheit (=) mit einander verbunden werden, als $12+5=20-3$, oder $x+y=a+b-cd$. Die Größen, welche zu beiden Seiten des Gleichheitszeichens stehen, werden respective die Theile der Gleichung genannt.

2. Abschnitt. Addition und Subtraction.

1. Genau genommen giebt es in der Algebra weder eine Addition noch Subtraction, nur eine Reduction, durch die man nämlich jeden algebraischen Ausdruck, der aus verschiedenen Gliedern besteht, wenn es möglich ist, in ein einziges Glied zusammenzieht. Dieses kann jedoch nur geschehen, wenn Größen, ihren Coefficienten und Vorzeichen nach, verschieden, dagegen aus denselben Buchstaben und denselben Exponenten gebildet sind.

So können $3a+4a+7a$, $5a^3b-3a^3b+8a^3b$ } offenbar abgekürzt werden.

In dem ersten Ausdrucke giebt die Abkürzung $(3+4+7)a=14a$, in dem zweiten $(5-3+8)a^3b=10a^3b$.

2. Im Allgemeinen betrifft die Reduction immer nur die Coefficienten ähnlich geformter Glieder, und zwar werden diese addirt, wenn ihre Vorzeichen gleichartig sind; subtrahirt, wenn sie verschieden sind; in dem ersten Falle erhält das Resultat das gemeinschaftliche Zeichen; in dem andern das Zeichen derjenigen Größe, welche den größern Coefficienten hat.

3. Wenn Größen gemischt vorkommen, so ist es am Besten, sie noch vor der Verbindung zu ordnen.

Z. B. von $3a^2, -3bc, +2c^2, +4d, +7a^2, +5bc, +a^2, -2c^2, -4bc$, wenn sie wie an der Seite geordnet werden, bekömmt man ihre Summe gleich dem was in der vierten Zeile steht.

$$\begin{array}{r} 3a^2+5bc-2c^2 \\ 7a^2-3bc+4d \\ a^2-4bc+2c^2 \\ \hline 11a^2-2bc+4d \end{array}$$

4. Wenn man einen Unterschied, wie $b-c$, von einem einzelnen Gliede wie a, zu subtrahiren verlangt, so sieht man sogleich, daß die verlangte Differenz nicht geändert wird, wenn zu beiden eine Größe c addirt wird. Wir hätten dann $b-c+c$, oder b, von $a+c$ abzuziehen, d. h. wir hätten dann $a+c-b$, für die gesuchte Differenz, wo, wie bekannt, die Vorzeichen der Buchstaben b und c, welche abzuziehen waren, verändert werden müßten.

Um ein Polynom zu subtrahiren, verändere man alle Vorzeichen und reducire die Coefficienten durch Vereinigung, wo dies möglich ist.

Also $4ab-3bc$	Und $4ab-3c^2+bc$
$-(2ab-6bc)$	$-(ab-c^2-2bc)$
wird $4ab-3bc$	wird $4ab-3c^2+bc$
$-2ab-6bc$	$-ab+c^2+2bc$
Resultat $2ab+3bc$	Resultat $3ab-2c^2+3bc$

5. Beim Addiren und Subtrahiren algebraischer Brüche müssen die Größen auf einen gemeinschaftlichen Nenner gebracht, und andern erforderlichen Verwandlungen unterworfen werden, ähnlich denen bei gemeinen Brüchen in der Arithmetik; und dann kann die Summe oder der Unterschied der Zähler über den gemeinschaftlichen Nenner gesetzt werden, wie es erforderlich ist.

Z. B. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$.

Oder: $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}+\frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a}=\frac{a^2}{abc}+\frac{b^2}{abc}+\frac{c^2}{abc}+\frac{a^2b^2}{abc}+\frac{a^2c^2}{abc}+\frac{b^2c^2}{abc}=\frac{a^2+b^2+c^2+a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{abc}$.

Oder $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$.

Ferner: $\frac{a+x}{d}-\frac{a-x}{c}=\frac{ac+cx}{cd}-\frac{ad-dx}{cd}=\frac{ac+cx-ad+dx}{cd}=\frac{a(c-d)+x(c+d)}{cd}$.

Ebenso: $\frac{b+x}{b-x}-\frac{b-x}{b+x}=\frac{(b^2+2bx+x^2)-(b^2-2bx+x^2)}{b^2-x^2}=\frac{4bx}{b^2-x^2}$.

3. Abschnitt. Multiplication.

1. Sind Monomen zu multipliciren, so multiplicire man ihre Coefficienten, addire die Exponenten zusammen, welche mit denselben Buchstaben verbunden sind (wobei der Exponent 1 den Größen, welche keinen haben, beizulegen ist), und ordne dann die so erhaltenen Coefficienten und Buchstaben.

2. Ist das Product aus zwei Polynomen zu finden, so multiplicire man jedes Glied des einen in alle Glieder des andern, nach der für die Monomen gegebenen Regel, und nehme dabei jedes Partialproduct negativ, wenn seine Factoren entgegengesetzte Vorzeichen haben, und positiv, wenn sie gleiche Vorzeichen haben. Oder kurz: man merke, daß gleichartige Vorzeichen +, ungleichartige — geben.

3. Um algebraische Brüche zu multipliciren, nehme man das Product der Zähler für den neuen Zähler, und das der Nenner für den neuen Nenner.

Anmerkung. Die allgemeine Regel für die Vorzeichen kann offenbar aus folgender Erklärung abgeleitet werden: Multipliciren heißt eine Größe finden, die sich zum Multiplicand verhält, wie der Multiplicator zur Einheit. Daher muß der Multiplicator eine abstracte Zahl seyn, und, wenn er ein einzelnes Glied ist, kann er weder + noch — zu seinem Vorzeichen haben. Nun ist erstens: $+a \times +m = +ma$, denn durch Vermehrung oder Verminderung kann für die Qualität von a sein Werth nicht geändert werden; daher ist das Product der Qualität nach plus, und ma der Erklärung zu Folge ist das Product von a und m. Zweitens, $-a \times +m = -ma$, aus denselben Gründen wie zuvor, mutatis mutandis. Drittens, $+a \times -m$ hat keinen Sinn; denn m muß eine abstracte Zahl seyn, daher können wir dafür keinen Beweis haben. Aber $+a \times (m-n) = ma - na$, n ist kleiner als m; a so oft genommen als hier Einheiten in m enthalten sind, ist $= ma$, nach dem ersten Falle; a aber soll blos so viel mal genommen werden als Einheiten in $m-n$ enthalten sind; daher ist a noch so oft zu nehmen als Einheiten in n enthalten sind; folglich muß a in n multiplicirt, oder na subtrahirt werden; und demnach ist $ma - na$ das wahre Product. Viertens, $-a \times (m-n) = -ma + na$, denn $-a \times m = -ma$ (nach dem 2ten Falle); dieses aber ist wie oben, um $-na$ zu groß; daher muß $-na$ von $-ma$ abgezogen werden, um das richtige Product zu erhalten; dieses aber ist, nach der Regel der Subtraction, $= -ma + na$.

Beispiele.

1. $4ab \times 5cd = 4.5.ab.cd = 20abcd.$

2. $8a^2b^3 \times 4a^5b = 8.4.a^2.a^5.b^3.b = 32a^{2+5}b^{3+1} = 32a^7b^4.$

3. Multiplicire $2a + bc - 2b^2$
durch $2a - bc + 2b^2$

$4a^2 + 2abc - 4ab^2$
$-2abc - b^2c^2 + 2b^3c$
$+4ab^2 + 2b^3c - 4b^2$

Product $4a^2 - b^2c^2 + 4b^3c - 4b^2$

4. $\begin{cases} a + b \\ a + b \end{cases}$

$a^2 + ab$
$ab + b^2$

$a^2 + 2ab + b^2$

5. $\begin{cases} a^2 + 2ab + b^2 \\ a + b \end{cases}$

$a^3 + 2a^2b + ab^2$
$+ a^2b + 2ab^2 + b^3$

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

6. $\begin{cases} a + b \\ a - b \end{cases}$

$a^2 + ab$
$-ab - b^2$

$a^2 - b^2$

7. $\frac{a+b}{c} \times \frac{a-b}{d} = \frac{(a+b)(a-b)}{c \times d} = \frac{a^2-b^2}{cd}$.

8. $\frac{2x}{a} \times \frac{3ab}{c} \times \frac{3ac}{2b} = \frac{18a^2bcx}{2abc} = \frac{9ax}{1} \times \frac{2abc}{2abc} = 9ax$.

Anmerkung. Aus den vorhergehenden Beispielen (4, 5 und 6) lernen wir —

1. Daß das Quadrat der Summe zweier Größen gleich ist der Summe der Quadrate der beiden Größen mit ihrem doppelten Producte zusammen genommen.

2. Daß das Product der Summe und Differenz zweier Größen gleich ist der Differenz ihrer Quadrate.

3. Daß der Cubus des Binoms $a + b$ ist, $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

4. Abschnitt. Division.

1. Um ein Monom durch ein anderes zu dividiren, streiche man die Buchstaben, die beiden gemein sind, hinweg, ziehe die Exponenten, welche dieselben Buchstaben behalten, von einander ab, und dividire die Coefficienten durch einander.

2. Ein Polynom durch ein Monom zu dividiren. Man dividire jedes Glied des Polynoms durch das Monom nach Regel 1, und verbinde die Resultate durch ihre eigenen Vorzeichen.

3. Zwei Polynome eins durch das andere zu dividiren. Man ordne sie in Rücksicht auf denselben Buchstaben, dividire dann die ersten Glieder eins durch das andere, so erhält man ein Glied Quotienten; durch dieses multiplicire man den Divisor und subtrahire das Product vom Dividend; mit dem Reste verfahre man auf dieselbe Art. Bei den partialen Divisionen beobachte man dieselben Regeln für die Bestimmung der Vorzeichen, wie in der Multiplication.

4. Algebraische Brüche zu dividiren. Man kehre die Glieder des Divisors um, und verfahre wie in der Multiplication.

Beispiele.

1. $12\,a^3\,b^2\,c : 3\,ab = \frac{12}{3}\,a^{3-1}\,b^{2-1}\,c = 4\,a^2\,b\,c.$

2. $15\,a^3\,b^5 : 5\,a^2\,b^3 = \frac{15}{5}\,a^{3-2}\,b^{5-2} = 3\,a\,b^3.$

3. $6\,x^3 + 12\,x\,y - 9\,x\,y\,z : 3\,x = \frac{6\,x^2}{3\,x} + \frac{12\,x\,y}{3\,x} - \frac{9\,x\,y\,z}{3\,x} = 2\,x + 4\,y - 3\,y\,z.$

4. Man dividire $x^3 - 3\,x^2\,z + 3\,x\,z^2 - z^3$. durch $x - z$.

$$
\begin{array}{l}
x - z \,)\, x^3 - 3\,x^2\,z + 3\,x\,z^2 - z^3 \,(\, x^2 - 2\,x\,z + z^2 \text{ Quotient.} \\
\quad x^3 - x^2\,z \\
\quad\quad -2\,x^2\,z + 3\,x\,z^2 \\
\quad\quad -2\,x^2\,z + 2\,x\,z^2 \\
\quad\quad\quad\quad x\,z^2 - z^3 \\
\quad\quad\quad\quad x\,z^2 - z^3 \\
\quad\quad\quad\quad\quad * \quad\quad * \qquad \text{Rest.}
\end{array}
$$

5. Man dividire $a^5 - b^5$ durch $a - b$.

$$
\begin{array}{l}
a - b \,)\, a^5 - b^5 \,(\, a^4 + a^3\,b + a^2\,b^2 + a\,b^3 + b^4 \text{ Quotient.} \\
\quad a^5 - a^4\,b \\
\quad\quad a^4\,b \\
\quad\quad a^4\,b - a^3\,b^2 \\
\quad\quad\quad a^3\,b^2 \\
\quad\quad\quad a^3\,b^2 - a^2\,b^3 \\
\quad\quad\quad\quad a^2\,b^3 \\
\quad\quad\quad\quad a^2\,b^3 - a\,b^4 \\
\quad\quad\quad\quad\quad a\,b^4 - b^5 \\
\quad\quad\quad\quad\quad a\,b^4 - b^5 \qquad \text{Rest.}
\end{array}
$$

Hier ist das zweite Glied des Dividend unterwärts über das correspondirende Glied im letzten Producte zu stehen gekommen.

6. Man dividire 1 durch $1-x$.

$$\begin{array}{l} 1-x)\,1\;(1+x+x^2+x^3+x^4+\frac{x^5}{1-x}. \\ \underline{1-x} \\ x \\ \underline{x-x^2} \\ x^2 \\ \underline{x^2-x^3} \\ x^3 \\ \underline{x^3-x^4} \\ x^4 \\ \underline{x^4-x^5} \\ x^5 \end{array}$$

7. $\frac{2x^2}{a^3+x^3} : \frac{x}{a+x} = \frac{2x^2}{a^3+x^3} \times \frac{a+x}{x} = \frac{2x^2(a+x)}{(a^3+x^3)x} = \frac{2x}{x^2-ax+a^2}$.

8. $\frac{x^4-b^4}{x^2-2bx+b^2} : \frac{x^2+bx}{x-b} = \frac{x^4-b^4}{(x-b)^2} \times \frac{x-b}{x(x+b)} = \frac{x^4-b^4}{x(x+b)(x-b)} = \frac{x^4-b^4}{x(x^2-b^2)} = \frac{x^2+b^2}{x} = x + \frac{b^2}{x}$.

9. Man dividire $96-6a^4$ durch $6-3a$. Quotient $16+8a+4a^2+2a^3$.

10. Man dividire $10a^3+11a^2b-19abc-15a^2c+3ab^2+15bc^2-5b^2c$ durch $3ab+5a^2-5bc$. Quotient $2a+b-3c$.

11. Man dividire $x^2+y^2+\frac{y^4}{x^2}$ durch $x+y+\frac{y^2}{x}$, Quotient $x-y+\frac{y^2}{x}$.

5. Abschnitt. Potenzenerhebung.

1. Monomen zu einer beliebigen Potenz zu erheben.

Man erhebe den Coefficienten zu der verlangten Potenz und mache dies zum neuen Coefficienten, und multiplicire den Exponenten eines jeden Buchstaben durch den Exponenten der verlangten Potenz.

Alle Potenzen einer positiven Größe werden $+$; von einer negativen Größe werden die geraden Potenzen, als

die 2te, 4te, 6te u. s. w. +; die ungeraden Potenzen, als die 3te, 5te, 7te u. s. w. —.

Um Brüche zu Potenzen zu erheben, wende man diese Regeln auf Zähler und Nenner an.

Beispiele.

1. Die 4te Potenz von $2a^2$ zu finden.
$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$, neuer Coefficient.
$2 \times 4 = 8$, neuer Exponent. Daher $16a^8$ die verlangte Potenz.

2. Die 5te Potenz von $-3y^2$ ist $243y^{10}$.

3. Die vierte Potenz von $-4x^3$ ist $256x^{12}$.

4. Die sechste Potenz von $\frac{2z}{3y^2}$ ist $\frac{64z^6}{729y^{12}}$.

2. Polynome zu Potenzen zu erheben.

Man multiplicire die gegebene Größe so viel mal mit sich selbst, als Einheiten in dem Exponenten der verlangten Potenz enthalten sind, und das letzte Product wird die verlangte Potenz seyn.

Beispiele.

Die dritten Potenzen von $x \pm z$ und $2x - 3z$ zu finden.

$x \pm z$	$2x - 3z$
$x \pm z$	$2x - 3z$
$x^2 \pm xz$	$4x^2 - 6xz$
$\pm xz + z^2$	$-6xz + 9x^2$
$x^2 \pm 2xz + z^2$ Quadrate	$4x^2 - 12xz + 9z^2$
$x \pm z$	$2x - 3z$
$x^3 \pm 2x^2z + xz^2$	$8x^3 - 24x^2z + 18xz^2$
$\pm x^2z + 2xz^2 + z^3$	$-12x^2z + 36xz^2 - 27z^3$
$x^3 \pm 3x^2z + 3xz^2 + z^3$	$8x^3 - 36x^2z + 54xz^2 - 27z^3$

Die nach der vorhergehenden Regel erforderliche Operation ist zwar an sich einfach, wird aber schon weitläuftig, wenn ein bloßes Binom zu einer hohen Potenz zu erheben ist. In solchen Fällen ist es vortheilhaft

Isaac Neuton's Regel für die Erhebung eines Binoms auf jede beliebige Potenz

anzuwenden.

1. Die Glieder der Entwickelung ohne die Coefficienten zu finden. In jedem Gliede kommt sowohl die erste als die zweite Größe des Binoms in einer gewissen Potenz vor. Und zwar ist der Ex-

ponent der ersten Größe im ersten Gliede, dem Exponenten der vorgegebenen Potenz gleich, in jedem folgenden Gliede immer um 1 kleiner; die Exponenten der andern Größe sind der Reihe nach 0, 1, 2, 3, 4 u. s. w.

2. Die Coeficienten zu finden. Der erste ist stets 1, und der zweite gleich dem Exponenten der Potenz; allgemein: wenn der Coeficient irgend eines Gliedes durch den Exponenten der ersten Größe des Binoms in diesem Gliede multiplicirt, und das Product durch die Zahl dividirt wird, welche angiebt, das wievielste Glied das behandelte ist, so giebt dies den Coeficienten des nächst folgenden Gliedes *).

Anmerkung. Die ganze Anzahl von Gliedern wird eins mehr betragen als der Exponent der gegebenen Potenz; und wenn beide Glieder der Wurzel + sind, so werden alle Glieder der Potenz +; wenn aber das zweite Glied — ist, so werden alle ungeraden Glieder +, und die geraden Glieder —.

Beispiele.

1. Man erhebe $a + x$ zu der fünften Potenz.

Hier werden die Glieder, ohne die Coefficienten, seyn

$$a^5,\ a^4 x,\ a^3 x^2,\ a^2 x^3,\ a x^4,\ x^5,$$

und die Coefficienten werden seyn

$$1,\ 5,\ \frac{5\times 4}{2},\ \frac{10\times 3}{3},\ \frac{10\times 2}{4},\ \frac{5\times 1}{5};$$

und daher ist die fünfte Potenz

$$a^5 + 5a^4 x + 10a^3 x^2 + 10a^2 x^3 + 5a x^4 + x^5.$$

Wir haben hier, der Deutlichkeit wegen, die Art und Weise, die verschiedenen Glieder und ihre respectiven Coefficienten zu finden, besonders gezeigt. Aber in der Ausübung ist die Trennung der Operationen nachtheilig. Der beste Weg die Coefficienten zu erhalten ist, zuerst die in der obigen Regel angegebene Division entweder in den erforderlichen Coefficienten oder in den Exponenten vorzunehmen (von denen immer ei-

---

*) Diese Regel, in allgemeinen Zeichen ausgedrückt, giebt:

$$(a+b)^n = a^n + n.a^{n-1}b + n.\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2 + n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}a^{n-3}b^3 \text{ u. s. w.}$$

$$(a-b)^n = a^n - n.a^{n-1}b + n.\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2 - n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}a^{n-3}b^3 \text{ u. s. w.}$$

Dasselbe Theorem auf gebrochene Exponenten, jedoch mit einer kleinen Abänderung angewendet, dient zur Ausziehung der Wurzeln durch unendliche Reihen; wie späterhin gezeigt werden soll.

ner oder der andere ohne Rest durch die Gliederzahl theilbar ist), und den Quotient in die andere jener beiden Größen zu multipliciren. So kann man das Resultat auf einmal in einer einzigen Reihe, fast so schnell als es geschrieben werden kann, erhalten.

2. $(x+y)^7 = x^7 + 7x^6z + 21x^5z^2 + 35x^4z^3 + 35x^3z^4 + 21x^2z^5 + 7xz^6 + z^7$.

3. $(x-z)^8 = x^8 - 8x^7z + 28x^6z^2 - 56x^5z^3 + 70x^4z^4 - 56x^3z^5 + 28x^2z^6 - 8xz^7 + z^8$.

Was Trinomen und Quadrinomen betrifft, so betrachte man zwei Glieder als eins, und das übrige oder die übrigen Glieder als das andere, und verfahre wie oben.

Beispiel.

Man erhebe $x+y-z$ zur vierten Potenz.

Man betrachte x als das eine Glied des Binoms, und $y-z$ als das andere: dann wird $(x+y-z)^4 = [x+(y-z)]^4 = x^4 + 4x^3(y-z) + 6x^2(y-z)^2 + 4x(y-z)^3 + (y-z)^4$, wo die Potenzen von $y-z$ nach derselben Regel zu entwickeln sind. Multiplicirt man sie in ihre respectiven Factoren, so erhält man zuletzt $x^4 + 4x^3y - 4x^3z + 6x^2y^2 - 12x^2yz + 6x^2z^2 + 4xy^3 - 12xy^2z + 12xyz^2 - 4xz^3 + y^4 - 4y^3z + 6y^2z^2 - 4yz^3 + z^4$, die verlangte vierte Potenz.

Hätte man $(x+y)$ und $-z$ als die beiden Glieder des Binoms angenommen, so würde das Resultat dasselbe seyn.

Anmerkung. Die Regel für die Bildung der Potenzen der Polynomen ist für diesen Ort zu zusammengesetzt.

6. Abschnitt. Wurzelausziehung.

1. Die Wurzeln von Monomen zu finden. Man suche die entsprechende Wurzel des Coefficienten und bilde daraus den neuen Coefficienten; dann dividire man den Exponenten des Buchstabens oder der Buchstaben durch den Exponenten der Wurzel, (oder multiplicire ihn mit dem Reciproken des Wurzelexponenten), das Resultat wird die Exponenten des Buchstabens oder der Buchstaben geben, die hinter den neuen Coefficienten geschrieben, mit diesem die verlangte Wurzel bilden.

Beispiele.

1. Die vierte Wurzel von $81a^4z^8$ zu suchen.

Erstens $\sqrt[4]{81} = \sqrt{9} = 3$, neuer Coefficient.

Dann $4 \times \frac{1}{4} = 1$, Exponent von a; und $8 \times \frac{1}{4} = 2$, Exponent von z.

Daher ist $3az^2$ die verlangte Wurzel.

2. $\sqrt[5]{(32\,a^5\,x^{10})} = \sqrt[5]{32} \times a^{5\times\frac{1}{5}} \times x^{10\times\frac{1}{5}} = 2\,a\,x^2$.

3. $\sqrt[3]{\frac{8\,x^3}{27\,z^9}} = \frac{\sqrt[3]{8} \times x^{3\times\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{27} \times z^{9\times\frac{1}{3}}} = \frac{2\,x}{3\,z^3}$.

2. Die Quadratwurzel eines Polynoms zu finden. Man verfahre wie bei der Ausziehung der Quadratwurzel in der Arithmetik.

Beispiele.

1. Man ziehe die Quadratwurzel aus $a^4 + 4\,a^3\,x + 6\,a^2\,x^2 + 4\,a\,x^3 + x^4$.

$a^4 + 4\,a^3\,x + 6\,a^2\,x^2 + 4\,a\,x^3 + x^4$ ($a^2 + 2\,a\,x + x^2$ [verlangte Wurzel.

a^4

$2a^2 + 2\,a\,x)\ 4\,a^3\,x + 6\,a^2\,x^2$

$4\,a^3\,x + 4\,a^2\,x^2$

$2\,a^2 + 4\,a\,x + x^2)\ 2\,a^2\,x^2 + 4\,a\,x^3 + x^4$

$2\,a^2\,x^2 + 4\,a\,x^3 + x^4$

* * *

2. Man ziehe die Quadratwurzel aus $x^4 - 2\,x^3 + \frac{3}{2}\,x^2 - \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{16}$.

$x^4 - 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{16}$ ($x^2 - x + \frac{1}{4}$ Wurzel.

x^4

$2x^2 - x)\ -2x^3 + \frac{3}{2}x^2$

$-2x^3 + x^2$

$2x^2 - 2x + \frac{1}{4})\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{16}$

$\frac{1}{2}x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{16}$

* * *

3. Die Wurzeln von Potenzen im Allgemeinen zu finden. Wenn die verlangten Wurzeln nicht Wurzeln höherer Potenzen sind, kann man folgende Regel anwenden: Man suche die Wurzel des ersten Gliedes, und setze sie wie einen Quotienten an, — subtrahire ihre Potenz, und bringe das zweite Glied wie einen Dividend herunter, — erhebe die zuletzt gefundene Wurzel zur nächst niedrigern Potenz, und multiplicire sie durch den Exponenten der gegebenen Potenz, so erhält man einen neuen Divisor. Man dividire den Dividend durch diesen Divisor, und der Quotient wird das nächste Glied der Wurzel seyn. — Nun erhebe man die so zusammengesetzte

Wurzel zur Potenz, und subtrahire und dividire wie zuvor; und so fort, bis das Ganze beendigt ist.

Beispiele.

1. Man suche die Cubikwurzel von $x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$.

$$x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$$

x^6 [$x^2 - 2x + 1$ verlangte Wurzel.

$(x^2)^2 \times 3 = 3x^4) - 6x^5$

$$x^6 - 6x^5 + 12x^4 - 8x^3$$

$3x^4) 3x^4$

$$x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$$

* * * * * *

2. Man suche die 4te Wurzel von $16a^4 - 96a^3x + 216a^2x^2 - 216ax^3 + 81x^4$.

$$16a^4 - 96a^3x + 216a^2x^2 - 216ax^3 + 81x^4$$

$16a^4$ [$2a - 3x$, gesuchte Wurzel.

$8a^3 \times 4 = 32a^3) - 96a^3x$

$$16a^4 - 96a^3x + 216a^2x^2 - 216ax^3 + 81x^4$$

* * * * *

Anmerkung. Bei den höhern Wurzeln verfahre man so:
Für das Biquadrat, ziehe man die Quadratwurzel aus der Quadratwurzel.
Für die sechste Wurzel ziehe man die Cubikwurzel aus der Quadratwurzel.
Für die achte Wurzel ziehe man die Quadratwurzel aus der Quadratwurzel der Quadratwurzel.
Für die neunte Wurzel ziehe man die Cubikwurzel aus der Cubikwurzel.

7. Abschnitt. Irrationalzahlen.

Eine surdische oder irrationale Größe ist eine Größe die sich unter einem Wurzelzeichen oder gebrochenen Exponenten befindet, deren Wurzel davon man aber nicht genau erhalten kann. (Man sehe Arithmetik 9. Abschn. Wurzelausziehung.)

Irrationalgrößen können, eben so wie die rationalen Größen, entweder als einfach oder zusammengesetzt betrachtet werden, die ersteren sind Monomen, als $\sqrt{3}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[5]{ab^2}$, die andern Polynomen, als $\sqrt{3} + \sqrt{5}$, $\sqrt[3]{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c^3}$, u. s. w.

Rationale Größen können der Form nach als irrationale dargestellt werden, wodurch man bei manchen mit ihnen vorzunehmenden Operationen sich Erleichterung verschafft.

Reduction.

1. Irrationalzahlen auf ihren einfachsten Ausdruck zu reduciren.

1. Wenn die Irrationalgröße kein Bruch ist, sondern aus ganzen Zahlen oder ganzen Factoren unter dem Wurzelzeichen besteht.

Man dividire die gegebene Potenz durch die möglichst größte auf die Potenz des Wurzelexponenten erhobene Potenz, welche die gegebene ohne Rest theilt; den Quotienten setze man unter das Wurzelzeichen, und setze die Wurzel jenes Divisors als einen Coefficienten voran, oder verbinde sie durch das Zeichen $\times$.

Beispiele.

1. $\sqrt{75} = \sqrt{(25 \times 3)} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$.

2. $\sqrt[3]{448} = \sqrt[3]{(64 \times 7)} = \sqrt[3]{64} \times \sqrt[3]{7} = 4\sqrt[3]{7}$.

3. $\sqrt[4]{176} = \sqrt[4]{(16 \times 11)} = \sqrt[4]{16} \times \sqrt[4]{11} = 2\sqrt[4]{11}$.

4. $\sqrt{(8x^3 - 12x^2y)} = \sqrt{4x^2(2x - 3y)} = \sqrt{4x^2} \times \sqrt{(2x - 3y)} = 2x\sqrt{(2x - 3y)}$.

5. $\sqrt[3]{108x^3y^4} = \sqrt[3]{(27x^3y^3 \times 4y)} = \sqrt[3]{27x^3y^3} \times \sqrt[3]{4y} = 3xy\sqrt[3]{4y}$.

6. $\sqrt[3]{(56x^3y + 8x^3)} = \sqrt[3]{8x^3(7y + 1)} = \sqrt[3]{8x^3} \times \sqrt[3]{(7y + 1)} = 2x\sqrt[3]{(7y + 1)}$.

2. Wenn die Irrationalzahl ein Bruch ist, so kann sie in eine gleichgeltende ganze Zahl verwandelt werden auf folgende Art:

Man multiplicire den Zähler des Bruchs unter dem Wurzelzeichen durch die Potenz seines Nenners, deren Exponent um 1 kleiner ist als der Exponent des Wurzelzeichens; nehme den unter dem Wurzelzeichen stehenden Nenner und dividire damit den Coefficienten (sey er eine Einheit, Zahl oder ein Buchstabe), so erhält man einen neuen Coefficienten, der vor die so verwandelte Irrationalzahl gesetzt wird.

Anmerkung. Diese Verwandlung erspart die Mühe des wirklichen Dividirens bei einer angenäherten Wurzel, und setzt uns oft in den Stand, irrationale Ausdrücke, mittels einer Wurzeltafel ganzer Zahlen, zu schätzen.

Beispiele.

1. $r\frac{1}{3} = r(\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{3}) = r\frac{3}{9} = r\frac{1}{9} \times r3 = \frac{1}{3} r3.$

2. $r\frac{1}{5} = r(\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{5}) = r\frac{5}{25} = r\frac{1}{25} \times r5 = \frac{1}{5} r5.$

3. $\sqrt{\frac{1}{n}} = \sqrt{\left(\frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n}\right)} = \sqrt{\frac{n}{n^2}} = \sqrt{\frac{1}{n^2}} \times r_n$
$= \frac{1}{n} r_n.$

4. $\sqrt[3]{r}\frac{4}{5} = \sqrt[3]{r}(\frac{4}{5} \cdot \frac{25}{25}) = \sqrt[3]{r}\frac{100}{125} = \sqrt[3]{r}\frac{1}{125} \times \sqrt[3]{r}100 =$
$\frac{1}{5} \sqrt[3]{r}100.$

5. $\sqrt[3]{\frac{2a}{5x}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2a}{5x} \cdot \frac{25x^2}{25x^2}\right)} = \sqrt[3]{\frac{50ax^2}{125x^3}} =$
$\sqrt[3]{\frac{1}{125x^3}} \times \sqrt[3]{r}50ax^2 = \frac{1}{5x} \sqrt[3]{r}50ax^2$

6. $\sqrt[3]{\frac{16}{81}} = \sqrt[3]{\frac{8.2}{9.9}} = \sqrt[3]{\frac{8.2}{9.9} \cdot \frac{9}{9}} = \sqrt[3]{\frac{8.18}{729}} \times$
$\sqrt[3]{\frac{8}{729}} \sqrt[3]{r}18 = \frac{2}{9} \sqrt[3]{r}18.$

3. Wenn der Nenner des Bruchs ein Binom oder ein Residuum ist, von welchem eins oder beide Glieder irrational und Wurzeln von Quadraten sind:

Dann multiplicire man diesen Bruch durch einen andern, in dem Zähler und Nenner gleich sind, und jeder aus denselben Größen besteht, als der Nenner des gegebenen Bruchs, die jedoch mit dem entgegengesetzten Zeichen zu verbinden sind.

Anmerkung. Nach dieser Regel nimmt die zu reducirende Größe, da ein Bruch von gleichem Zähler und Nenner, gleich der Einheit ist, eine neue Gestalt an, ohne ihren Werth zu ändern; indem der Nenner des Ausdrucks von der irrationalen Form befreit wird, und das Product aus der Summe und der Differenz zweier Größen gleich ist der Differenz ihrer Quadrate.

Beispiele.

1. $\frac{8}{r5 - r3} = \frac{8}{r5 - r3} \cdot \frac{r5 + r3}{r5 + r3} =$
$\frac{8(r5 + r3)}{2} = 4(r5 + r3).$

2. $\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} =$
$\frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{3} = \sqrt{5} - \sqrt{2}.$

3. $\frac{\sqrt{20}-\sqrt{12}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{20}-\sqrt{12}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} =$
$\frac{\sqrt{100}-2\sqrt{60}+\sqrt{36}}{5-3} = \frac{16-2\sqrt{60}}{2} = 8 - \sqrt{60}$
$= 8 - 2\sqrt{15}.$

4. $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{3}} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{3}} \cdot \frac{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{3}} = \frac{\sqrt[4]{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$
$\times \sqrt{ab} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \sqrt{ab} = (5^{\frac{3}{4}} - 5^{\frac{1}{2}}3^{\frac{1}{4}} +$
$5^{\frac{1}{4}}3^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{3}{4}}) \cdot (\frac{1}{2}\sqrt{ab}).$

Anmerkung 2. Nach demselben allgemeinen Princip kann ein jedes Binom oder irrationale Differenz, wie $\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}$ rational gemacht werden, indem man $\sqrt[n]{A^{n-1}} \mp \sqrt[n]{(A^{n-2}B)} + \sqrt[n]{(A^{n-3}B^2)} \mp \sqrt[n]{(A^{n-4}B^3)} +$ u. s. w. als Multiplicator annimmt, wo die obern Zeichen mit den obern, die untern mit den untern verbunden werden müssen, und die Reihe bis zu n Gliedern fortgesetzt wird.

Demnach giebt der Ausdruck $\sqrt[4]{a^3} - \sqrt[4]{b^3}$, multiplicirt durch $\sqrt[4]{a^9} + \sqrt[4]{a^6b^3} + \sqrt[4]{a^3b^6} + \sqrt[4]{b^9}$, das rationale Product $a^3 - b^3$.

2. Irrationalzahlen, welche verschiedne Wurzelexponenten haben, ohne Aenderung ihres Werthes auf einen gemeinschaftlichen Exponenten zu reduciren. Man erhebe jede der Potenzen auf die Potenz des Wurzelexponenten der andern, so erhält man die neue Potenz und mache das Product der Wurzelexponenten zu dem gemeinschaftlichen Wurzelexponenten.

Anmerkung. Hiernach können rationale Größen auf die Form einer gegebenen Wurzel gebracht, und Wurzeln mit rationalen Coefficienten können so verwandelt werden, daß diese ganz unter das Wurzelzeichen zu stehen kommen.

Beispiele.

1. $a^{\frac{1}{n}}$ und $b^{\frac{1}{m}}$, werden $a^{\frac{1}{n}\cdot\frac{m}{m}}$ oder $^{\frac{m}{m\,n}}$ und $b^{\frac{1}{m}\cdot\frac{n}{n}}$ oder $b^{\frac{n}{m\,n}}$.

2. $a^{\frac{1}{2}}$ und $b^{\frac{1}{3}}$, werden $a^{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3}}$ oder $a^{\frac{3}{6}}$ und $b^{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2}}$ oder $b^{\frac{2}{6}}$.

3. $3^{\frac{1}{2}}$ und $2^{\frac{1}{2}}$, wird $3^{\frac{3}{6}}$ und $2^{\frac{2}{6}}$ oder $\sqrt[6]{3^3}$ und $\sqrt[6]{2^2}$, oder $\sqrt[6]{27}$ und $\sqrt[6]{4}$.

4. $(a+b)^{\frac{1}{3}}$, und $(a-b)^{\frac{1}{4}}$, werden $\sqrt[12]{(a+b)^4}$ und $\sqrt[12]{(a-b)^3}$.

5. Die rationale Größe a^2, wird $\sqrt{a^4}$, $\sqrt[3]{a^6}$, $\sqrt[4]{a^8}$, oder $\sqrt[n]{a^{2n}}$.

6. $4a\sqrt[3]{5b}$, wird $\sqrt[3]{(4a)^3}\times\sqrt[3]{5b}$, $\sqrt[3]{64a^3}\times\sqrt[3]{5b}$, oder $\sqrt[3]{320a^3b}$.

Diese und andere leichte Verwandlungen, welche sich sogleich von selbst aufdringen, indem man sie durch die Operationen der Addition, Subtraction u. s. w. verrichtet, werden bei solchen irrationalen Größen, wie sie gewöhnlich vorkommen, so leicht vorgenommen, daß es hinlänglich genug seyn wird, einige Beispiele ohne umständliche Regeln zu geben.

Addition.

Beispiel 1. $\sqrt{8}+\sqrt{18}=\sqrt{(4.2)}+\sqrt{(9.2)}=2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=5\sqrt{2}$.

2. Man addire $\sqrt{54}$, $\sqrt{\frac{1}{6}}$, und $\sqrt{\frac{8}{27}}$.

$\sqrt{54}=\sqrt{(9.6)}=\sqrt{9}\times\sqrt{6}=3\sqrt{6}$
$\sqrt{\frac{1}{6}}=\sqrt{\frac{6}{36}}=\sqrt{\frac{1}{36}}\times\sqrt{6}=\frac{1}{6}\sqrt{6}$
$\sqrt{\frac{8}{27}}=\sqrt{(\frac{4\cdot2}{27}\cdot\frac{3}{3})}=\sqrt{\frac{4\cdot6}{81}}=\frac{2}{9}\sqrt{6}$
Die Summe von diesen ist $(3+\frac{1}{6}+\frac{2}{9})\sqrt{6}=3\frac{7}{18}\sqrt{6}$.

3. $\sqrt{27a^4x}+\sqrt{3a^2x}=\sqrt{(9a^4..3x)}+\sqrt{(a^2.3x)}=3a^2\sqrt{3x}+a\sqrt{3x}=(3a^2+a)\sqrt{3x}$.

4. $8\sqrt[3]{a^3b}+\sqrt[3]{a^6b}=(8\sqrt[3]{a^3}\times\sqrt[3]{b})+(\sqrt[3]{a^6}\times\sqrt[3]{b})=8a\sqrt[3]{b}+a^2\sqrt[3]{b}=(8a+a^2)\sqrt[3]{b}$.

Subtraction.

Beispiel 1. $2\sqrt{50}-\sqrt{18}=2\sqrt{(25.2)}-\sqrt{(9.2)}=2.5\sqrt{2}-3\sqrt{2}=(10-3)\sqrt{2}=7\sqrt{2}$.

2. $\sqrt{\frac{3}{5}}-\sqrt{\frac{5}{27}}=\sqrt{(\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{5})}-\sqrt{(\frac{5}{27}\cdot\frac{3}{3})}=\sqrt{\frac{15}{25}}-\sqrt{\frac{15}{81}}=\frac{1}{5}\sqrt{15}-\frac{1}{9}\sqrt{15}=\frac{4}{45}\sqrt{15}$.

3. $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{\frac{9}{32}} = \sqrt[3]{(\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{9})} - \sqrt[3]{(\frac{9}{32} \cdot \frac{2}{2})} = \sqrt[3]{\frac{18}{27}} - \sqrt[3]{\frac{18}{64}}$
$= \frac{1}{3}\sqrt[3]{18} - \frac{1}{4}\sqrt[3]{18} = \frac{1}{12}\sqrt[3]{18}.$

4. $\sqrt[3]{250\,a^3\,x} - \sqrt[3]{16\,a^3\,x} = \sqrt[3]{(125\,a^3 . 2x)} -$
$\sqrt[3]{(8\,a^3 . 2x)} = 5a\sqrt[3]{2x} - 2a\sqrt[3]{2x} = 3a\sqrt[3]{2x}.$

5. $\sqrt{45\,s^4\,x} - \sqrt{20\,s^2\,x^3} = \sqrt{(95^4 . 5x)} - \sqrt{(4\,s^2\,x^2 .}$
$5x) = (3s^2 - 2sx)\sqrt{5x}.$

6. $\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{a}{1} \times \left(\frac{1}{ac}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{c^2}{a} \times \left(\frac{1}{ac}\right)^{\frac{1}{2}} =$
$\frac{a^2 - c^2}{a}\left(\frac{1}{ac}\right)^{\frac{1}{2}}.$

Multiplication.

Beispiel 1. $\sqrt[3]{18} \times 5\sqrt[3]{4} = 5\sqrt[3]{(18 . 4)} = 5\sqrt[3]{(4 . 2 . 9)}$
$= 5\sqrt[3]{(8 . 9)} = 5 . 2\sqrt[3]{9} = 10\sqrt[3]{9}.$

2. $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{8}} \times \frac{3}{4}\sqrt{\frac{7}{10}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}\sqrt{(\frac{1}{8} \cdot \frac{7}{10})} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{80}} =$
$\frac{1}{2}\sqrt{(\frac{7}{80} \cdot \frac{5}{5})} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{35}{400}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{20}\sqrt{35} = \frac{1}{40}\sqrt{35}.$

3. $a^{\frac{2}{3}} \times a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{2}{3} + \frac{1}{4}} = a^{\frac{8}{12} + \frac{3}{12}} = a^{\frac{11}{12}}.$

4. $(x+z)^{\frac{1}{2}} \times (x+z)^{\frac{1}{3}} = (x+z)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = (x+z)^{\frac{5}{6}}.$

5. $(x + \sqrt{y}) \times (x - \sqrt{y}) = x^2 - y.$

6. $(x + \sqrt{y})^{\frac{1}{3}} \times (x - \sqrt{y})^{\frac{1}{3}} = (x^2 - y)^{\frac{1}{3}}.$

7. $z^{\frac{1}{n}} \times z^{\frac{1}{m}} = z^{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} = z^{\frac{m+n}{mn}}.$

8. $\sqrt{d} \times \sqrt[3]{ab} = \sqrt[6]{d^3} \times \sqrt[6]{a^2\,b^2} = \sqrt[6]{a^2\,b^2\,d^3}.$

9. $\sqrt{a - \sqrt{b - \sqrt{3}}} \times \sqrt{a + \sqrt{b - \sqrt{3}}} = \sqrt{(a^2 - b}$
$+ \sqrt{3}).$

10. $a^m \times a^{-n} = a^m \times \frac{1}{a^n} = a^{m-n}.$

11. $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = \sqrt{a}\sqrt{-1} \times \sqrt{a}\sqrt{-1} =$
$a \times -1 = -a.$

12. $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = \sqrt{a}\sqrt{-1} \times \sqrt{b}\sqrt{-1} =$
$\sqrt{ab} \times -1 = -\sqrt{ab}.$

Division.

Beispiel 1. $4\sqrt[3]{1000} : 2\sqrt[3]{4} = \frac{4}{2}\sqrt[3]{\frac{1000}{4}} = 2\sqrt[3]{250} =$
$2\sqrt[3]{(125 . 2)} = 10\sqrt[3]{2}.$

2. $\frac{5}{7}\sqrt[3]{\frac{2}{3}} : \frac{2}{5}\sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{2}\sqrt[3]{(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3})} = \frac{25}{14}\sqrt[3]{\frac{8}{9}} = \frac{25}{14}\sqrt[3]{(\frac{8}{9} \cdot \frac{3}{3})} = \frac{25}{14}\sqrt{(\frac{8}{27} \cdot 3)} = \frac{25}{14} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{25}{21}\sqrt{3}.$

3. $x^{\frac{2}{3}} : x^{\frac{4}{3}} = x^{\frac{2}{3}-\frac{4}{3}} = x^{-\frac{2}{3}} = 1 : x^{\frac{2}{3}}.$

4. $z^{\frac{1}{n}} : z^{\frac{1}{m}} = z^{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}} = z^{\frac{m-n}{mn}}.$

5. $(x^2 - x\,d - b + d\sqrt{b}) : (x - \sqrt{b}) = x + \sqrt{b} - d.$

6. $\frac{ac-ad}{2b}\sqrt{(a^2x - ax^2)} : \frac{a}{2b}\sqrt{(a-x)} = \frac{ac-ad}{2b} \times \frac{2b}{a} \times \sqrt{\frac{a\,x - a\,x^2}{a-x}} = (c-d)\sqrt{a\,x}.$

Potenzirung.

Beispiel 1. $(\frac{2}{3}a^{\frac{1}{3}})^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = \frac{4}{9}a^{\frac{2}{3}} = \frac{4}{9}\sqrt[3]{a^2}.$

2. $(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}})^3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2})} = \frac{1}{27}\sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{27}\sqrt{(\frac{1}{8} \cdot \frac{2}{2})} = \frac{1}{27}\sqrt{(\frac{1}{16} \cdot 2)} = \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{2} = \frac{1}{108}\sqrt{2}.$

3. $(3 + \sqrt{5})^2 = [(3 + \sqrt{5})(3 + 5)] = 14 + 6\sqrt{5}.$

4. $(a - \sqrt{b})^3 = a^3 - 3a^2\sqrt{b} + 3ab - b\sqrt{b}.$

Extraction.

Beispiel 1. $\sqrt{10^3} = \sqrt{1000} = \sqrt{(100 \cdot 10)} = \sqrt{100} \times \sqrt{10} = 10\sqrt{10}.$

2. $\sqrt[4]{81\,a^4\,y^6\,z} = \sqrt[4]{(81\,a^4\,y^4 \cdot y^2\,z)} = 3\,a\,y\sqrt[4]{y^2\,z}.$

3. $\sqrt{(a^2 - 4a\sqrt{b} + b^2)} = a - 2\sqrt{b}$, die Operation wird verrichtet wie in der arithmetischen Ausziehung der Quadratwurzel.

Anmerkung. Die Quadratwurzel eines Binoms oder einer Differenz $a \pm b$, oder auch eines Trinoms oder Quadrinoms, kann oft bequem so ausgezogen werden: Man nehme $d = \sqrt{(a^2 - b^2)}$; dann ist $\sqrt{(a \pm b)} = \sqrt{\frac{a+d}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-d}{2}}$. Dieses ist einleuchtend: denn, wenn $\sqrt{\frac{a+d}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-d}{2}}$ quadrirt wird, so kommt $a + \sqrt{(a^2 - d^2)}$ oder $a + b$, wie es seyn muß; und auf gleiche Weise ist von $\sqrt{\frac{a+d}{2}} - \sqrt{\frac{a-d}{2}}$, das Quadrat $a - \sqrt{(a^2 - d^2)}$, oder $a - b$.

Beispiel 1. Die Quadratwurzel von $3 + 2\sqrt{2}$ zu finden.

Hier ist $a = 3$, $b = 2\sqrt{2}$, $d = \sqrt{(9-8)} = 1$,

und $\sqrt{\frac{a+d}{2}} + \sqrt{\frac{a-d}{2}} = \sqrt{\frac{3+1}{2}} + \sqrt{\frac{3-1}{2}} = \sqrt{\frac{4}{2}} + \sqrt{\frac{2}{2}} = \sqrt{2} + \sqrt{1} = 1 + \sqrt{2}$.

2. Die Quadratwurzel von $6 - 2\sqrt{5}$ zu finden.

Hier ist $a = 6$, $b = 2\sqrt{5}$, $d = \sqrt{(36-20)} = \sqrt{16} = 4$,

und $\sqrt{\frac{a+d}{2}} - \sqrt{\frac{a-d}{2}} = \sqrt{\frac{6+4}{2}} - \sqrt{\frac{6-4}{2}} = \sqrt{\frac{10}{2}} - \sqrt{\frac{2}{2}} = \sqrt{5} - 1$.

3. Man suche die Quadratwurzel von $6 + \sqrt{8} - \sqrt{12} - \sqrt{24}$.

Hier ist $a = 6 + \sqrt{8}$, $b = \sqrt{12} + \sqrt{24}$, $d = \sqrt{(6 + \sqrt{8})^2 - (\sqrt{12} + \sqrt{24})^2} = \sqrt{(44 + 12\sqrt{8} - 36 - 2\sqrt{12.24})} = \sqrt{(44 - 36 + 12\sqrt{8} - 12\sqrt{8})} = \sqrt{8}$.

Folglich $\frac{a+d}{2} = \frac{6+2\sqrt{8}}{2} = 3 + \sqrt{8}$, und $\frac{a-d}{2} = \frac{6+\sqrt{8}-\sqrt{8}}{2} = 3$.

Aber (Beisp. 1.) $\sqrt{(3 + 2\sqrt{2})} = \sqrt{(3 + \sqrt{8})} = 1 + \sqrt{2}$. Daher ist die verlangte Wurzel $1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$.*)

8. Abschnitt. Einfache Gleichungen.

Eine algebraische Gleichung ist ein Ausdruck in welchem zwei Größen, die Glieder genannt (seyen sie einfach oder zusammengesetzt), mittels des Zeichens der Gleichheit (=), das zwischen sie gesetzt wird, gleich gesetzt sind.

Wenn in Gleichungen, die aus bekannten und unbekannten Größen bestehen, die unbekannte Größe in einer einzigen Potenz vorkommt, wie x, x^2, x^3, u. s. w., so werden sie überhaupt einfache Gleichungen genannt; und insbesondere, einfache oder rein quadratische, cubische u. s. w. nach dem Exponenten der unbekannten Größe. Wenn aber die unbekannte Größe in derselben Gleichung in zwei oder mehr verschiedenen Potenzen vorkommt, so wird jene eine verwickelte

*) In Hinsicht der cubischen und höhern Wurzeln der Binomen u. s. w. sind dem Leser zu empfehlen die Lehrbücher über die Algebra von Maclaurin, Emerson, Lacroix, Bonnycastle und J. R. Joung.

Gleichung genannt. Also ist $x^2 = a + 15$ eine reine quadratische, $x^2 + ax = b$, eine verwickelte quadratische Gleichung.

Die erste Classe von Gleichungen wollen wir zuerst betrachten.

Die Reduction einer Gleichung besteht in einer solchen Versetzung ihrer Glieder, wodurch am Ende der Operation die unbekannte Größe auf eine Seite des Gleichheitszeichens allein, und in der ersten Potenz zu stehen kommt, und die bekannten Größen, mögen sie durch Buchstaben oder Ziffern bezeichnet seyn, auf die andere. Also von dem, was bisher unbekannt war, wird jetzt behauptet, daß es gleich sey dem Aggregat der Glieder in dem andern Theile der Gleichung.

„Im Allgemeinen wird die unbekannte Größe von allen bekannten befreit, wenn auf beiden Seiten entgegengesetzte Operationen von denjenigen vorgenommen werden," *) welche die Gleichung angiebt, welche sie auch seyn mögen. Z. B.

Wird eine bekannte Größe zu der unbekannten Größe addirt, subtrahire man sie von beiden Seiten der Gleichung.

Wenn eine solche Größe subtrahirt wird, so addire man sie. **)

Wenn die unbekannte Größe einen Multiplicator enthält, so dividire man durch ihn die Gleichung.

Wenn sie durch eine Größe dividirt ist, so multiplicire man durch diese die Gleichung.

Wenn eine Potenz der unbekannten Größe gegeben ist, nehme man die entsprechende Wurzel.

Wenn eine Wurzel von ihr bekannt ist, suche man die entsprechende Potenz.

Wenn die unbekannte Größe in den Gliedern einer Proportion enthalten ist (Arithm. 10. Absch.), bilde man aus den besondern Producten der mittlern und äußern Glieder eine Gleichung; und dann verfahre man nach dem allgemeinen Grundsatze, wie oben.

---

*) Diese einfache Regel, welche die 7 oder 8 besondern Regeln für die Einrichtung der Gleichungen, die von den meisten Schriftstellern über Algebra von Newton bis auf unsere Zeit gegeben worden sind, enthält, ist von Dr. Hutton. Sie stützt sich offenbar auf den mathematischen Grundsatz, daß gleiche Operationen mit gleichen Dingen vorgenommen, gleiche Resultate geben.

**) Diese zwei Operationen leisten das, was man gewöhnlich Transposition nennt.

Beispiele.

1. Es ist gegeben $x-3+5=9$, gesucht x.

Erstens addire man zu beiden Seiten 3, } so haben wir $x+5=9+3=12$.

dann subtrahire man 5, so kommt } $x+5-5=12-5$ oder $x=7$.

Eine nur scheinbar verschiedene Methode wäre folgende: Indem 3 transponirt und ihr Zeichen umgeändert wird, kommt $x+5=9+3$.

Durch Transponirung der 5, und Veränderung ihres Zeichens, $x=9+3-5=7$.

2. Gegeben $3x+5=20$, gesucht x.

Erstens durch Transponirung der 5; $3x=20-5=15$.

durch Division mit 3; $x=\frac{15}{3}=5$.

3. Gegeben $\frac{x}{a}-d=3b-2c$, gesucht x.

Erstens transponire man d; giebt $\frac{x}{a}=3b-2c+d$.

dann multiplicire man durch a; $x=3ab-2ac+ad$.

4. Gegeben $\sqrt[3]{(3x+4)}+2=6$, gesucht x.

Erst transponire die 2, $\sqrt[3]{(3x+4)}=6-2=4$.

Dann cubire man; $3x+4=4^3=64$.

Dann transponire man die 4; $3x=64-4=60$.

Endlich dividire durch 3; $x=\frac{60}{3}=20$.

5. Gegeben $4ax-5b=3dx+4c$, gesucht x.

Erst transponire 5b und 3dx; $4ax-3dx=5b+4c$.

Durch Summirung der Coefficienten ist $(4a-3d)x=5b+4c$.

Daher durch Division mit $4a-3d$, $x=\frac{5b+4c}{4a-3d}$.

6. Gegeben $\frac{1}{4}x+\frac{1}{5}x-\frac{1}{6}x=3$, gesucht x.

Multiplicirt man durch $120=4\times5\times6$, so folgt } $30x+24x-20x=360$.

Durch Summirung der Coefficienten kommt, $34x=360$

Dividirt man nun durch 34; $x=\frac{360}{34}=\frac{180}{17}=10\frac{10}{17}$.

7. Gegeben $\frac{3}{4}x:a=5b:3c$, gesucht x.

Man multiplicire die mittlern und äußern Glieder, $\frac{9}{4}cx=5ab$,

Dividire durch $\frac{9}{4}c$, $x=5ab:\frac{9}{4}c=\frac{20ab}{9c}$.

8. Gegeben $a+x=\sqrt{a^2+x\sqrt{(4b^2+x^2)}}$, gesucht x.

Durch Quadrirung hat man $a^2 + 2ax + x^2 = a^2 + x\sqrt{(4b^2 + x^2)}$

Durch dividiren mit x, $2a + x = \sqrt{(4b^2 + x^2)}$

Durch Quadriren $4a^2 + 4ax + x^2 = 4b^2 + x^2$

Streicht man x^2, und transponirt $4a^2$, $4ax = 4b^2 - 4a^2$

und dividirt man durch 4a, $x = \frac{4b^2 - 4a^2}{4a} = \frac{b^2}{a} - a.$

9. Gegeben $\sqrt{cx - ac} = b + \sqrt{x - a}$, gesucht x.

Erstens, dividirt man durch $\sqrt{x - a}$, haben wir

$$\sqrt{c} = \frac{b}{\sqrt{(x-a)}} + 1;$$

transponirt die 1, $\sqrt{c} - 1$, oder $\frac{\sqrt{c-1}}{1} = \frac{b}{\sqrt{(x-a)}}$;

kehrt die Brüche um und transponirt, $\frac{\sqrt{x-a}}{b} = \frac{1}{\sqrt{c-1}}$

multiplicirt durch b, $\sqrt{(x-a)} = \frac{b}{\sqrt{c-1}}$

quadrirt beide Seiten, $x - a = \frac{b^2}{c - 2\sqrt{c} + 1}$

transponirt a, $x = a + \frac{b^2}{c - 2\sqrt{c} + 1}$.

10. Gegeben $13 - \sqrt{3x} = \sqrt{13 + 3x}$, gesucht x.

Antw. $x = 12$.

11. Gegeben $y + \sqrt{4 + y^2} = \frac{8}{\sqrt{(4 + y^2)}}$, gesucht y.

Antw. $y = \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

12. Gegeben $\frac{1}{3}(x + 1) + \frac{1}{4}(x + 3) = \frac{1}{5}(x + 4) + 16$, gesucht x.

Antw. $x = 41$.

13. Gegeben $\sqrt{\frac{3x}{2}} : \sqrt{(x - 1)} = 3 : 1$, gesucht x.

Antw. $1\frac{1}{5}$.

14. Gegeben $(b^4 + x^4)^{\frac{1}{4}} = (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$, gesucht x.

Antw. $x = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{b^4 - a^4}{2}}$.

Elimination.

Wenn bei einer algebraischen Aufgabe zwei oder mehrere unbekannte Größen in Betrachtung kommen, so werden sie durch eine Reihe gegebener, von einander unabhängiger Glei=

chungen bestimmt. Um nun die einzelnen und bestimmten Auflösungen zu erhalten, muß diese Bedingung statt finden: daß so viele unabhängige Gleichungen gegeben sind, als unbekannte Größen vorkommen. Denn wenn die Zahl der unabhängigen Gleichungen kleiner ist als die der unbekannten Größen, so wird die vorgelegte Frage einer unbestimmten Anzahl von Auflösungen fähig seyn;*) im andern Falle aber würde eine größere Zahl unabhängiger Gleichungen als unbekannter Größen, die Unmöglichkeit oder Absurdheit der Aufgabe anzeigen**).

Wo zwei unbekannte Größen aus zwei unabhängigen Gleichungen zu bestimmen sind, kann eine oder die andere der folgenden Regeln angewandt werden.

1. Man suche den Werth von einem der unbekannten Buchstaben in jeder der gegebenen Gleichungen, setze diese beiden Werthe in einer dritten Gleichung einander gleich, und bestimme aus dieser den Werth des andern unbekannten Buchstabens. Diesen Werth dafür in jede der erstern Gleichungen substituirt, führt auf die Bestimmung der ersten unbekannten Größe.

2. Man suche den Werth einer jeden der unbekannten Größen in einer der Gleichungen, und substituire ihn in der andern Gleichung, so wird die andere unbekannte Größe bekannt, und dann die erste, wie vorher.

3. Oder, wenn es nach gehöriger Reduction erforderlich ist, multiplicire man die erste Gleichung durch den Coefficienten einer der unbekannten Größen in der zweiten Gleichung, und die zweite Gleichung durch den Coefficienten derselben unbekannten Größe in der ersten Gleichung: dann wird die unbekannte Größe durch Addiren oder Subtrahiren der entstandenen Gleichungen (je nachdem die Vorzeichen der unbekannten Größe, deren Coefficienten jetzt gleich gemacht sind, ungleichartig oder gleichartig sind) getilgt, und führt auf die Bestimmung der andern durch die erstern Regeln.

Anmerkungen. Die dritte Regel ist gewöhnlich die bequemste und in der Praxis die kürzeste.

---

*) Obschon dieses allgemein wahr ist, so findet doch eine schlagende Ausnahme statt, in den Fällen nämlich, wo Gleichungen theils aus rationalen Größen und theils aus irrationalen Quadratwurzeln bestehn; wo zwei unbekannte Größen durch eine Gleichung, vier unbekannte Größen durch zwei Gleichungen u. s. w. bestimmbar sind.

z. B. wenn $x + \sqrt{y} = a + \sqrt{b}$

und $z - \sqrt{v} = c - \sqrt{d}$

so ist $x = a$, $y = b$, $z = c$, $v = d$.

**) Wenn nämlich die Gleichungen widersprechende Bestimmungen der Unbekannten enthielten. (D.)

Dieſelben Regeln laſſen ſich, mutatis mutandis, auf Gleichungen anwenden, die drei, vier oder mehrere unbekannte Größen enthalten; auch dienen ſie oft um Gleichungen herabzuſetzen, oder ſie von einem höhern anf einen niedern Grad zu reduciren.

Beiſpiele.

1. Gegeben $4x^3 + 3y = 41$, und $3x^3 - 4y = 12$, geſucht x und y.

1ſte Gleichung, $\times$ 3, giebt $12x^3 + 9x = 123$
2te Gleichung, $\times$ 4, giebt $12x^3 - 16y = 48$.
Die Differenz von dieſen, $25y = 75$, woraus $y = 3$.
Dann aus Gleichung 2, $3x^3 = 12 + 4y = 12 + 12 = 24$
Woraus durch dividiren mit 3, $x^3 = 8$, oder $x = 2$.

Beiſpiel 2. Gegeben $x + y + z = 53$, $x + 2y + 3z = 105$, und $x + 3y + 4z = 134$.

1. $x + y + z = 53$
2. $x + 2y + 3z = 105$
3. $x + 3y + 4z = 134$
4. 1ſte Gleichung von der 2ten abgezogen, giebt $y + 2z = 52$
5. 2te Gleichung von der 3ten abgezogen, $y + z = 29$
6. 5te Gleichung von der 4ten abgezogen, $z = 23$
7. 6te Gleichung von der 5ten abgezogen, $y = 6$
8. 5te Gleichung von der 1ſten abgezogen, $x = 24$

Beiſpiel 3. Gegeben $x + y = a$, $x + z = b$, $y + z = c$, geſucht x, y und z.

1. $x + y = a$
2. $x + z = b$
3. $y + z = c$
4. 1ſte + 2te + 3te, giebt $2x + 2y + 2z = a + b + c$.
5. Halbire die 4te Gleichung, giebt $x + y + z = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$.
6. 3te Gleichung ſubtrahirt v. d. 5ten, giebt $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$.
7. 2te Gleichung ſubtrahirt v. d. 5ten, giebt $y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$.
8. 1ſte Gleichung ſubtrahirt v. d. 5ten, giebt $z = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$.

Beiſpiel 4. Gegeben $ax + by = c$ und $a'x + b'y = c'$, geſucht x und y.

Antw. $x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}$ und $y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$.

Beiſpiel 5. Gegeben $ax + by + cz = d$, $a'x + b'y + c'z = d'$, $a''x + b''y + c''z = d''$, geſucht x, y und z.
Antwort:

$$x = \frac{db'c'' - dc'b'' + cd'b'' - bd'c'' + bc'd'' - cb'd''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}.$$

$$y = \frac{ad'c'' - ac'd'' + ca'd'' - da'c'' + dc'a'' - cd'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}.$$

$$z = \frac{ab'd'' - ad'b'' + da'b'' - ba'd'' + bd'a'' - db'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}.$$

Beispiel 6. Gegeben $\left.\begin{array}{l} x(x+y+z)=18 \\ y(x+y+z)=27 \\ z(x+y+z)=36 \end{array}\right\}$ gesucht x, y und z.

Antw. $x=2,\ y=3,\ z=4.$

Beispiel. 7. Gegeben $(x+y)\frac{x}{y} = 60$, und $(x+y)\frac{y}{x} = 2\frac{2}{3}$, gesucht x und y. Antw. $x=10,\ y=2.$

Beispiel 8. Gegeben $\left.\begin{array}{l} x+y : x-y = 8 : 5 \\ \text{und } x+y : 2y = 8 : 3 \end{array}\right\}$ gesucht x und y.

Antw. $x=65,\ y=15.$

Auflösung allgemeiner Aufgaben.

Eine algebraische Aufgabe heißt allgemein, wenn alle die in Betracht kommenden Größen, sowohl bekannte als unbekannte, durch Buchstaben oder andere allgemeine Zeichen ausgedrückt sind. Dies beschränkt sich aber nicht blos auf solche Aufgaben, in denen die gegebenen Stücke allgemeine Ausdrücke sind; man kann auch jedes besondere Zahlen-Problem allgemein machen, wenn man für die darin vorkommenden bekannten Größen, Buchstaben substituirt; wenn dieses geschieht, so wird das Problem, welches ursprünglich in einer besondern Form dargestellt war, allgemein.

Bei Auflösung einer algebraischen Aufgabe muß irgend ein Buchstabe des Alphabeths für die unbekannte Größe gesetzt werden. Und wenn mehr als eine unbekannte Größe vorhanden ist, so muß auch die zweite, dritte, u. s. w., als abhängig von der ersten, in Verbindung mit einer oder der andern der gegebenen, oder durch eben so viel verschiedene Buchstaben ausgedrückt werden. Auf diese Weise erhält man eben so viel abgesonderte Gleichungen, und die Auflösung derselben, nach einer der gegebenen Regeln, wird auf die Bestimmung der verlangten Größen führen.

Beispiele.

1. Es sind gegeben die Summe zweier Größen und die Differenz ihrer Quadrate, man verlangt diese Größen einzeln.

Man bezeichne die Summe durch s, die Differenz der Quadrate durch d; und die beiden gesuchten Größen respective durch x und y.

Dann wird die erste Bedingung der Aufgabe algebraisch ausgedrückt durch $x + y = s$.

Und die zweite ist $x^2 - y^2 = d$.

Gleichung 2 dividirt durch Gleichung 1, giebt $x - y = \frac{d}{s}$.

Gleichung 1 addirt zur Gleichung 3, giebt $2x = \frac{d}{s} + s = \frac{s^2 + d}{s}$.

Gleichung 4 dividirt durch 2, giebt $x = \frac{s^2 + d}{2s}$.

Gleichung 5 subtrahirt von Gleichung 1, giebt $y = s - \frac{s^2 + d}{2s} = \frac{s^2 - d}{2s}$.

Diese allgemeine Auflösung auf ein besonderes Beispiel anzuwenden, nehme man an: die Summe sey 6, und die Differenz der Quadrate 12. Dann $s = 6$ und $d = 12$.

$$\text{und } x = \frac{s^2 + d}{2s} = \frac{36 + 12}{12} = \frac{48}{12} = 4.$$

$$\text{und } y = \frac{s^2 - d}{2s} = \frac{36 - 12}{12} = \frac{24}{12} = 2.$$

Nimmt man an, $s = 5$, $d = 5$:

$$\text{dann ist } x = \frac{25 + 5}{10} = 3, \text{ und } y = \frac{25 - 5}{10} = 2.$$

Beispiel 2. Es ist gegeben das Product zweier Zahlen und ihr Quotient, man suche die Zahlen selbst.

Es sey p das gegebene Product, q der Quotient; und die verlangten Zahlen seien x und y, wie zuvor. Dann haben wir, 1. $xy = p$

und 2. $\frac{x}{y} = q$.

Gleichung 2 $\times$ durch y, giebt $x = qy$

dieser Werth für x in Gleichung 1 substituirt $\Big\}$ $qy^2 = p$

dividirt durch q, $y^2 = \frac{p}{q}$

Zieht man die Quadratwurzel aus, $y = \sqrt{\frac{p}{q}}$

Dann durch Subst[illegible]irung, $x = qy = q\sqrt{\frac{p}{q}} = \sqrt{\frac{pq^2}{q}} = \sqrt{pq}$.

Angenommen, das Product wäre 50 und der Quotient 2.

Dann $y = \sqrt{\frac{p}{q}} = \sqrt{\frac{50}{2}} = \sqrt{25} = 5$, und $x = \sqrt{pq} = \sqrt{100} = 10$.

Eben so: nimmt man an, das Product sey 36, und der Quotient $2\frac{1}{4}$.

Dann $y = \sqrt{\frac{p}{q}} = \sqrt{\frac{36}{2\frac{1}{4}}} = \sqrt{16} = 4$, nnd $x = \sqrt{pq} = \sqrt{81} = 9$.

Beispiel 3. Es ist gegeben die Summe s zweier Zahlen, und die Summe ihrer Quadrate S, diese Zahlen zu finden.

Antw. $x = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}\sqrt{2S - s^2}$, und $y = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}\sqrt{2S - s^2}$.

Beispiel 4. Es ist die Summe und das Product zweier Zahlen gleich, und wenn man zur Summe oder zum Producte die Summe der Quadrate addirt, erhält man zum Resultate 12. Welches sind die Zahlen?

Antw. jede = 2.

Beispiel 5. Das Quadrat von der größeren zweier Zahlen, multiplicirt in die kleinere, giebt 75; und das Quadrat der kleinern, multiplicirt in die größere, giebt 45. Welches sind die Zahlen? — Antw. 5 und 3.

Beispiel 6. Ein Mann hat 6 Söhne, die der Reihe nach an Alter um vier Jahre verschieden sind; der älteste ist dreimal so alt als der jüngste. Man verlangt ihre verschiedenen Alter? — Antw. 10, 14, 18, 22, 26 und 30 Jahre.

9. Abschnitt. Quadratische Gleichungen.

Wenn, nach gehöriger Verwandlung, Gleichungen die allgemeine Form $Ax^2 + Bx + C = 0$ annehmen, und man dividirt sie durch A, den Coefficienten des ersten Gliedes, so erhält man $x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} = 0$, oder indem man $p = \frac{B}{A}$, $q = \frac{C}{A}$ macht, haben wir $x^2 + px + q = 0$ ..... (1)
eine Gleichung, welche alle des zweiten Grades vorstellen kann, indem p und q bekannte Zahlen positiv oder negativ sind.

Es sey a eine Zahl oder Größe, welche, wenn sie für x substituirt wird $x^2 + px + q = 0$ macht; dann ist $a^2 + pa + q = 0$, oder $q = -a^2 - pa$. Folglich ist $x^2 + px + p$, dasselbe als $x^2 - a^2 + px - pa$, oder als $(x + a)(x - a) + p(x - a)$, oder endlich als $(x - a)(x + a + p)$.

Die Frage ist dann auf folgende reducirt: alle die Werthe von x zu finden, welche das Product der obigen zwei Factoren gleich Null machen. Dies wird offenbar der Fall seyn, wenn jeder der Factoren $= 0$ ist; aber in keinem andern Falle. Daher haben wir $x - a = 0$, und $x + a + p = 0$, oder $x = a$, und $x = -a - p$ *).

Und daher können wir schließen —

1. daß jede Gleichung vom zweiten Grade, deren Bedingungen durch einen Werth a von x Genüge geleistet wird, auch einen andern Werth $-a-p$ zuläßt. Diese Werthe werden die Wurzeln der quadratischen Gleichung genannt.

2. Die Summe der beiden Wurzeln a und $-a-p$ ist $-p$; ihr Product ist $-a^2 - ap$, welches offenbar oben $= q$ ist; so daß der Coefficient, p, des zweiten Gliedes, die Summe der Wurzeln mit entgegengesetzten Vorzeichen ist; das bekannte Glied, q, ist ihr Product.

3. Es ist leicht, eine quadratische Gleichung zu bestimmen, deren Wurzeln die gegebenen Größen b und d seyn werden. Es ist offenbar $x^2 - (b+d)x + bd = 0$.

4. Die Bestimmung der Wurzeln der vorgeschlagenen Gleichung (1) ist gleichgeltend mit der: zwei Zahlen zu finden, deren Summe $-p$ ist, und Product q.

5. Wenn die Wurzeln b und d gleich sind, so sind die Factoren $x - b$ und $x - d$ gleich; und $x^2 + px + q$ ist das Quadrat von einem derselben.

Um eine quadratische Gleichung von der Form $x^2 + px + q = 0$ aufzulösen, bemerke man daß das Quadrat von $x + \frac{1}{2}p$ ein Trinom $x^2 + px + \frac{1}{4}p^2$ ist, von welchem die ersten zwei Glieder mit den ersten zwei Gliedern der gegebenen Gleichung übereinstimmen, oder mit dem ersten Theile der Gleichung, wenn q tranponirt ist,

das ist, mit $x^2 + px = -q$

Addirt man dann beiderseits $\frac{1}{4}p^2$, so haben wir $x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 = \frac{1}{4}p^2 - q$,

wovon der erste Theil ein vollständiges Quadrat ist.

---

*) Wenn man behauptete, daß die gegebene Gleichung noch einen andern Werth von x, außer den obigen, zuließe, b zum Beispiel, so kann, wie zuvor, bewiesen werden, daß $x - b$ unter der Zahl der Factoren von $x^2 + px + q$, oder von $(x-a)(x+a+p)$ ist. Aber $x - a$ und $x + a + p$ sind Primzahlen zu einander, oder haben keinen gemeinschaftlichen Factor, ihr Product kann keinen andern Factor haben als sie. Folglich muß b entweder gleich a seyn, oder gleich $-a-p$; und die Zahl der Wurzeln ist auf zwei eingeschränkt.

Seine Wurzel ist $x + \frac{1}{2}p = \pm\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$
und folglich $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$.
Auf andere Weise haben wir oben, nach Nummer 2 *),
$x + x' = -p$ und $xx' = q$.
Indem man nun 4 mal die zweite dieser Gleichungen von dem Quadrate der ersten abzieht, bleibt $x^2 - 2xx' + x'^2 = p^2 - 4q$
Woraus, wenn man die Quadratwurzel nimmt, $x - x' = \sqrt{(p^2 - 4p)}$
Die Hälfte davon zur Hälfter der Gleichung 1. addirt, gibet $x = -\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}\sqrt{(p^2 - 4q)} = -\frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$
Und dasselbe von der Hälfte der Gleichung 1. genommen, giebt $x' = -\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}\sqrt{(p^2 - 4q)} = -\frac{1}{2}p - \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$ welche beiden Werthe von x offenbar mit dem Vorhergehenden stimmen.

Es würde leicht seyn, die einzelnen Fälle, welche nach den verschiedenen Zeichen und verschiedenen Werthen von p und q vorkommen können, aufzulösen. Diese aber durchzugehen ist hier nicht nothwendig. Es ist offenbar, daß hier gegeben seyn kann:

1. $x^2 + px = q$
2. $x^2 - px = q$
3. $x^2 + px = -q$
4. $x^2 - px = -q$

Die allgemeine Methode der Auflösung besteht in der Ergänzung des Quadrats, das heißt man addirt das Quadrat von $\frac{1}{2}p$ zu beiden Gliedern der Gleichung, und zieht dann die Wurzel aus.

Man kann ferner bemerken, daß alle diejenigen Gleichungen durch Ergänzung des Quadrats, wie quadratische aufgelöst werden können, in welchen sich zwei Glieder befinden, die die unbekannte Größe, oder eine Function von ihr mit Exponenten enthalten, von denen der eine das Doppelte des andern ist. Z. B. $x^6 \pm px^3 = q$, $x^{2n} \pm px^n = q$, $x^{\frac{n}{2}} \pm px^{\frac{n}{4}} = q$, $(x^2 + px + p)^2 \pm (x^2 + px + q) = r$, $(x^{2n} - x^n)^2 \pm (x^{2n} - x^n) = q$, u. s. w. sind von derselben Form wie quadratische, und lassen eine gleiche Bestimmung der unbekannten Größe zu. Manche Gleichungen, in welchen mehr als eine unbekannte Größe enthalten ist, können auf diese Weise, durch Ergänzung des Quadrats und Reduction auf niedrigere

---

*) Wo nämlich x' den andern Werth von x bedeutet. (D.)

Dimensionen gebracht werden; z. B. $(x^3+y^3)^2 \pm p(x^3+y^3)=q$, $\frac{x^2}{y^2} \pm \frac{px}{y}=q$, u. s. w.

Anmerkung. In manchen Fällen kann eine quadratische Gleichung, ohne durch den Coefficienten des Quadrats zu dividiren, bequem, und also ohne Brüche einzuführen, gelöst werden. Um die allgemeine Gleichung $ax^2 \pm bx=c$, zu lösen, multiplicire man z. B. die ganze Gleichung durch $4a$, woraus $4a^2x^2 \pm 4abx=4ac$; addirt man b^2, um das Quadrat zu ergänzen, folgt $4a^2x^2 \pm 4abx+b^2=4ac+b^2$ hiervon die Quadratwurzel $2ax \pm b=\pm\sqrt{(4ac+b^2)}$; woraus $x=\frac{\mp b+\sqrt{(4ac+b^2)}}{2a}$: welche Formel man als ein allgemeines Theorem ansehen kann.

Beispiele.

1. Gegeben $x^2-8x+10=19$, gesucht x.
   Man tranponire die 10, $x^2-8x=19-10=9$
   ergänze das Quadrat, $x^2-8x+16=9+16=25$
   ziehe die Wurzel aus, $x-4=\pm 5$;
   folglich $x=4 \pm 5=9$ oder -1.

2. Gegeben $\frac{10}{x}-\frac{14-2x}{x^2}=\frac{22}{9}$, gesucht die Werthe von x.

   Man multiplicire durch x^2, $10x-14+2x=\frac{22x^2}{9}$,
   transponire, $\frac{22}{9}x^2-12x=-14$,
   dividire durch $\frac{22}{9}$, $x^2-\frac{54}{11}x=-\frac{63}{11}$,
   ergänze das Quadrat, $x^2-\frac{54}{11}x+(\frac{27}{11})^2=\frac{729}{121}-\frac{63}{11}=\frac{36}{121}$,
   ziehe die Wurzel aus, $x-\frac{27}{11}=\pm\frac{6}{11}$,
   transponire, $x=\frac{27}{11} \pm \frac{6}{11}=3$ oder $\frac{21}{11}$.

3. Gegeben $x^2+2x+4\sqrt{x^2+2x+1}=44$, gesucht x.
   Man addire 1, kömmt $(x^2+2x+1)+4\sqrt{(x^2+2x+1)}=45$
   ergänze das Quadrat, $(x^2+2x+1)+4\sqrt{(x^2+2x+1)}+4=49$
   ziehe die Wurzel aus, $\sqrt{(x^2+2x+1)}+2=+7$
   transponire die 2, $\sqrt{(x^2+2x+1)}=\pm 7-2=5$ oder -9
   das ist, $x+1=5$ oder -9
   daher $x=4$ oder -10.

4. Gegeben $x^n - 2ax^{\frac{n}{2}} = c$, gesucht x.

Man ergänze das Quadrat $x^n - 2ax^{\frac{n}{2}} + a^2 = c + a^2$

ziehe die Wurzel aus, $x^{\frac{n}{2}} - a = \pm\sqrt{(c + a^2)}$

folglich, $x = (a \pm \sqrt{c + a^2})^{\frac{n}{2}}$

5. Gegeben $\frac{x^2}{y^2} + \frac{4x}{y} = 12$, und $x - y = 2$, gesucht x und y.

ergänze d. Quadr. in Gleichung 1, $\frac{x^2}{y^2} + 4\frac{x}{y} + 4 = 16$.

ziehe die Wurzel aus $\frac{x}{y} + 2 = \pm 4$: woraus $\frac{x}{y} = 2$ oder -6, und $x = 2y$ oder $= -6y$.

Man substituire den ersten Werth von x in die zweite Gleichung, so kommt $2y - y = 2$, oder $y = 2$; woraus $x = 4$.

Substituirt man wieder den zweiten Werth von x in Gleichung 2, so kommt $-6y - y$ oder $-7y = 2$; woraus $y = -\frac{2}{7}$, und $x = +\frac{12}{7}$.

6. Gegeben $x^2y^2 - 5 = 4xy$, und $\frac{1}{2}xy = \frac{5}{2}y^3$, gesucht x und y.

Gleichung 1. Durch Transponirung, wird $x^2y^2 - 4xy = 5$

Man ergänze das Quadrat, $x^2y^2 - 4xy + 4 = 9$,

ziehe die Wurzel aus, $xy - 2 = \pm 3$

woraus $xy = 5$ oder -1.

Substituirt man den ersten dieser Werthe für xy in Gleichung 2, so kommt $\frac{5}{2}y^3 = \frac{5}{2}$: woraus $y = 1$ und $x = 5$.

Substituirt man den 2ten Werth in derselben Gleichung, so folgt $\frac{5}{2}y^3 = -\frac{1}{2}$ und $y = -\sqrt[3]{\frac{1}{5}} = -\frac{1}{5}\sqrt[3]{25}$, und $x = -1 : -\frac{1}{5}\sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{5}$.

7. Gegeben $\frac{x^2}{(x^2-4)^2} + \frac{6}{x^2-4} = \frac{351}{25x^2}$, gesucht x.

Antw. $x = \pm 3$, oder $\pm\sqrt{\frac{39}{11}}$.

8. Ein Mann der mit gleichförmiger Geschwindigkeit 105 (englische) Meilen gereis't war, fand dann, daß, wenn er die Stunde zwei Meilen weniger zurückgelegt hätte, er diese Reise sechs Stunden später vollendet haben würde. Wie viele Meilen reis'te er in einer Stunde?

Antw. 7 Meilen die Stunde.

9. Es sollen zwei Zahlen gefunden werden, deren Summe, Product, und Differenz ihrer Quadrate gleich ist.

Antw. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$, und $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$.

10. Ein Fährmann der eilf Meilen in einer Stunde mit dem Strome rudern kann, und zwei Meilen die Stunde gegen ihn, rudert fünf Meilen auf einem Flusse, und wieder zurück in drei Stunden: indem man nun annimmt, daß der Strom auf dem ganzen Wege, der in den drei Stunden zurückgelegt wird, gleichmäßig strömt, so verlangt man die Schnelligkeit des Schiffers zu wissen?

Antw. $4\frac{9}{44}$ Meilen die Stunde.

10. Abschnitt. Gleichungen im Allgemeinen.

Gleichungen im Allgemeinen können, wie wir schon bei den quadratischen gesehen haben, durch Multiplication von Factoren gebildet oder dargestellt werden. Man nehme nun an, die Werthe der unbekannten Größe x in einer Gleichung wären ausgedrückt durch a, b, c, d, u. s. w., d. i. man lasse $x=a$, $x=b$, $x=c$, $x=d$, u. s. w. seyn, so werden $x-a=0$, $x-b=0$, $x-c=0$, $x-d=0$, u. s. w. die einfachen Wurzelgleichungen seyn, aus denen die der höhern Ordnungen zusammengesetzt sind. Sodann: so wie das Product von zweien derselben eine quadratische Gleichung giebt, so wird das Product aus dreien von ihnen wie $(x-a)(x-b)(x-c)=0$, eine cubische Gleichung oder eine von drei Dimensionen geben. Das Product aus vieren derselben wird eine biquadratische Gleichung, oder eine von vier Dimensionen erzeugen; u. s. f. Daher, ist im Allgemeinen die höchste Dimension der unbekannten Größe x in irgend einer Gleichung, gleich der Anzahl einfacher Gleichungen, die, um jene zu erzeugen, in einander zu multipliciren sind.

Wenn irgend eine Gleichung wie diese biquadratische $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=0$, aufzulösen ist, so besteht die ganze Schwierigkeit darin, die einfachen Gleichungen $x-a=0$, $x-b=0$, $x-c=0$, $x-d=0$, zu finden, durch deren Multiplication sie entstanden ist; denn jede dieser einfachen Gleichungen giebt einen der Werthe von x, und eine Auflösung der vorgelegten Gleichung. Wenn nämlich irgend einer der Werthe von x, aus diesen einfachen Gleichungen hergeleitet, in die gegebene Gleichung an die Stelle von x substituirt wird, so werden alle Glieder dieser Gleichung verschwinden, und das Ganze wird gleich Null. Denn nimmt man an, daß $x=a$, oder $x=b$, oder $x=c$, oder $x=$

d, so verschwindet das Product $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$, weil einer der Factoren gleich Null ist. Daher giebt es vier Voraussetzungen, die zufolge der vorgelegten Gleichung $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=0$ geben. Auf dieselbe Art läßt jede andere Gleichung so viele Auflösungen zu, als einfache Gleichungen, die sie durch Multiplication erzeugen, vorhanden oder so viel als Einheiten in der höchsten Dimension der unbekannten Größe in der vorgelegten Gleichung enthalten sind.

Da es aber außer diesen vier Größen (a, b, c, d), keine mehr giebt, die, in das vorgelegte Product in die Stelle von x substituirt, das Product verschwindend machten, so kann es für die Gleichung $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=0$, nothwendiger Weise nicht mehr als vier Wurzeln geben, und es können nicht mehr als vier Auflösungen möglich seyn. Substituiren wir in dieses Product eine Größe e, die weder gleich a, noch b, noch c, noch d ist, so ist weder $e-a$, $e-b$, $e-c$, noch $e-d$ gleich Null; es kann also auch ihr Product nicht gleich Null, sondern es muß ein reales Product sein: und daher giebt es außer den genannten vieren keine Annahme mehr, die genau einen Werth von x in der vorgelegten Gleichung gäbe.

Es ist also einleuchtend, daß keine Gleichung mehr Wurzeln haben kann, als sie Dimensionen der unbekannten Größe enthält. Um dieses alles durch ein Beispiel in Zahlen noch klarer zu machen, sey die Gleichung $x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$ zu lösen. Wenn wir nun bemerken, daß diese Gleichung mit dem Producte von $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ einerlei ist, so werden wir schließen, daß 1, 2, 3, 4, die Werthe von x sind; weil eine dieser Zahlen, an der Stelle von x, dieses Product giebt, und folglich $x^4-10x^3+35x^2-50x+24$, nach der vorgelegten Gleichung gleich Null ist. Es ist klar daß außer diesen vier Werthen für x kein anderer statt finden kann: denn wenn wir eine andere Zahl für x in die Factoren $x-1$, $x-2$, $x-3$, $x-4$ substituirten, würde keiner von ihnen verschwinden, und also kann ihr Product, der Gleichung zufolge, nicht gleich Null seyn.

Verschiedene für die Auflösung der Gleichungen gegebene Regeln, von denen einige sehr sinnreich sind, findet man in den vorzüglichsten algebraischen Schriften*); wir wollen jedoch blos die einfache Näherungsregel, wie sie Dr. Hutton im 1sten Bande seines „Course of Mathematics“ giebt, beibringen.

---

*) Man sehe die Lehrbücher von Lacroix, Bonnycastle, Wood, J. R. Young, u. s. w.

Regel.

„1. Man suche, durch Probiren, zwei Zahlen, die der wahren Wurzel so nahe als möglich kommen, und substituire sie in die gegebene Gleichung anstatt der unbekannten Größe; und bemerke die Fehler, welche aus einer jeden von ihnen hervorgeht.

„2. Man multiplicire die Differenz beider Zahlen, welche durch Probiren gefunden worden sind, durch den kleineren Fehler, und dividire das Product durch die Differenz der Fehler, wenn sie gleichartig sind, aber durch ihre Summe, wenn sie ungleichartig sind. Oder man sage, wie sich die Differenz oder Summe der Fehler zur Differenz der beiden Zahlen verhält, so verhält sich der kleinere Fehler zur Verbesserung der angenommenen Zahl.

„3. Man addire den zuletzt gefundenen Quotienten zu der Zahl, welcher der kleinere Fehler zugehört, wenn diese Zahl zu klein ist; aber man subtrahire ihn, wenn sie zu groß ist, und das Resultat wird die Wurzel angenähert geben.

„4. Man nehme diese Wurzel und die nächste der beiden erstern, oder jede andere, die näher gefunden worden ist; und indem man auf gleiche Art verfährt, wird man eine Wurzel erhalten, die der wahren näher kommt als die vorige; und so ferner bis zu einem beliebigen Grade von Genauigkeit.

„Anmerkung. Am besten ist es die beiden angenommenen Zahlen so zu wählen, daß sie in der letzten Ziffer zur Rechten blos um Eins verschieden sind; weil dann die Differenz, oder der Multiplicator, 1 ist.“

Beispiel.

Die Wurzel der cubischen Gleichung $x^3 + x^2 + x = 100$, oder den Werth von x zu finden.

Hier findet man bald daß x zwischen 4 und 5 liegt. Man nehme daher diese beiden Zahlen an, u. operire auf folgende Weise:

1ste Annahme		2te Annahme.
4	x	5
16	x^2	25
64	x^3	125
84	Summen	155
−16	Fehler	+ 55

Die Summe davon ist 71.
Dann 71 : 1 = 16 : 0,255.
Hieraus x = 4,225 nahe.

Eben so nehme man an 4,2 und 4,3, und wiederhole das Verfahren also:

4,2	x	4,3
17,64	x^2	18,49
74,088	x^3	79,507
95,928	Summen	102,297
−4,072	Fehler	+ 2,297

Die Summe davon ist 6,369.
Dann
6,369 : 0,1 = 2,297 : 0,036
dies abgezogen von 4,300
bleibt x nahe = 4,264

Ferner nehme man 4,264 und 4,265, und verfahre auf folgende Art:

4,264	x	4,265
18,181696	x^2	18,190225
77,526752	x^3	77,581310
99,972448	Summen	100,036535
−0,027552	Fehler	+ 0,036535

Die Summe davon ist 0,064087.

dann: 0,064087 : 0,001 = 0,027552 : 0,00042999

zu diesen addirt 4,264

giebt x sehr nahe = 4,2644299

Wenn eine der Wurzeln einer Gleichung auf solch eine Weise gefunden ist, dann nehme man die gegebene Gleichung, in der das bekannte Glied auf die Seite der unbekannten Größen der Gleichung transponirt ist, als einen Dividend, und als Divisor x minus der genau bestimmten Wurzel an: so wird der Quotient gleich Null seyn, und wird eine neue Gleichung geben, die um einen Grad niedriger ist als die erstere. Aus dieser kann man einen neuen Werth x finden, u. s. f. bis die Gleichung auf eine quadratische zurückgebracht ist, aus welcher die Wurzeln nach den gewöhnlichen Regeln gefunden werden können.

11. Abschnitt. Progression.

Wenn eine Reihe von Gliedern nach einer bestimmten Ordnung fortschreitet, entweder von dem Kleinern zum Größern, oder von dem Größern zum Kleinern, nach immer gleichen Differenzen oder nach fortwährend gleichen Producten, so sagt man, sie bilden eine Progression oder Reihe. Wenn die Größen nach gleichen Differenzen fortschreiten, sagt man sie bilden eine arithmetische Progression. Schreiten sie aber nach denselben Proportionen fort, oder nach gleichen Producten oder Quotienten, so sagt man, sie bilden eine geometrische Progression.

Wenn die Glieder einer Progression successive wachsen, wird sie eine steigende Progression genannt; wenn sie aber successive abnehmen, wird sie eine fallende Progression genannt.

Z. B. 1, 3, 5, 7, 9, u. s. w. bilden eine steigende arithmetische
24, 22, 20, 18, 16, u. s. w. bilden eine fallende arithm.
1, 3, 9, 27, 81, u. s. w. bilden eine steigende geometrische
4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, u. s. w. bilden eine fallende geometr.

} Progression.

Arithmetische Progression.

1. Es sey a das erste Glied einer arithmetischen Progression
d die gemeinschaftliche Differenz der Glieder
z das letzte Glied
n die Anzahl der Glieder
s die Summe aller Glieder.

Dann ist a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$, u. s. w. eine steigende Progression, und a, $a-d$, $a-2d$, $a-3d$, u. s. w. eine fallende Progression.

Daher ist in einer steigenden Progression $a+(n-1)d$, das letzte Glied;

in einer fallenden Progression ist $a-(n-1)d$, das letzte Glied.

2. Die Reihe sey $a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)$.
dieselbe umgekehrt, $(a+3d)+(a+2d)+(a+d)+a$.
die Summe von beiden, $(2a+3d)+(2a+3d)+(2a+3d)+(2a+3d)=2s$;

Das ist, $(2a+3d)\times 4$; folglich in diesem Falle allgemein $(a+a+3d)n=2s$;

folglich, $s=\frac{1}{2}(a+a+3d)n$, oder $=\frac{1}{2}(a+z)n$, weil z hier $= a+3d$ ist. Dasselbe würde man erhalten, wenn die Progression fallend wäre; die Zahl der Glieder mag seyn welche sie will.

3. Aus den Gleichungen $z=a+(n-1)d$, $s=\frac{1}{2}n(a+z)$, und $s=\frac{1}{2}n(a+a+(n-1)d)$, können wir sogleich die nachfolgenden, auf steigende Reihen anwendbaren Formeln ableiten. Wenn die Reihe fallend ist, müssen entweder die Zeichen der mit d behafteten Glieder geändert, oder a muß statt z genommen werden, und umgekehrt.

(1.) $a=z-nd+d=\sqrt{(-2sd+z^2+dz+\frac{1}{4}d^2)}+\frac{1}{2}d=\frac{s}{n}+\frac{1}{2}d-\frac{1}{2}nd=\frac{2s}{n}-z.$

(2.) $d=\frac{z-a}{n-1}=\frac{z^2-a^2}{2s-z-a}=\frac{2zn-2s}{n^2-n}=\frac{2s-2na}{n^2-n}$.

(3.) $z=a+nd-d=\frac{s}{n}+\frac{1}{2}nd-\frac{1}{2}d=$
$\sqrt{(2sd+a^2-ad+\frac{1}{4}d^2)}-\frac{1}{2}d=\frac{2s}{n}-a.$

(4.) $s=\frac{1}{2}n(a+z)=(a+\frac{1}{2}nd-\frac{1}{2}d)n=(z-\frac{1}{2}nd+\frac{1}{2}d)n=\frac{z^2-a^2+d(z+a)}{2d}$.

$$(5.)\ n = \frac{2s}{a+z} = \frac{z-a}{d} - 1.$$

Beispiele.

1. Man verlangt die Summe von 20 Gliedern der Progression 1, 3, 5, 7, 9, u. s. w.

Hier $a = 1$, $d = 2$, $n = 20$, welche in die Formel $s = (a + \frac{1}{2}nd - \frac{1}{2}d)n$ substituirt, diese verwandeln in $s = (1 + 20 - 1)20 = 2 \times 20 = 400$, die verlangte Summe.

Anmerkung. In jedem Falle würde die Summe einer Reihe ungerader Zahlen die mit der Einheit anfinge $= n^2$, das Quadrat der Anzahl der Glieder seyn.

2. Das erste Glied einer arithmetischen Progression ist 5, das letzte Glied 41, die Summe 299. Man verlangt die Anzahl der Glieder, und die gemeinschaftliche Differenz.

Hier ist $n = \frac{2s}{a+z} = \frac{598}{46} = 13$, die Anzahl der Glieder

und $d = \frac{z-a}{n-1} = \frac{41-5}{12} = 3$, die gemeinschaftliche Differenz.

3. Es giebt 8, gleiche Differenzen habende, Zahlen; die kleinste ist 4, die größte 32. Welches sind die Zahlen?

Hier giebt $d = \frac{z-a}{n-1} = \frac{32-4}{7} = 4$, die gemeinschaftliche Differenz.

Daher 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, die Zahlen sind.

4. Das erste Glied einer arithmetischen Progression ist 3, die Zahl der Glieder 50, die Summe der Progression 2600. Man verlangt das letzte Glied und die gemeinschaftliche Differenz.

Hier ist $z = \frac{2s}{n} - a = \frac{5200}{50} - 3 = 104 - 3 = 101$, das letzte Glied.

und $d = \frac{z-a}{n-1} = \frac{101-3}{49} = 2$ die gemeinschaftliche Differenz.

5. Die Summe von 6 Zahlen in arithmetischer Progression ist 48; und wenn die gemeinschaftliche Differenz d multiplicirt wird in das kleinere äußerste Glied der Progression, ist das Product gleich der Anzahl der Glieder. — Man verlangt diese Glieder.

Antw. 3, 5, 7, 9, 11 und 13.

Geometrische Progression.

1. Es sey a das erste Glied einer geometrischen Reihe;
r der gemeinschaftliche Verhältnißquotient;
z das letzte Glied;
n die Anzahl der Glieder;
und s die Summe der Glieder.

Dann ist $a, ra, r^2a, r^3a, r^{n-1}a$ eine geometrische Progression, welche steigend oder fallend ist, je nachdem r eine ganze Zahl oder einen Bruch bedeutet.

2. Es werde die Progression $a + ra + r^2a + r^3a + r^4a = s$, multiplicirt durch r, so kommt $ra + r^2a + r^3a + r^4a + r^5a = rs$.

Die Differenz beider Progressionen ist, $-a + r^5a = rs - s$.

Aber r^5a ist das letzte Glied der ursprünglichen Progression multiplicirt durch r, oder in allgemeinen Gliedern $r^{n-1}a \times r$, das ist $r^n a$. Folglich $r^n a - a = rs - s$

Woraus $s = \frac{r^n a - a}{r-1} = \frac{r^n - 1}{r-1} a$, die Summe der Reihe.

Eine ähnliche Methode wird zu einem gleichen Ausdrucke für s führen, welches auch immer der Werth von n seyn mag. Wenn r ein Bruch ist, bekömmt der Ausdruck die Form

$$s = \frac{1 - r^n}{1 - r} a.$$

3. Jetzt können aus diesen Werthen folgende Sätze abgeleitet werden.

$$(1.)\quad a = \frac{z}{r^{n-1}} = \frac{(r-1)s}{r^n - 1} = s + rz - rs.$$

$$(2.)\quad z = ar^{n-1} = \frac{rs - s + a}{r} = \frac{s(r^n - r^{n-1})}{r^n - 1}.$$

$$(3.)\quad s = \frac{a(r^n - 1)}{r-1} = \frac{a(1 - r^n)}{1-r} = \frac{rz - a}{r-1} = \frac{zr^n - z}{r^n - r^{n-1}}.$$

$$(4.)\quad r = \frac{s-a}{s-z} - \left(\frac{z}{a}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

Und wenn der Logarithmus von $\frac{z}{a} = N$, der von $\frac{sr - s + a}{a} = M$, und der von $r = R$ ist, so wird

$$(5.)\quad n = \frac{N}{R} + 1 = \frac{M}{R}.$$

Folglich, wenn r ein Bruch ist, wird n unendlich, dann ist $r^n = 0$, und der Ausdruck für s wird

(6.) $s = \frac{a}{1-r}$ [Dieser Ausdruck ist anwendbar bei der Summation der unendlichen Reihen.]

Beispiele.

1. Das kleinste von zehn Gliedern einer geometrischen Progression ist 1, der Exponent des Verhältnisses 2. Man verlangt das größte Glied und die Summe.

Hier ist $z = a r^{n-1} = 1 \times 2^9 = 512$, das größte Glied;

und $s = \frac{rz - a}{r - 1} = \frac{1024 - 1}{1} = 1023$, die Summe.

2. Man suche die Summe von 12 Gliedern der Progression $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}$, u. s. w.

Hier ist $s = \frac{1 - r^n}{1 - r} = \frac{1 - \frac{1}{531441}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{265720}{177147}$, die Summe.

3. Man suche die Summe der Reihe $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$, u. s. w. ins Unendliche fortgeführt.

Hier giebt Formel 6, das ist $s = \frac{a}{1-r}$, $s = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$ $= 2$, die verlangte Summe.

4. Man suche den gemeinen Bruch, der gleichgeltend ist mit dem periodischen Decimalbruche 0,36363636.

Dieser Decimalbruch in der Form einer Reihe ausgedrückt ist, $\frac{36}{100} + \frac{36}{10000} + \frac{36}{1000000}$ + u. s. w., wo $a = \frac{36}{100}$, und $r = \frac{1}{100}$.

Folglich, $s = \frac{a}{1-r} = \frac{36}{100} : \frac{99}{100} = \frac{4}{11}$, der gesuchte Bruch.

5. Man suche die Summe der fallenden unendlichen Reihe $1 - x + x^2 - x^3 + x^4$, u. s. w.

Hier ist $a = 1$, $r = -x$, und $s = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1+x}$ die verlangte Summe.

Als Probe findet man, daß wenn 1 durch $1 + x$ dividirt wird, der Quotient die obere Reihe giebt.

6. Von vier Zahlen in geometrischer Progression ist das Product der zwei kleinsten 8, und der zwei größten 128. Welches sind die Zahlen?

Antw. 2, 4, 8, und 16.

12. Abschnitt. Logarithmen.

Der Logarithme einer gegebenen Zahl ist der Exponent derjenigen Potenz einer andern gegebenen Zahl, die der gegebenen Zahl gleich ist.

Nehmen wir die Zahl r größer als Eins zur Basis eines logarithmischen Systems, und ist p als veränderlicher Exponent dazu gegeben, so daß der Ausdruck r^p alle mögliche Zahlen darstellt, indem man dem Exponenten p successive verschiedene Werthe beilegt, so ist offenbar:

1. Daß der Logarithme der Einheit stets Null wird, welchen Werth auch die Basis r haben mag: weil überhaupt $r^0 = 1$ ist.

2. Daß der Logarithme, der Basis r, 1 wird, weil r so viel ist als r^1.

3. Daß alle Zahlen über 1, positive Zahlen zu ihren Logarithmen haben. Setzt man also $r = 10$, so hat die Zahl 10000 oder 10^4 die positive Zahl 4 zu ihrem Logarithmen.

4. Alle Brüche, oder Zahlen unter Eins, haben negative Zahlen zu ihren Logarithmen. Ist nun $r = 10$, so hat $\frac{1}{10000}$ oder 0,0001 oder 10^{-4}, — 4 zum Logarithmen.

5. Nehmen wir zwei Zahlen N und N′, welchen die beiden Logarithmen p und p′ respective entsprechen, für dieselbe Basis oder Wurzel r: so haben wir $N = r^p$, und $N' = r^{p'}$, und folglich $N + N' = r^p \times r^{p'} = r^{p+p'}$. Hieraus erhellt, daß in jedem logarithmischen System, der Logarithme $p + p'$, der einem Producte NN′ zweier Factoren angehört, gleich ist der Summe der Logarithmen dieser Factoren.

6. Haben wir einige Zahlen A, B, C, D, wie viel ihrer auch immer seyn mögen, so können wir auf ähnliche Weise darthun, daß (indem wir den Logarithmen mit log. *) bezeichnen) log. (A.B.C.D) = log. A + log. B + log. C + log. D ist.

7. Wenn A = B = C = D, so haben wir log. (A × A × A × A); oder log. A^4 = log. A + log. A + log. A + log. A = 4 log. A: und im Allgemeinen log. A^n = n log. A. Es ergiebt sich also, daß der Logarithme einer ganzen positiven Potenz n, einer Zahl A gleich ist dem nfachen Logarithmen von A.

8. Auch ist log. $A^{\frac{n}{p}} = \frac{n}{p}$ log. A (wo n und p positive

---

*) Der Verfasser bedient sich hier statt des auf dem Festlande üblichen log. des λ.

(D.)

ganze Zahlen sind). Setzt man nämlich $A^{\frac{n}{p}} = K$, so ist log. $A^{\frac{n}{p}}$ = log. K. Aus der Gleichung $A^{\frac{n}{p}} = K$, haben wir, wenn beide Theile zur Potenz p erhoben werden, $A^n = K^p$, und folglich n log. A = p log. K, oder durch Division $\frac{n}{p}$ log. A = log. K = log. $A^{\frac{n}{p}}$.

9. Aus demselben Grunde folgt, daß log. $\frac{A}{B}$ = log. A — log. B. Denn es sey $\frac{A}{B} = Q$, also A = B . Q: so haben wir dann log. A = log. B + log. Q; woraus log. Q = log. A — log. B. Es ist also der Logarithme des Quotienten gleich dem Logarithmen des Dividend, weniger den des Divisors; oder der Logarithmen eines Bruches ist gleich dem Logarithmen des Zählers, vermindert um den des Nenners.

10. Ferner ist log. $A^{-n} = -n$ log. A. Denn es ist $A^{-n} = \frac{1}{A^n}$: daher log. A^{-n} = log. 1 — log. $A^n = 0 -$ n log. A: das ist so viel als — n log. A.

11. Eben so log. $A^{-\frac{n}{p}} = -\frac{n}{p}$ log. A. Denn es ist $A^{-\frac{n}{p}} = 1 : A^{\frac{n}{p}}$; hieraus folgt log. $A^{-\frac{n}{p}} = 0 - \frac{n}{p}$ log. A $= -\frac{n}{p}$ log. A.

12. Denkt man sich zwei logarithmische Systeme, deren Wurzeln oder Basen r und s sind; und eine Zahl N, die in dem ersten Systeme p, und in dem zweiten q zu ihren Logarithmen hat: so ist $N = r^p$ und $N = s^q$; dies giebt $r^p = s^q$, und $s = r^{\frac{q}{p}}$. Werden nun die Logarithmen für das System r genommen, so wird log. $s = \frac{p}{q}$ log. r; oder da in dem Systeme r, log. r = 1 ist, log. $s = \frac{p}{q}$, oder $q = \frac{p}{\text{log. s}} = p \times \frac{1}{\text{log. s}}$: Ist daher der Logarithme p, einer Zahl N für das System der Basis r, bekannt, so können wir den Logarithmen q derselben Zahl für das System s erhalten, indem p durch einen Bruch multiplicirt wird, der die Einheit

zum Zähler und den Logarithmen von s, nach dem Systeme r genommen, zum Nenner hat.

13. In dem logarithmischen Systeme, welches sein grosser Erfinder, Baron Napier, zuerst aufstellte, ist r = 2,71828182845 9, u. s. w., und die Exponenten werden gewöhnlich die Nepersch en oder Hyperbolischen Logarithmen genannt; der letztere Name ist ihnen gegeben worden, wegen der Beziehung, welche zwischen den Logarithmen und den Linien und asymptotischen Räumen der gleichseitigen Hyperbel statt findet: so daß in diesem Systeme n stets der hyperbelische Logarithme von (2,71828, u. s. w.) ist. Aber in dem von Briggs aufgestellten Systeme (welches mit den Räumen einer Hyperbel correspondirt, deren Asymptoten einen Winkel von 25° 44′ 25″ 28‴ machen) wo r = 10 ist, werden sie gemeine oder Briggsche Logarithmen genannt; so daß der gemeine Logarithme einer Zahl der Exponent derjenigen Potenz von 10 ist, die der besagten Zahl gleich kommt. Also, wenn $50 = 10^{1,69897}$, und $9023 = 10^{3,955351}$; so ist 1,69897 der gemeine Logarithme von 50, und 3,955351 der gemeine Logarithme von 9023.

14. Weil die Regeln über Gebrauch und Anwendung der Logarithmen den besten Sammlungen von Logarihmen-Tafeln beigefügt sind, so werden sie hier weggelassen. Die in England von Dr. Hutton, und die in Frankreich von Callet besorgten Tafeln sind als die correctesten und für den gewöhnlichen Gebrauch bequemsten zu empfehlen *). Auch zweifle ich nicht, daß die jetzt von Hrn. Galbraith zu Edinburg besorgten Tafeln, correct und brauchar seyn werden.

13. Abschnitt. Rechnung nach Formeln.

Weil die Zahlenrechnung nach algebraischen Formeln für Praktiker von dem größten Vortheil ist, indem sie dadurch in den Stand gesetzt werden, die theoretischen Resultate der Männer von Fach mit Vortheil zu nützen, als auch die Resultate ihrer eigenen Erfahrung oder anderer Erfahrungen in der Kunstsprache mitzutheilen; so hielt ich es für zweckmäßig, aus der Arithmetik und Algebra das Nöthigste vorauszuschicken. Eine gründliche Kenntniß dieser beiden Grund-Wissenschaften wird in der Anwendung alles dessen, was in gegenwärtigem Buche

*) Mit vollem Rechte können unsre bekannten Vega'schen Tafeln ihnen zur Seite gestellt werden.

(D.)

nun folgt, wesentlich nützen; und diese Anwendung kann vielleicht durch folgende wenige Beispiele erleichtert werden.

Beispiel 1. Es sey $a = 5$, $b = 12$, $c = 13$, und $s = a + b + c$; welches ist der Zahlenwerth des Ausdruckes $\sqrt{[\frac{1}{2}s(\frac{1}{2}s - a)(\frac{1}{2}s - b)(\frac{1}{2}s - c)]}$, welcher die Grundfläche eines Dreiecks bezeichnet, dessen Seiten 5, 12 und 13 sind?

Hier ist $s = a + b + c = 5 + 12 + 13 = 30$; $\frac{1}{2}s = 15$; $\frac{1}{2}s - a = 15 - 5 = 10$; $\frac{1}{2}s - b = 15 - 12 = 3$; $\frac{1}{2}s - c = 15 - 13 = 2$.

Folglich erhalten wir, wenn wir die Zahlenwerthe der verschiedenen Größen in den Parenthesen substituiren $\sqrt{(15 \times 10 \times 3 \times 2)} = \sqrt{900} = 30$, den verlangten Werth.

Beispiel 2. Es ist gegeben $g = 32\frac{1}{6}$, $t = 6$, man verlangt den Werth von $\frac{1}{2}gt^2$, ein Ausdruck welcher den Raum in Fußen bezeichnet, den ein schwerer Körper von der Ruhe aus in sechs Secunden, unter der Breite von London fallen würde.

Hier ist $\frac{1}{2}gt^2 = 16\frac{1}{1\,2} \times 6^2 = 96\frac{1}{2} \times 6 = 579$ Fuß.

Beispiel 3. Es sey gegeben $D = 6$, $d = 4$, $h = 12$, $\pi = 3{,}141593$; man verlangt den Werth von $\frac{1}{1\,2}\pi h(D^2 + D\,d + d^2)$, eine Formel für den körperlichen Inhalt eines konischen Stücks, dessen beide Diameter D, d sind, und dessen Höhe h ist.

Hier ist $D^2 = 36$, $D\,d = 6 \times 4 = 24$, $d^2 = 16$, $\frac{\pi}{12} = 0{,}2618$ nahe.

Daher $\frac{1}{1\,2}\pi h(D^2 + D\,d + d^2) = 0{,}2618\ (36 + 24 + 16)\ 12 = 0{,}2618 \times 76 \times 12 = 3{,}141593 \times 76 = 238{,}761068$.

Beispiel 4. Es sey $a = 1$, $h = 25$, $g = 193$ Zoll, welches ist der Werth von $2a\sqrt{gh}$? Dies ist der Ausdruck für die Cubikzoll Wasser, welches in einer Secunde aus einer Oeffnung läuft, deren Grundfläche a, und in dem die Höhe des Wassers in dem Gefäß oder Wasserbehälter h ist, beides in Zollen.

Hier ist $2a\sqrt{gh} = 2\sqrt{(25 \times 193)} = 10\sqrt{193} = 10 \times 13{,}89244 = 138{,}9244$ Cubikzoll.

Beispiel 5. Es wird die Geschwindigkeit des Windes in deutschen Meilen für die Stunde als bekannt vorausgesetzt; man verlangt kurze angenäherte Ausdrücke für die Ruthen in der Minute, und für die Fuß in der Secunde.

Erstens ist *): $2000 : 60 = \frac{200}{6} = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3} = 33$ nahe.

---

*) 2000 Ruthen = 24000 Fuß gehen auf die geographische Meile, wenn man einen Fuß = 0,95301 Pariser zum Grunde legt, was nahe der Berliner Fuß ist. (D.)

$24000 : (60 \times 60) = \frac{24000}{3600} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3} = 7$ nahe

Wenn nun n die Anzahl der Meilen für die Stunde bezeichnet, so werden 33 n die Ruthen in der Minute, und 7 n die Fuß in der Secunde ausdrücken.

Dies sind angenäherte Resultate. Wo vollkommne Genauigkeit verlangt wird, setze man im erstern Falle dem Resultate noch den 99ten Theil zu, oder den 9ten Theil vom 11ten Theile, ohne großen Fehler den 100ten; im zweiten Falle aber ziehe man den 21ten Theil des Ganzen, oder den 3ten des 7ten Theils ab.

Nimmt man nun die Geschwindigkeit des Windes für die Stunde zu 4 Meilen an, so gehen $33\,n = 33 \times 4 = 132$ Ruthen auf die Minute, oder richtiger: $132 + \frac{132}{99} = 132 + 1\frac{1}{3} = 133\frac{1}{3}$ Ruthen.

Eben so $7\,n = 28$ Fuß für die Secunde, oder richtiger: $28 - \frac{28}{21} = 28 - \frac{4}{3} = 26\frac{2}{3}$ Fuß.

Umgekehrt wird $\frac{1}{7}$ der Fuß für eine Secunde, die Meilen für die Stunde angeben, wenn man wieder den 21ten Theil hinzufügt, um das wahre Resultat zu erhalten.

Beispiel 6. Eine Formel zu finden, nach welcher bestimmt werden kann, wenn ein allgemeines Gesetz statt finden kann, und welches dieses Gesetz sey.

Man nehme z. B. an, es sollte das Gesetz bestimmt werden, welches zwischen den Widerständen der in der Luft und andern widerstehenden Mitteln sich bewegenden Körpern und den Geschwindigkeiten mit welchen sie sich bewegen, statt findet. Es mögen V, v, irgend zwei Geschwindigkeiten bezeichnen, und R, r, die entsprechenden Widerstände, welche man durch einen Körper, der sich mit diesen Geschwindigkeiten beweget, kennen gelernt hat: wir wünschen die Potenz von V zu bestimmen, welcher R proportional ist. Man bezeichne den Index oder Exponent der Potenz mit x: dann wird $V^x : v^x = R : r$, wenn ein Gesetz statt findet.

Werden die Hinterglieder durch die Vorderglieder dividirt, so haben wir $1 : \left(\frac{v}{V}\right)^x = 1 : \frac{r}{R}$. Folglich $\left(\frac{v}{V}\right)^x = \frac{r}{R}$.

Dies logarithmisch ausgedrückt, giebt $x \times \log. \frac{v}{V} = \log. \frac{r}{R}$;

$$\text{oder } x = \frac{\log. r - \log. R}{\log. v - \log. V}.$$

Daher wird der Quotient aus dem Unterschiede der Logarithmen der Widerstände, dividirt durch den Unterschied der Logarithmen der entsprechenden Geschwindigkeiten, den verlangten Exponent x ausdrücken.

Diese Formel ist sehr oft anwendbar, in Betreff der Bewegung der Kanonenkugeln, der Bote in Canälen u. s. w., und kann wohl auch auf planetarische Bewegungen angewendet werden *).

III. Kapitel.

Anfangsgründe der Geometrie.

Erklärungen.

1. Die Geometrie ist die Wissenschaft, vermöge welcher wir die Verhältnisse, Eigenschaften und Abmessungen aller Arten von Raumgrößen kennen lernen.

2. Raumgröße ist eine stetige zusammenhängende Menge von Einheiten im Raume, oder ein Ding das räumliche **) Ausdehnung hat; als eine Linie, Fläche oder Körper.

3. Ein Punct ist, was keine Theile hat: also hat er weder Länge, noch Breite, noch Dicke.

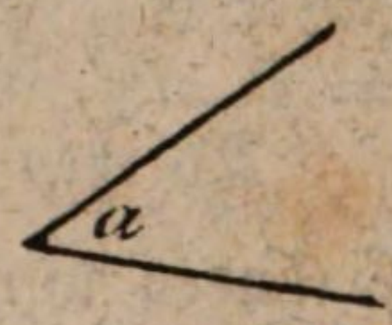
4. Eine Linie ist eine Länge ohne Breite und Dicke.

Zusatz. Die Grenzen (das Aeußerste) einer Linie sind Puncte.

5. Eine gerade Linie ist eine solche, welche zwischen je zwei in ihr befindlichen Puncten immer einerlei Richtung oder Lage hat. Eine krumme Linie ist die, welche ihre Richtung fortwährend ändert.

Zusatz. Es kann also nur eine Art gerader Linien geben, aber unendlich viele Arten krummer Linien.

6. Ein Winkel ist die Neigung zweier Linien zu einander, die in einem Puncte, den man den Scheitel des Winkels nennt, zusammenstoßen. Wenn er von geraden Linien gebildet wird, heißt er ein ebener Winkel, wie a; krummlinig heißt er, wenn er von krummen Linien gebildet wird.

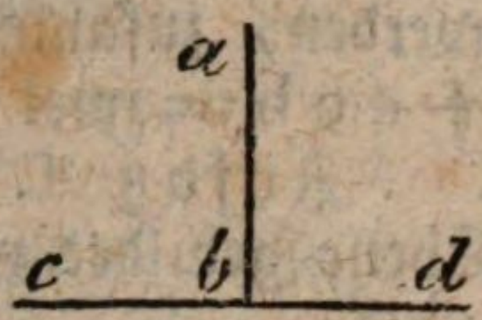


---

*) Bei denen sich jedoch bekanntlich bis jetzt noch keine Spur von einem widerstehenden Mittel gezeigt hat. Nur die Bewegung des Enke'schen Kometen scheint auf einen Widerstand hinzudeuten. (D.)

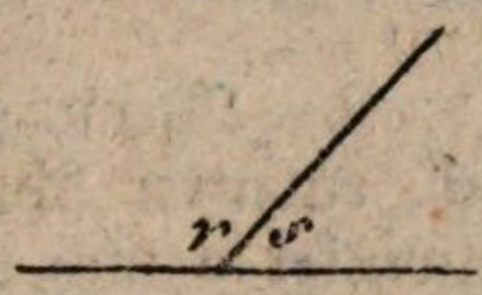
**) Diese Prädicate des Räumlichen dürfen nicht weggelassen werden, weil sonst diese Erklärungen auch von der Zeit gelten würden. (D.)

7. Ein rechter Winkel entsteht, indem eine gerade Linie a b auf eine andere c d fällt, und zu beiden Seiten gleiche Winkel macht, a b c = a b d; so daß also a b nach beiden Seiten gleiche Neigung hat: a b heißt das Perpendikel, die Senkrechte. Alle andere Winkel werden schiefe Winkel genannt.



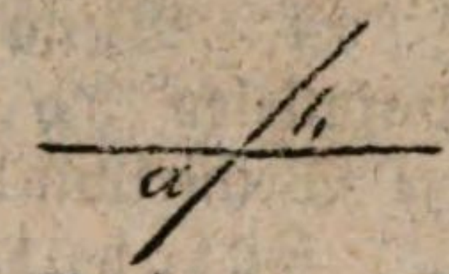
8. Ein stumpfer Winkel ist größer als ein rechter, wie r.

9. Ein spitzer Winkel ist kleiner als ein rechter, wie s.



10. Nebenwinkel, wie r, s, entstehen, wenn eine Linie mit einer andern in irgend einem Puncte zusammentrifft, der kein Endpunct ist.

11. Wenn zwei Linien sich schneiden, so heißen die einander gegenüber liegenden Winkel Vertical- oder Scheitelwinkel, als a, b.



12. Eine Fläche hat nur Länge und Breite. Die Grenzen einer Fläche sind Linien.

13. Eine Ebene heißt die Fläche, welche vollkommen gleichförmig zwischen ihren Grenzen liegt; oder in welcher gerade Linien nach jeder beliebigen Richtung gezogen werden können.

14. Ein Körper ist eine nach allen Richtungen ausgedehnte Größe, oder ein Ding das Länge, Breite und Höhe hat.

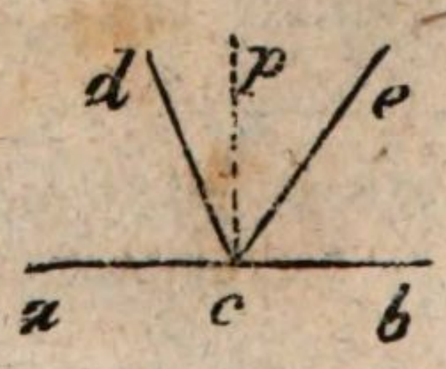
Die Grenzen eines Körpers sind Flächen.

15. Das Quadrat einer geraden Linie ist der Raum, welcher von vier geraden Linien eingeschlossen wird, von denen jede der gegebenen gleich ist, und die sämmtlich aufeinander senkrecht stehen.

16. Das Rechteck zweier Linien ist der von vier ihnen paarweise gleichen Linien, die senkrechtaufeinander stehen, und wo nur die gegenüber liegenden Seiten einander gleich sind, eingeschlossene Raum.

1. Abschnitt. Von Winkeln, geraden Linien und ihren Rechtecken.

Satz 1. Wenn nach einem Puncte c in einer geraden Linie a b, verschiedene andere gerade Linien d c, e c an derselben Seite hingezogen werden; so sind alle Winkel, welche bei dem Puncte c auf dieser Seite gebildet

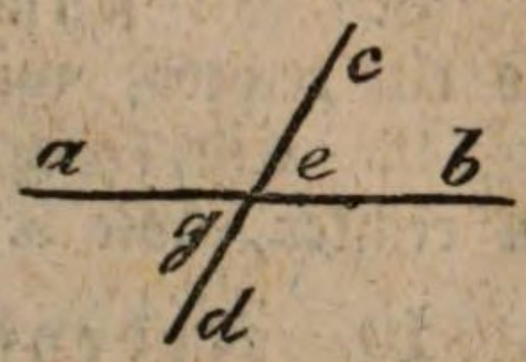


werden, zusammengenommen gleich zwei Rechten, acd + dce + ecb = zwei rechten Winkeln.

Zusatz 1. Alle Winkel, weche um einen Punct in einer Ebene gebildet werden, sind zusammengenommen vier Rechten gleich.

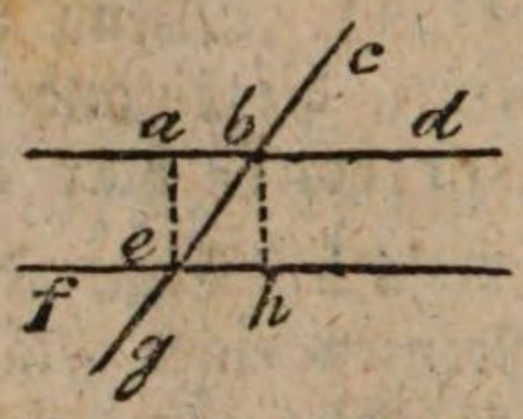
Zusatz 2. Wenn alle Winkel bei c, an einer Seite der Linie ab gleich zwei Rechten sind, so ist acb eine gerade Linie.

2. Wenn zwei gerade Linien, ab, cd, einander schneiden; so sind die Scheitelwinkel e und g einander gleich.



3. Eine gerade Linie bh, welche auf einer der beiden Parallelen senkrecht steht, steht auch senkrecht auf der andern.*)

4. Wenn eine gerade Linie cg, zwei Parallelen ab, fh durchschneidet, so sind die Wechselwinkel abe und beh gleich.

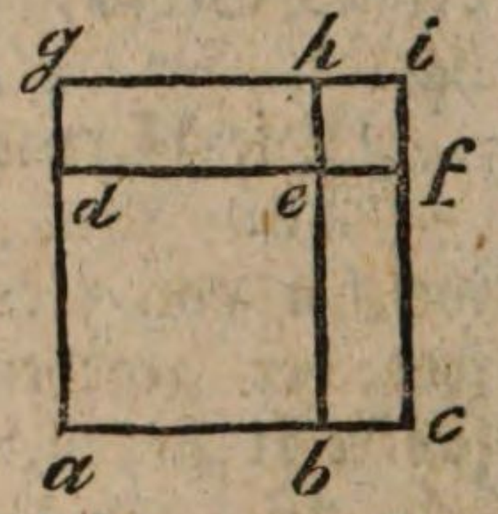


Zusatz 1. Der äußere Winkel cbd, ist gleich dem an derselben Seite liegenden innern Winkel beh.

Zusatz 2. Die beiden innern Winkel, welche an derselben Seite liegen, sind gleich zwei Rechten, dbe + beh = zwei rechten Winkeln.

5. Gerade Linien, welche zu einer und derselben geraden Linie parallel sind, sind unter sich selbst parallel.

6. Wenn eine gerade Linie ac, in zwei Theile ab, bc getheilt wird, so ist das Quadrat der ganzen Linie gleich der Summe der Quadrate der beiden Theile, und des Rechtecks der Theile zwei mal genommen, $\overline{ac}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{bc}^2 + 2ab \cdot bc$.



7. Das Quadrat der Differenz zweier Linien ac, bc, ist gleich der Summe ihrer Quadrate, weniger ihrem Rechteck zwei mal genommen, $\overline{ab}^2 = \overline{ac}^2 + \overline{bc}^2 - 2ac \cdot bc$.

8. Das Rechteck der Summe und Differenz zweier Linien ist gleich der Differenz ihrer Quadrate.

9. Das Quadrat der Summe mit dem Quadrat der Differenz zweier Linien zusammengenommen, ist gleich der Summe ihrer Quadrate zwei mal genommen.

---

*) Parallel heißen aber Gerade, wenn sie, in Einer Ebene liegend und beliebig verlängert, einander nirgends treffen. (D.)

2. Abschnitt. Von den Dreiecken.

Erklärungen.

1. Ein Dreieck ist eine von drei geraden Linien, die man Seiten des Dreiecks nennt, begrenzte ebene Figur.

2. Ein gleichseitiges Dreieck ist ein solches, welches drei gleiche Seiten hat.

3. Ein gleichwinkliches Dreieck ist dasjenige, welches drei gleiche Winkel hat.

3. Ein gleichschenkliches Dreieck hat zwei gleiche Seiten.

5. Ein rechtwinkliches Dreieck ist das, was einen rechten Winkel hat. Die dem rechten Winkel gegenüber liegende Seite wird die Hypotenuse genannt.

6. Ein schiefwinkliches Dreieck ist ein solches, welches schiefe Winkel hat.

7. Ein stumpfwinkliches Dreieck hat einen stumpfen Winkel.

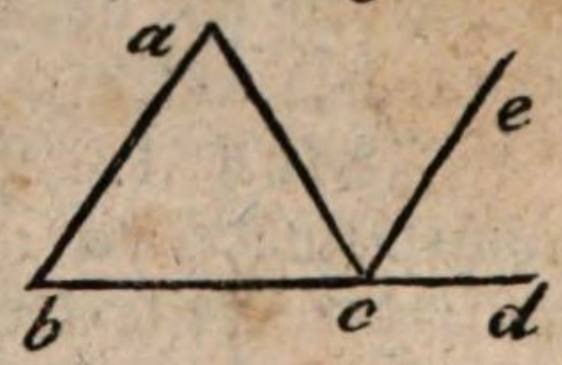
8. Ein spitzwinkliches Dreieck hat drei spitze Winkel.

9. Ein ungleichseitiges Dreieck hat drei ungleiche Seiten.

10. Dreiecke sind einander ähnlich, wenn die Winkel in dem einen so groß sind als in dem andern; und gleichnamige oder homologe Seiten heißen diejenigen, welche zwischen gleichen Winkeln liegen.

11. Die Basis oder Grundlinie eines Dreiecks ist die Seite, auf welche ein Perpendikel aus dem gegenüber liegenden Winkel, der auch der Scheitel heißt, gefällt wird; die beiden von dem Scheitel auslaufenden Seiten werden die Schenkel genannt.

Satz 1. Wenn in einem Dreieck abc, eine Seite bc verlängert wird; so ist der äußere Winkel acd gleich der Summe der beiden gegenüberliegenden innern Winkel a, b.



2. In jedem Dreieck ist die Summe der drei Winkel gleich zweien rechten.

Zusatz 1. Wenn zwei Winkel in einem Dreiecke gleich sind zweien Winkeln in einem andern, so wird auch der dritte Winkel des einen Dreiecks gleich seyn dem dritten Winkel im andern.

Zusatz 2. Wenn ein Winkel eines Dreiecks ein rechter ist, so ist die Summe der andern gleich einem rechten.

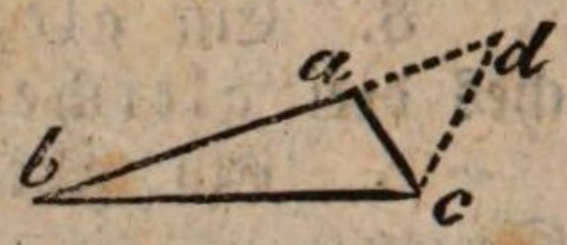
3. Die Winkel an der Basis eines gleichschenklichen Dreiecks sind einander gleich.

Zusatz 1. Ein gleichseitiges Dreieck ist also gleichwinklich; und umgekehrt.

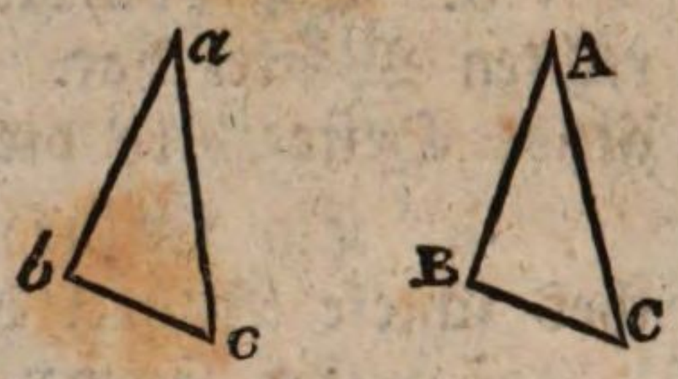
Zusatz 2. Ein Perpendikel auf die Basis eines gleichschenklichen Dreiecks gefällt, halbirt sowohl den Winkel am Scheitel des Dreiecks, als die Grundlinie.

4. In jedem Dreieck liegt die größte Seite dem größten Winkel gegenüber, und umgekehrt.

5. In jedem Dreieck a b c ist die Summe zweier Seiten b a, a c, größer als die dritte b c, und ihr Unterschied ist kleiner als die dritte Seite.



6. Wenn in zwei Dreiecken a b c, A B C, zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel beziehungsweise gleich sind; so sind die Dreiecke und ihre correspondirenden Theile gleich.



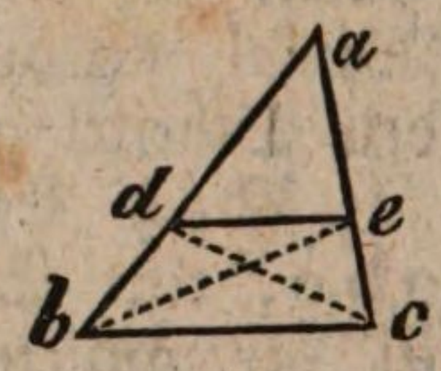
7. Wenn in zwei Dreiecken A B C und a b c zwei Winkel und eine eingeschlossene Seite beziehungsweise gleich sind; so werden auch die übrigen Theile und die ganzen Dreiecke gleich seyn.

8. Wenn in zwei Dreiecken alle Seiten respective gleich sind, so sind auch alle Winkel und die ganzen Dreiecke gleich.

9. Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe sind einander gleich.

10. Dreiecke von gleicher Höhe verhalten sich zu einander wie ihre Grundlinien.

11. Wenn in einem Dreiecke eine Linie d e zu einer Seite b c parallel gezogen wird; so werden die übrigen Seiten proportionirt geschnitten; a d : d b = a e : e c.

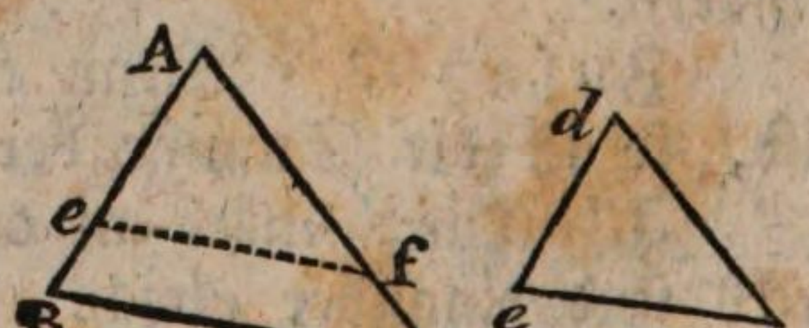


Zusatz 1. Wenn die Abschnitte proportionirt sind, a d : d b = a e : e c; so ist die Linie d e parallel der Seite b c.

Zusatz 2. Wenn verschiedene Linien zu irgend einer Seite eines Dreiecks parallel gezogen werden, so werden alle Abschnitte proportionirt seyn.

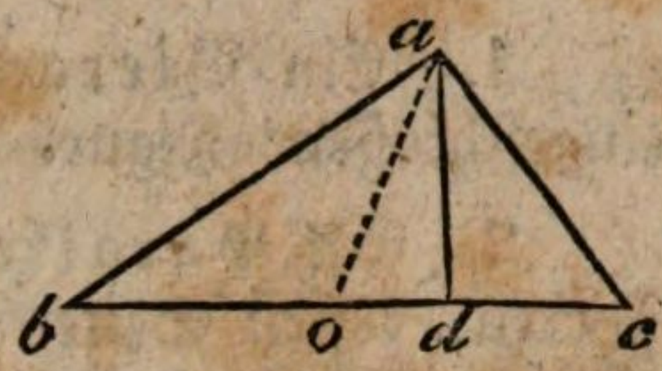
Zusatz 3. Eine Linie zu irgend einer Seite eines Dreiecks parallel gezogen, schneidet davon ein Dreieck ab, das dem ganzen ähnlich ist.

12. In ähnlichen Dreiecken sind die homologen Seiten proportionirt; A B : A C = d e : d f.



13. Aehnliche Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate ihrer gleichnamigen Seiten.

14. Wenn in einem Dreiecke b a c ein Perpendikel aus dem rechten Winkel auf die Hypotenuse gefällt wird, so wird es in zwei untereinander und dem ganzen ähnliche Dreiecke a b d,, a d c getheilt.



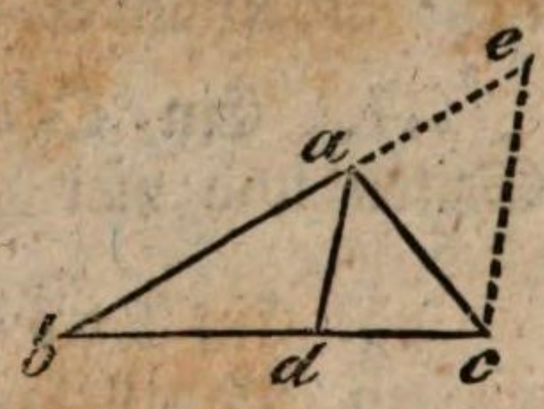
Zusatz. Das Rechteck aus der Hypotenuse und jedem Abschnitte ist gleich dem Quadrat der anliegenden Seite.

15. Der Abstand a o des Scheitels des rechten Winkels von der Mitte der Hypotenuse ist gleich der halben Hypotenuse.

16. In einem rechtwinklichen Dreieck ist das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate der beiden Katheten.

17. Wenn das Quadrat einer Seite eines Dreiecks gleich ist der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten, so ist der von ihnen eingeschlossene Winkel ein rechter.

18. Wenn ein Winkel a, eines Dreiecks b a c von einer geraden Linie a d halbirt wird, welche die Basis schneidet; so sind die Abschnitte der Basis den angrenzenden Seiten des Dreiecks proportionirt; b d : d c = a b : a c.



19. Wenn sich die Seiten verhalten wie die Abschnitte der Basis, so halbirt die Linie a d den Winkel a.

20. Drei Linien, welche aus den drei Winkeln eines Dreiecks nach der Mitte der gegenüber liegenden Seiten gezogen werden, treffen alle in einem Puncte zusammen.

21. Drei senkrechte Linien, welche auf der Mitte der drei Seiten eines Dreiecks errichtet werden, treffen alle in einem Puncte zusammen.

22. Der Durchschnittspunct der drei Perpendikel steht von den drei Winkeln gleich weit ab; oder er ist der Mittelpunct des umschriebenen Kreises.

23. Drei Perpendikel, welche aus den drei Winkeln eines Dreiecks nach den gegenüber liegenden Seiten gezogen werden, treffen alle in einem Puncte zusammen.

24. Drei Linien, welche die drei Winkel eines Dreiecks halbiren, treffen alle in einem Puncte zusammen.

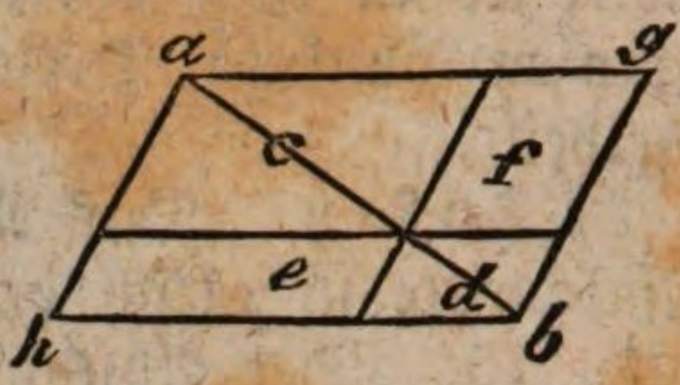
25. Wenn d ein Punkt in der Basis eines ungleichseitigen Dreiecks a b c ist, so ist $\overline{ab}^2 . dc + \overline{ac}^2 . bd = \overline{ad}^2 . bc + bc . bd . dc$.

3. Abschnitt. Von Vierecken und Vielecken.

Erklärungen.

1. Ein Viereck ist eine ebene von vier geraden Linien eingeschlossene Figur.

2. Ein Parallelogramm ist ein Viereck, dessen Seiten paarweise parallel sind, wie a g b h. Die nach den gegenüberliegenden Winkeln gezogene Linie a b, wird der Diameter oder die Diagonale genannt. Und wenn zwei Linien parallel zu den beiden Seiten durch einen Punct der Diagonale gezogen werden; so wird das Parallelogramm in verschiedene andere getheilt, von denen c, d Parallelogramme um die Diagonale, und e, f die Complemente, und die Figur e d f ein Gnomon genannt werden.



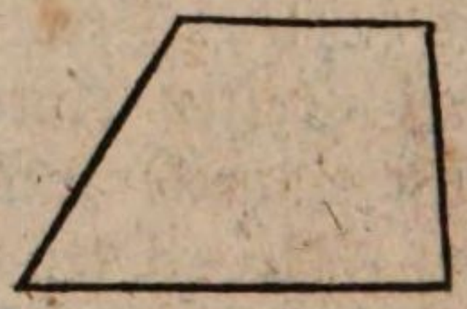
3. Ein Rechteck ist ein Parallelogramm dessen Seiten senkrecht aufeinander stehen.

4. Ein Quadrat ist ein Rechteck von vier gleichen Seiten und vier gleichen Winkeln.

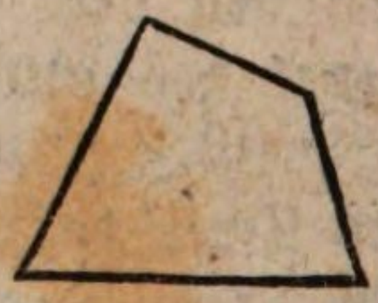
5. Ein Rhombus oder eine Raute ist ein Parallelogramm, dessen Seiten gleich und dessen Winkel schief sind.

6. Ein Rhomboid ist ein Parallelogram von ungleichen Seiten und schiefen Winkeln.

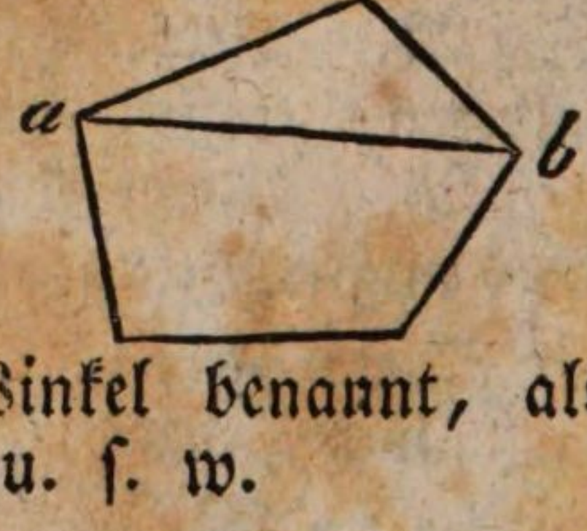
7. Ein Trapez ist ein Viereck, das nur zwei parallele Seiten hat.



8. Ein Trapezoid ist ein Viereck, das keine parallelen Seiten hat.



9. Ein Vieleck (Polygon) ist eine ebene von mehrern geraden Linien eingeschlossene Figur. Wenn alle Seiten und Winkel gleich sind, heißt es ein regelmäßiges Vieleck (reguläres Polygon) und wird nach der Anzahl der Seiten oder Winkel benannt, als ein Fünfeck, ein Sechseck, ein Siebeneck u. s. w.



10. Die Diagonale eines Vielecks ist eine Linie, welche zwischen irgend zwei gegenüber liegenden Winkeln einer Figur gezogen ist. Z. B. a b.

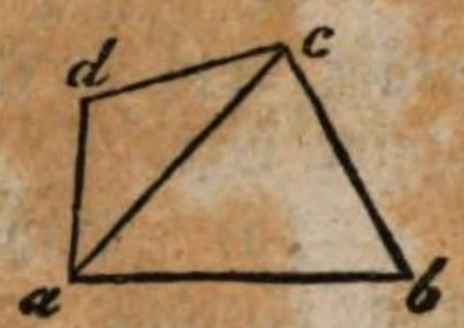
11. Die Höhe einer Figur ist eine von der Spitze auf die Grundlinie oder gegenüberliegende Seite senkrecht gezogene gerade Linie.

12. Figuren sind einander ähnlich, wenn ihre verschiedenen Winkel gleich, und die zwischen den gleichen Winkeln liegenden Seiten proportionirt sind.

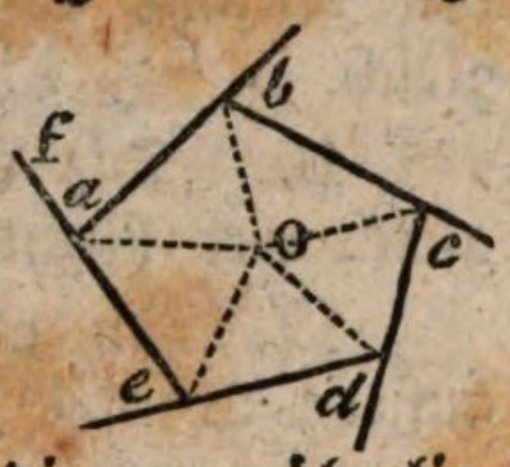
13. Gleichnamige, homologe Seiten zweier ähnlichen Figuren sind solche, die zwischen zwei bezüglich gleichen Winkeln liegen.

14. Der Perimeter oder Umfang einer Figur, ist die Summe aller sie einschließenden Linien.

15. Die innern Winkel einer Figur sind diejenigen, welche innerhalb durch die Linien, die die Figur a d c b begrenzen, gebildet werden.



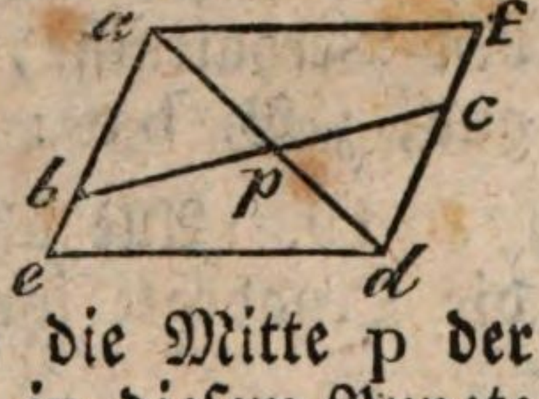
16. Der äußere Winkel einer Figur ist der Winkel, welcher durch eine Seite einer Figur und die Verlängerung der angrenzenden Seite gebildet wird, als b a f.



Satz 1. In einem Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Seiten und Winkel gleich; und die Diagonale theilt es in zwei gleiche Dreiecke.

2. Die Diagonalen eines Parallelogramms halbiren einander.

3. Eine Linie b c, welche durch die Mitte der Diagonale eines Parallelogramms p geht, theilt die Fläche in zwei gleiche Theile.



4. Eine gerade Linie b c, welche durch die Mitte p der Diagonale eines Parallelogramms geht, wird in diesem Puncte halbirt; b p = p c.

5. In jedem Parallelogramm a b d c sind die Complemente c i und i b gleich.

6. Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe sind gleich.

7. Ein Parallelogramm ist doppelt so groß als ein Dreieck von derselben Grundlinie und Höhe.

8. Parallelogramme von gleicher Höhe verhalten sich zu einander wie ihre Grundlinien.

9. Parallelogramme von gleichen Grundlinien verhalten sich wie ihre Höhen.

10. Parallelogramme stehen zu einander im zusammengesetzten Verhältniß ihrer Grundlinien und Höhen.

11. In jedem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate der Diagonalen, gleich der Summe der Quadrate aller Seiten.

12. Die Summe der vier innern Winkel einer vierseitigen Figur ist gleich vier Rechten.

13. Wenn in einem Viereck zwei rechte Winkel sind, so ist die Summe der andern beiden gleich zwei Rechten.

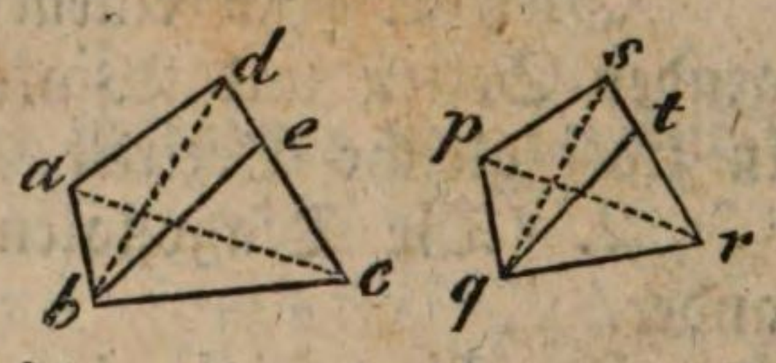
14. Die Summe aller innern Winkel eines Vielecks beträgt doppelt so viel Rechte, als das Vieleck Seiten hat, weniger vier.

15. Daher ist in allen geradlinigen Figuren von derselben Anzahl von Seiten, die Summe aller innern Winkeln gleich.

16. Die Summe der äußern Winkel eines Vielecks ist gleich vier Rechten.

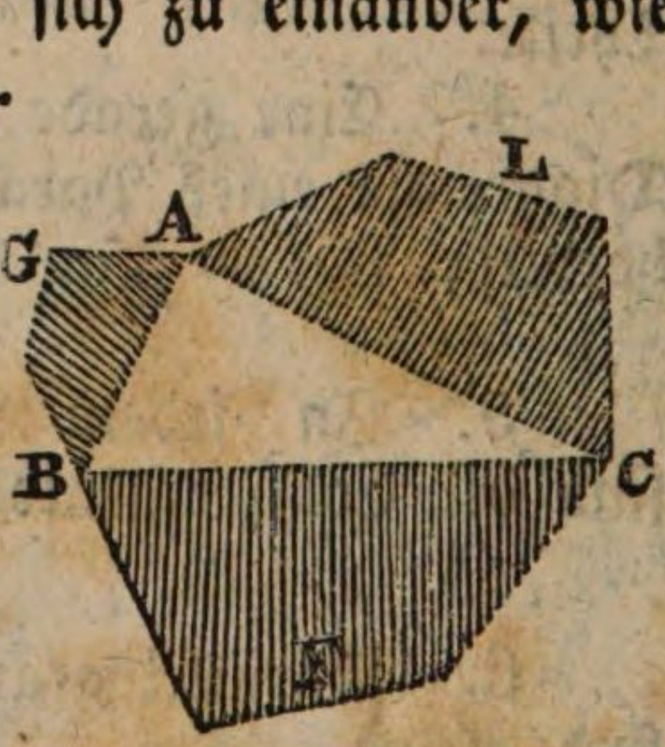
17. In allen geradlinigen Figuren ist die Summe ihrer äußern Winkel gleich.

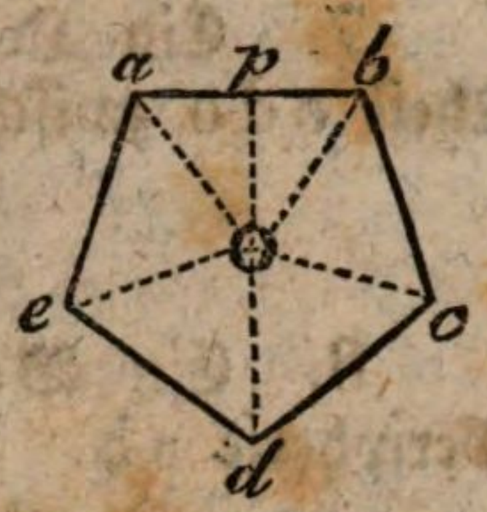
18. Wenn in zwei ähnlichen Figuren a c, p r, zwei Linien b e, q t, auf gleiche Weise so gezogen werden, daß der Winkel c b e = r q t ist, so stehen diese Linien in demselben Verhältnisse, wie irgend zwei gleichnamige Seiten der Figur; z. B. b e : q t = b c : q r = a b : p q = a d : p s.



19. Alle ähnliche Figuren verhalten sich zu einander, wie die Quadrate ihrer gleichnamigen Seiten.

20. Jede über der Hypotenuse eines rechtwinklichen Dreiecks beschriebene Figur, ist gleich der Summe zweier ähnlichen Figuren, welche auf dieselbe Weise über den beiden Seiten beschrieben sind: B F C = A L C + A G B.



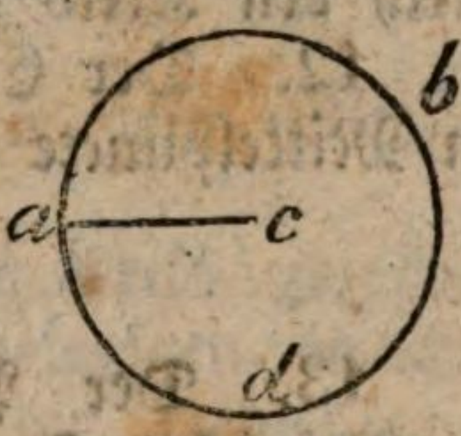


21. Jede reguläre Figur abcde ist gleich einem Dreieck, das den Perimeter abcdea zur Basis, und zur Höhe die Linie Op hat, welche aus dem Mittelpuncte*) senkrecht auf eine Seite gezogen ist.

22. Den ebenen Flächenraum um einen gegebenen Punct, können nur drei Arten regulärer Figuren ausfüllen, und diese sind entweder sechs Dreiecke, oder vier Quadrate, oder drei Sechsecke.

4. Abschnitt. Vom Kreise und den in und um denselben beschriebenen Figuren.

Erklärungen.



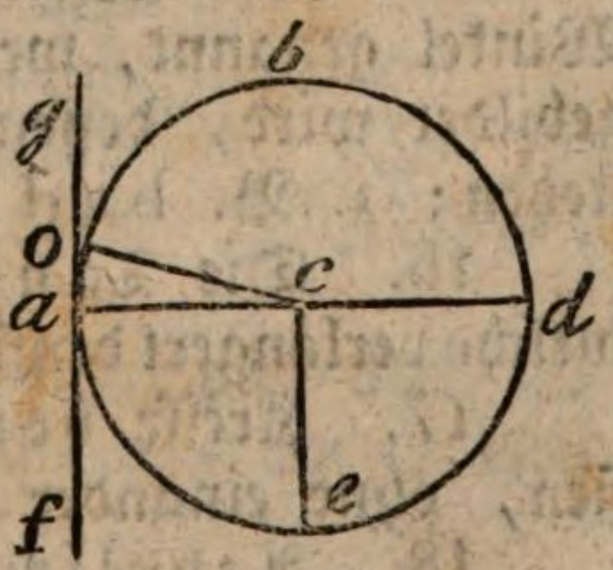
1. Ein Kreis ist eine ebene Figur, welche von einer geraden Linie beschrieben wird, die sich um einen festen Punct, nach derselben Richtung so lange bewegt, bis sie wieder in ihre anfängliche Lage kommt, als ac um c; oder eine ebene Figur, welche von einer Linie begrenzt wird, die von einem festen Puncte innerhalb derselben überall gleich weit absteht.

2. Der Mittelpunct eines Kreises ist der feste Punct, um welchen sich die Linie bewegt,

3. Der Radius oder Halbmesser, ca, ist die Linie, welche den Kreis beschreibt.

Zusatz. Alle Halbmesser eines Kreises sind gleich.

4. Die Peripherie (der Umfang) ist die Linie abda, welche durch den Endpunct der bewegten Linie beschrieben wird.



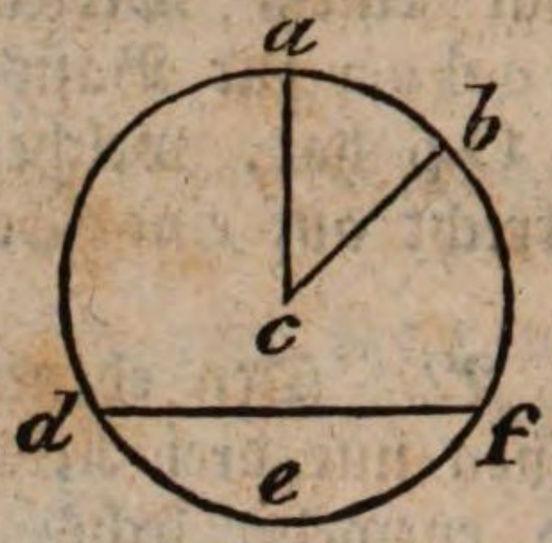
5. Der Durchmesser oder Diameter ist eine Linie ad, welche durch den Mittelpunct von einer Seite des Umfanges zur andern gezogen wird.

6. Ein Halbkreis ist der halbe Kreis abd, welcher durch den Diameter abgeschnitten wird.

---

*) Des umschriebenen Kreises nämlich. (D.)

7. Ein Quadrant oder Viertel eines Kreises ist der Theil c d e zwischen zwei aufeinander senkrecht stehenden Radien.



8. Ein Bogen ist ein Theil der Peripherie a b.

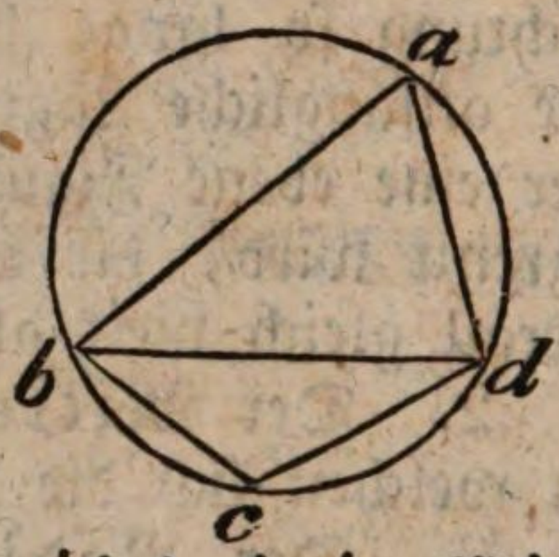
9. Ein Sector (Ausschnitt) ist ein Theil des Kreises, der von zwei Radien und dem zwischen ihnen befindlichen Bogen eingeschlossen wird, a e b.

10. Ein Segment (Abschnitt) ist ein Theil, welcher durch eine gerade Linie oder Sehne abgeschnitten wird, d e f oder d a b f.

11. Eine Sehne ist eine gerade Linie, welche beliebig durch den Kreis gezogen wird, als d f.

12. Der Centriwinkel ist ein Winkel dessen Scheitel im Mittelpuncte liegt, a c b.

13. Der Peripheriewinkel ist ein Winkel dessen Scheitel in der Peripherie liegt, als b a d.



14. Ein Winkel im Abschnitte wird derjenige Winkel genannt, welcher von zwei Linien gebildet wird, die aus irgend einem Puncte des Bogens dieses Abschnittes nach den Endpuncten der Basis gezogen werden; so ist b c d ein Winkel in dem Abschnitte b c d.

15. Ein Winkel über einem Abschnitte wird der Winkel genannt, welcher in dem gegenüber liegenden Abschnitte gebildet wird, dessen Schenkel auf der Grundlinie des ersten stehen; z. B. b a d, welcher auf dem Abschnitte b c d steht.

16. Die Tangente ist eine den Kreis berührende Linie, welche verlängert denselben nicht scheidet, z. B. g a f (Fig. z. 5. Erkl.)

17. Kreise berühren einander, wenn sie zusammenstoßen, ohne einander zu schneiden.

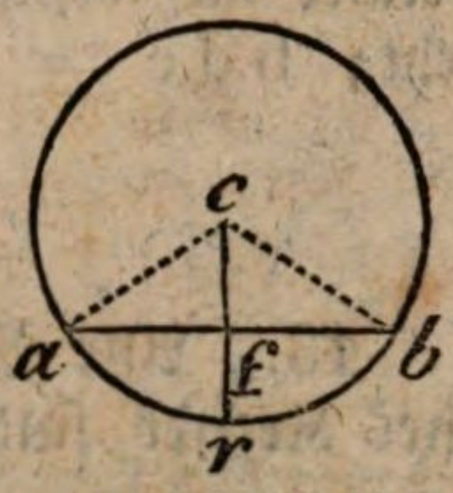
18. Aehnliche Bogen, oder ähnliche Ausschnitte sind solche, die von Radien begrenzt werden, welche denselben Winkel miteinander machen.

19. Abschnitte heißen ähnlich, welche ähnliche und ähnlich liegende Dreiecke enthalten.

20. Eine Figur heißt in einen Kreis beschrieben, oder ein Kreis heißt um eine Figur beschrieben, wenn alle Scheitel der Figur in der Peripherie des Kreises liegen.

21. Ein Kreis heißt in eine Figur beschrieben, oder eine Figur heißt um einen Kreis beschrieben, wenn der Kreis alle Seiten der Figur berührt.

22. Eine Figur heißt in eine andere beschrieben, wenn alle Winkel der eingeschriebenen Figur in den Seiten der andern liegen.



Satz 1. Der Radius cr, der eine Sehne ab unter rechten Winkeln schneidet, halbirt sie.

Zusatz 1. Wenn eine Linie eine Sehne unter rechten Winkeln schneidet und halbirt, so geht sie durch den Mittelpunct des Kreises.

Zusatz 2. Der Radius welcher die Sehne halbirt, halbirt auch den Bogen.

2. In jedem Kreise sind gleiche Sehnen vom Mittelpuncte gleichweit entfernt.

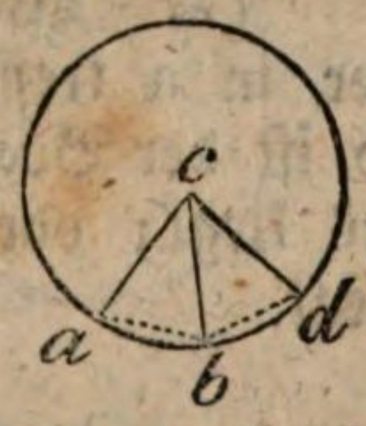
3. Wenn verschiedene Linien durch einen Kreis gezogen werden, so ist die größte der Diameter, und diejenigen, welche dem Mittelpuncte näher liegen, sind größer als die, welche weiter davon abstehen.

4. Wenn von einem Puncte im Kreise drei gleiche gerade Linien nach der Peripherie gezogen werden können, so ist dieser Punct der Mittelpunct.

5. Kein Kreis kann einen andern in mehr als zwei Puncten schneiden.

6. Es können also nur zwei gleiche Linien von einem äußern Puncte p, nach der Peripherie eines Kreises gezogen werden.

7. Wenn in einem Kreise verschiedene Radien gezogen werden, welche gleiche Winkel bilden, so werden auch die dadurch entstehenden Bogen und Ausschnitte gleich seyn; wenn acb = bcd: so ist der Bogen ab = dem Bogen bd; und der Ausschnitt acb = bcd.



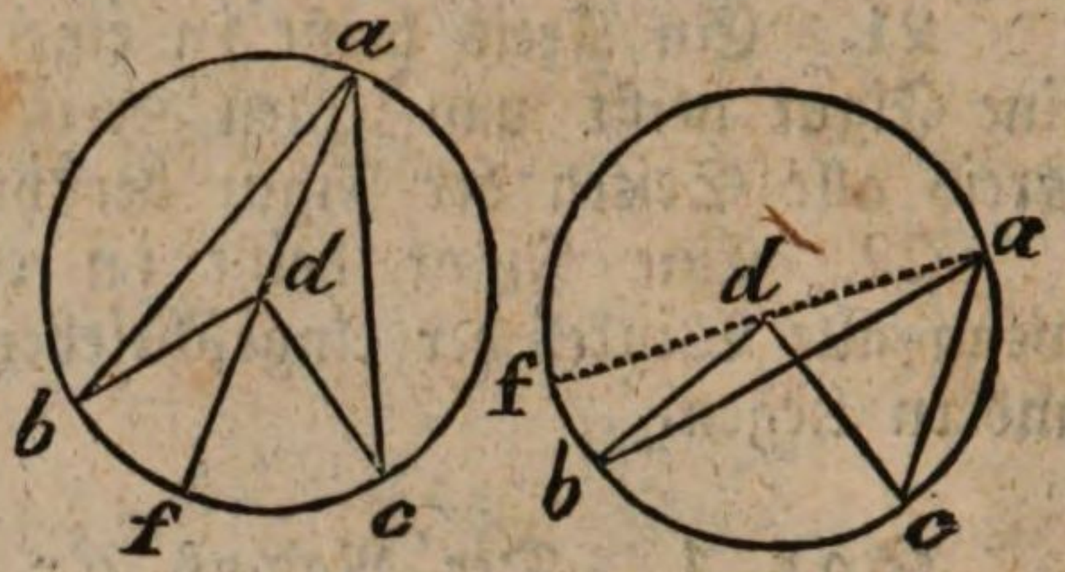
8. In gleichen Kreisen sind die Bogen und also auch die Ausschnitte den Winkeln proportionirt, welche von den Radien abgeschnitten werden.

9. Die Pheripherien der Kreise verhalten sich zu einander wie ihre Diameter.

10. Eine gerade Linie senkrecht auf dem Diameter eines Kreises an dem äußersten Puncte, berührt den Kreis in diesem Puncte, und liegt ganz außerhalb des Kreises.

11. Wenn zwei Kreise einander berühren, von innen oder von außen, so wird die Linie, welche durch ihre Mittelpuncte geht, auch durch den Berührungspunct gehen.

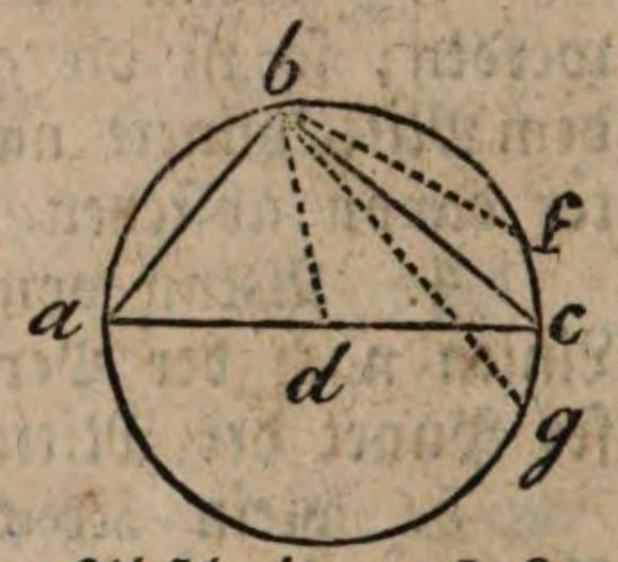
12. In einem Kreise ist der Winkel am Mittelpuncte doppelt so groß, als der Winkel an der Peripherie, welcher auf demselben Bogen steht; b d c = 2 b a c.



13. Alle Winkel in demselben Abschnitte eines Kreises sind gleich, d a c = d b c, und d g c = d h c.

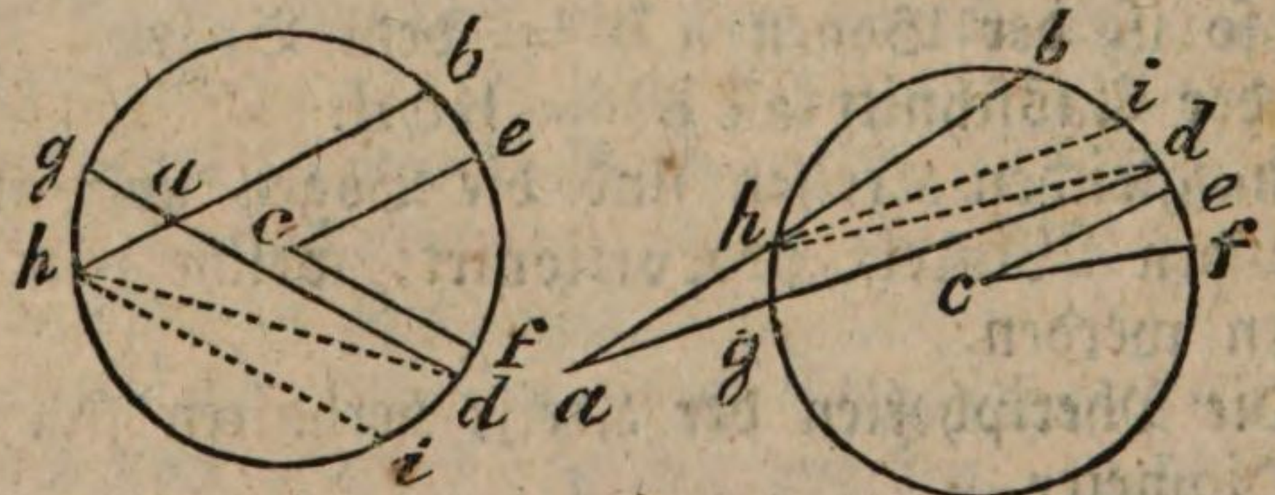
14. Wenn die Endpuncte zweier gleicher Bogen d a, b c, an derselben Seite durch gerade Linien d c, a b, verbunden werden; so sind diese parallel.

15. Der Winkel a b c im Halbkreise ist ein Rechter.



16. Der Winkel a b g in einem größern Abschnitte a b f g ist kleiner als ein Rechter; und der Winkel a b f in einem kleinern Abschnitte a b f ist größer als ein Rechter.

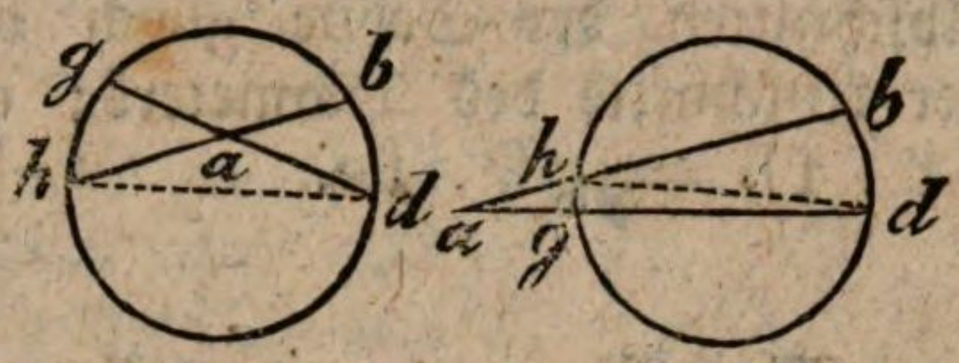
17. Wenn zwei den Kreis durchschneidende Gerade einander in a treffen, und es ist der Centriwinkel e c f = b a d, so ist der Bogen b d + g h = 2 e f, wenn a innerhalb des Kreises liegt; oder der Bogen b d — g h = 2 e f, wenn a außerhalb liegt.



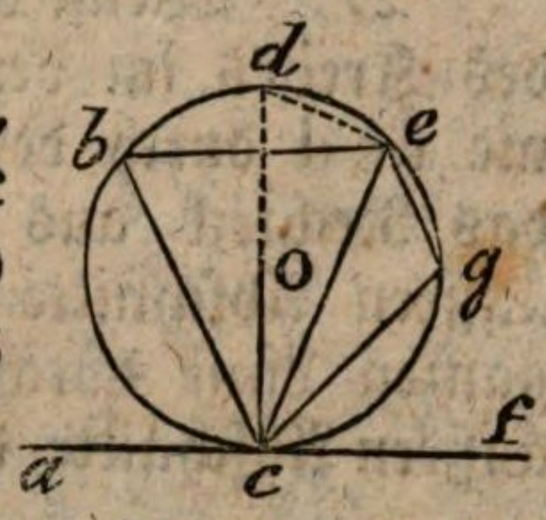
18. Wenn von einem außerhalb des Kreises liegenden Puncte zwei berührende Linien an den Kreis gezogen werden, so ist der Winkel welchen sie einschließen gleich dem Winkel

am Mittelpuncte, welcher auf der halben Differenz der beiden Theile der Peripherie steht, in welche sie durch den Berührungspunct getheilt wird.

19. Es ist der Winkel $a = \angle bhd + hdg$, wenn a innerhalb liegt; oder $a = bhd - hdg$, wenn a ausserhalb des Kreises liegt.

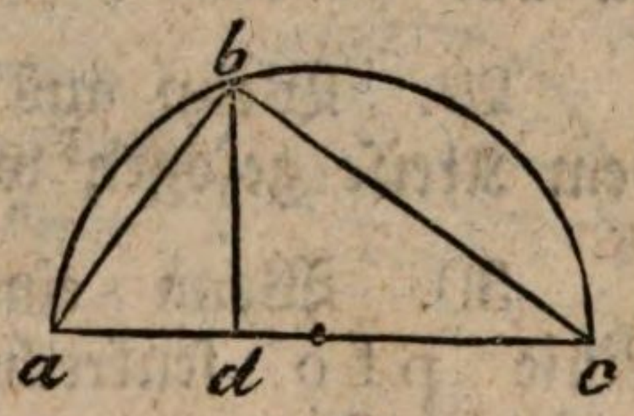


20. In jedem Kreise ist der Winkel, welcher am Berührungspuncte zwischen der Tangente und einer Sehne gebildet wird, gleich dem Winkel im gegenüber liegenden Abschnitte; $ecf = ebc$, und $eca = egc$.



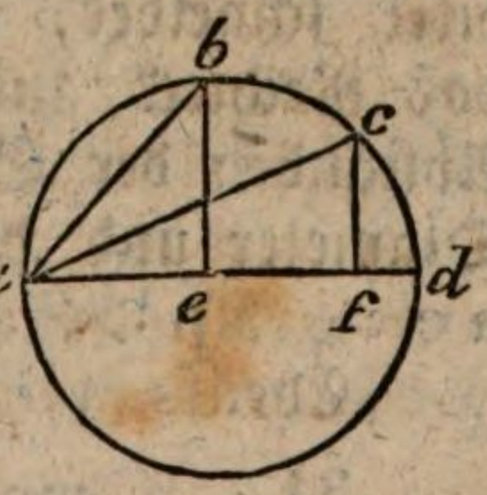
21, Eine Tangente an dem Mittelpuncte eines Bogens ist der Sehne desselben parallel.

22. Wenn von irgend einem Puncte b im Umfange des Halbkreises ein Perpendikel b d auf den Diameter gefällt wird, so ist es die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten des Diameters: $ad : db = db : dc$.

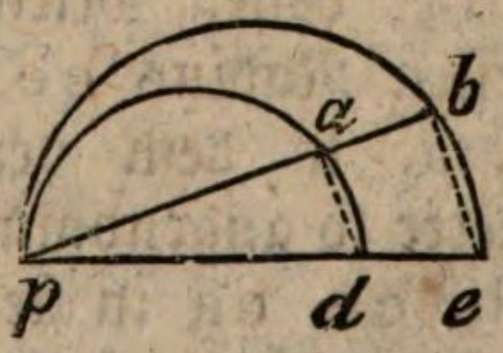


23. Die Sehne ist die mittlere Proportionale zwischen dem angrenzenden Abschnitte und dem Diameter, nach der Aehnlichkeit der Dreiecke.

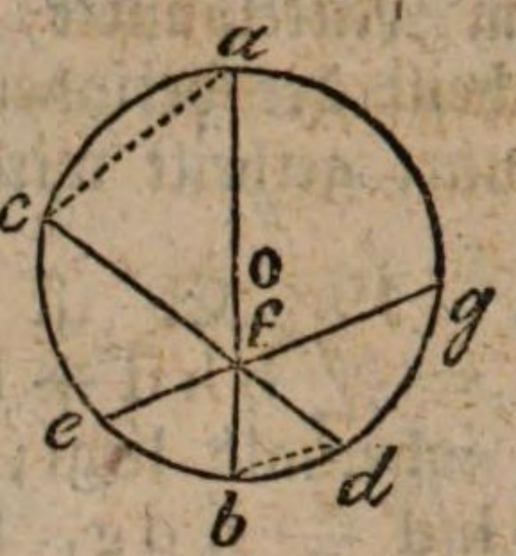
24. Wenn in einem Kreise der Diameter a d gezogen ist, und aus den Endpuncten der Sehnen a b, a c, Perpendikel auf den Diameter gefällt werden; so verhalten sich die Quadrate der Sehnen wie die Abschnitte des Diameters; $ae : af = ab^2 : ac^2$.



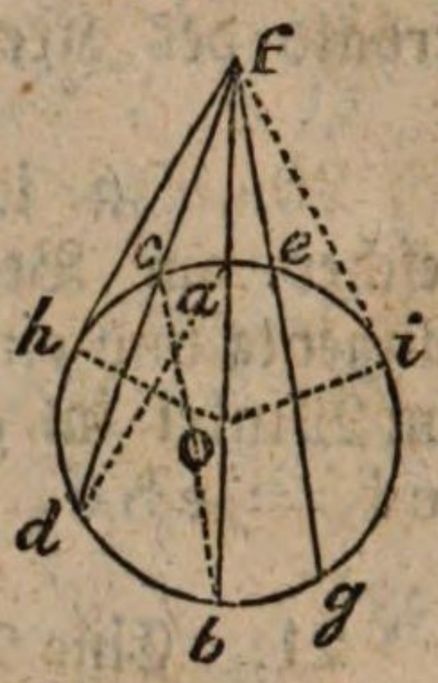
25. Wenn zwei Kreise einander in p berühren, und die Linie p d e durch ihre Mittelpuncte gezogen ist, und es schneidet irgend eine Linie p a b, welche durch diesen Punct gezogen wird, die Kreise, so sind die Abschnitte dieser Linie den Diametern proportional; $pa : pb = pd : pe$.



26. Wenn durch einen Punct f in dem Diameter eines Kreises eine Sehne c f d gezogen wird, so ist das Rechteck aus den Abschnitten der Sehne gleich dem Rechteck der Abschnitte des Diameters; c f . f d = a f . f b = g f . f e.



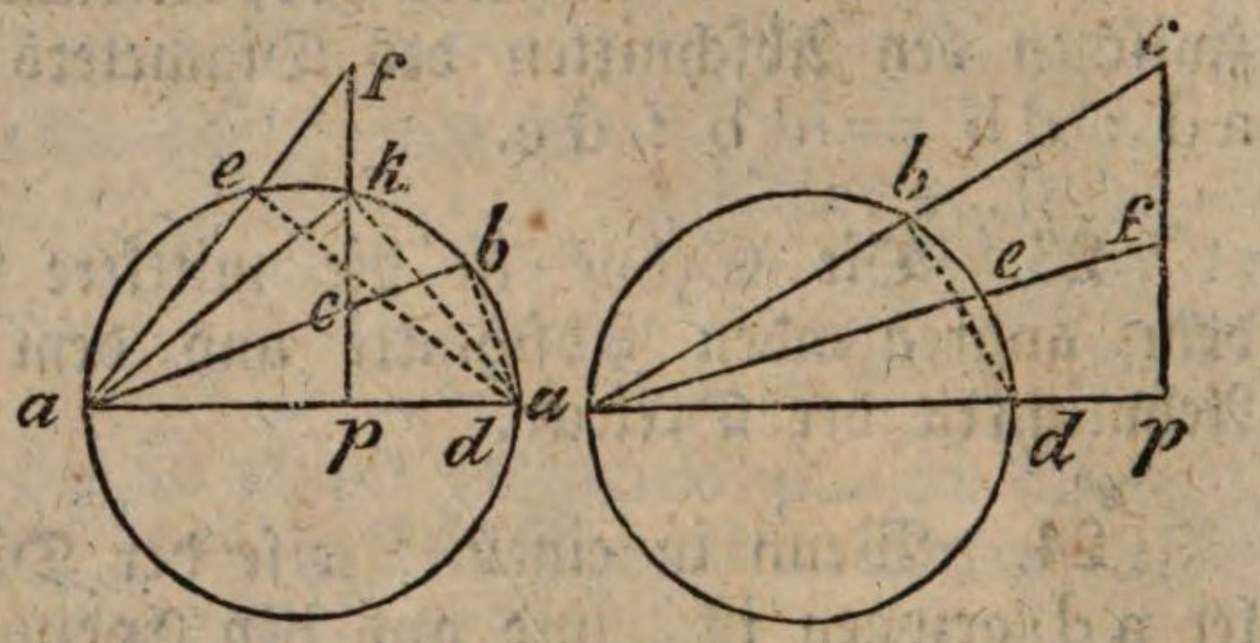
27. Wenn von einem Puncte f außerhalb des Kreises im verlängerten Diameter eine Linie f c d durch den Kreis gezogen wird, so ist das Rechteck aus der ganzen Linie und dem äußern Abschnitte gleich dem Rechteck aus der ganzen Linie durch den Mittelpunct, und dem äußern Abschnitte derselben; d f . f c = a f . f b.



28. Es sey h f eine Tangente bei h; so ist das Rechteck aus c f und f d = dem Quadrate der Tangente f h.

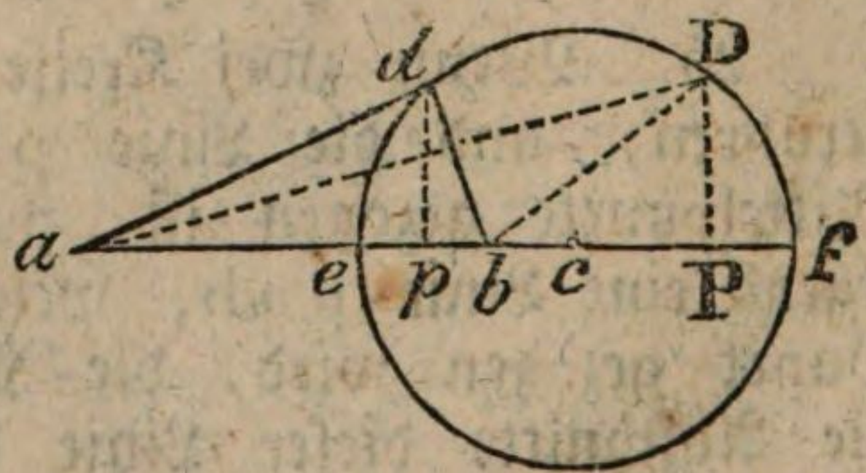
29. Wenn aus demselben Puncte f zwei Tangenten nach dem Kreise gezogen werden, so sind sie gleich; f h = f i.

30. Wenn eine Linie p f c senkrecht auf den Diameter a d eines Kreises gezogen wird; und eine Linie von a aus, sowohl den Kreis, als das Perpendikel schneidet, so ist das Rechteck aus den Abständen der Schnitte von a, gleich dem Rechteck aus dem Diameter und dem Abstande der Senkrechten von a; a b × a c = a p × a d.

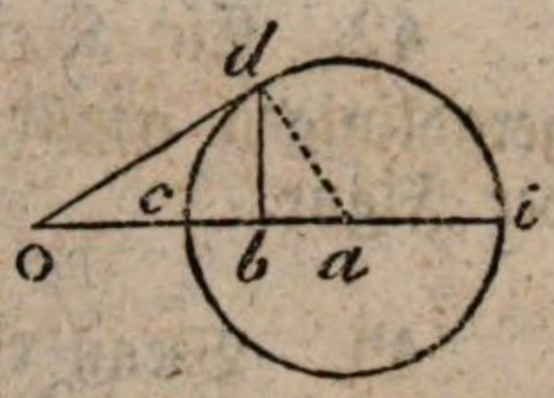


Ebenso a b × a c = a k².

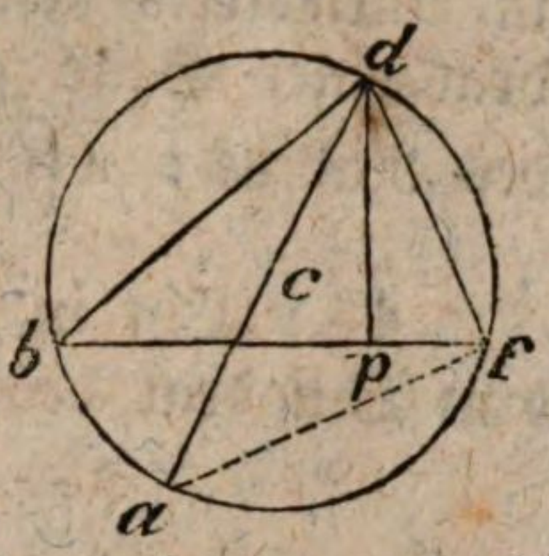
31. Wenn in einem Kreise e d f, dessen Mittelpunct c, und dessen Radius c e ist, die Puncte b, a, in dem verlängerten Diameter so angenommen werden, daß c b, c e, c a in stetiger Proportion stehen, so verhalten sich die beiden Linien b d, a d, welche aus diesen Puncten nach einem Puncte in der Peripherie des Kreises gezogen werden, wie b e zu a e.



32. Wenn in einem Kreise ein Perpendikel d b von einem Puncte d, auf den Diameter c i gefällt, und die Tangente d o aus d gezogen wird, so stehen a b, a c, a o in stetiger Proportion.

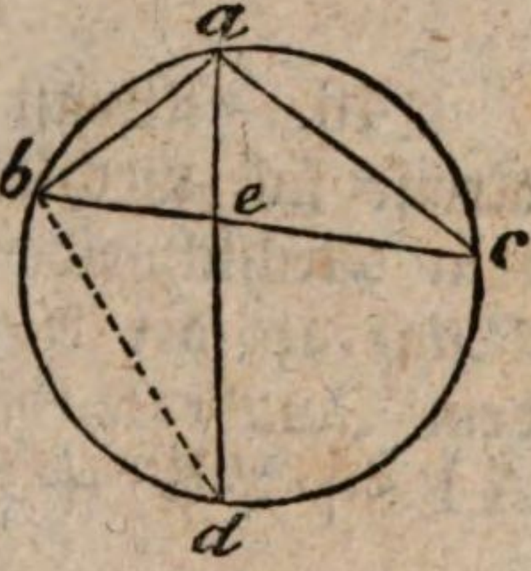


33. Wenn ein Dreieck b d f in einen Kreis beschrieben, ein Perpendikel d p aus d auf die Seite b gefällt, und der Diameter d a gezogen wird, so verhält sich der Perpendikel zu einer den Winkel d einschließenden Seite, wie die andere Seite zu dem Diameter des Kreises; d p : d b = d f : d a.

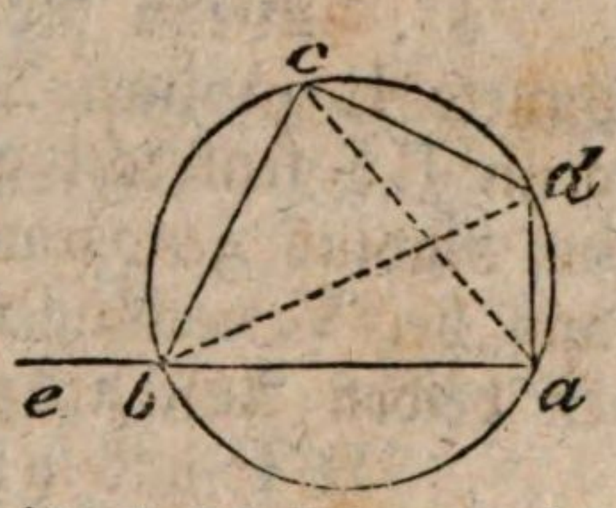


34. Das Rechteck aus den Seiten eines in den Kreis geschriebenen Dreiecks ist gleich dem Rechteck aus dem Diameter und dem Perpendikel, vom Scheitel des zwischen jenen Seiten liegenden Winkels auf der dritten Seite; b d . d f = a d . d p.

35. Wenn ein Dreieck b a c in einen Kreis beschrieben ist, und der Winkel a durch die gerade Linie a e d halbirt wird, so verhält sich eine Seite zu dem Abschnitt der halbirenden Linie in dem Dreieck, wie die ganze halbirende Linie zu der andern Seite; a b : a e = a d : a c; und a b . a c = b e . e c + a e².



36. Wenn ein Viereck a b c d in einen Kreis beschrieben wird, so ist die Summe der beiden gegenüber liegenden Winkel gleich zwei rechten; a d c + a b c = zwei rechten.



37. Wenn ein Viereck in einen Kreis beschrieben wird, so ist das Rechteck der Diagonalen gleich der Summe der Rechtecke der gegenüber liegenden Seiten.

38. Ein Kreis ist gleich einem Dreieck das zur Grundlinie den Umfang des Kreises und zur Höhe den Radius hat.

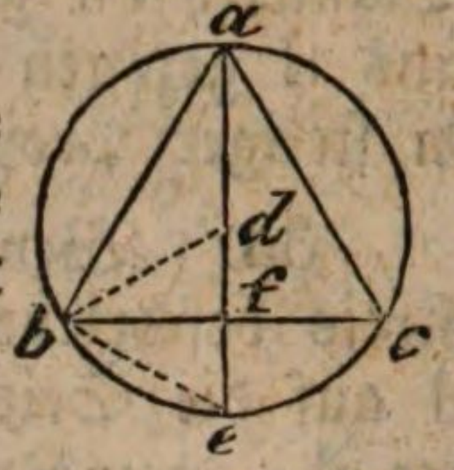
39. Die Fläche eines Kreises ist gleich dem Rechteck aus dem halben Umfange und dem halben Diameter.

40. Kreise (d. i. ihre Flächen) verhalten sich zu einander wie die Quadrate ihrer Diameter, oder wie die ihrer Radien, oder wie die ihrer Peripherien.

41. Aehnliche in Kreise beschriebene Polygone verhalten sich zu einander wie die Kreise, worein sie beschrieben sind.

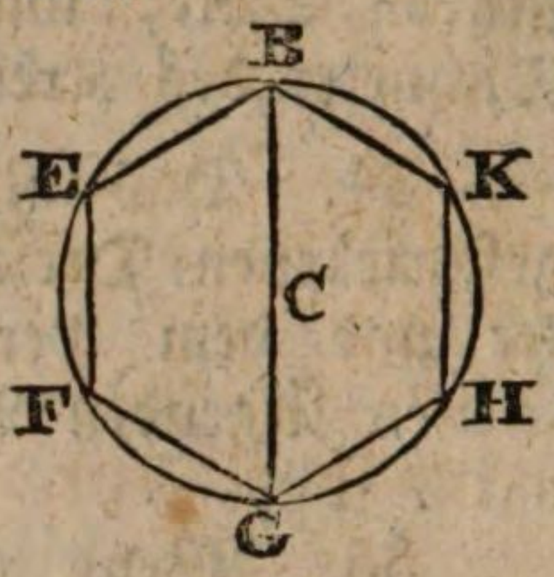
42. Ein Kreis verhält sich zu einer darum beschriebenen geradlinigen Figur, wie der Umfang des Kreises zum Umfange der Figur.

43. Wenn ein gleichseitiges Dreieck a b c in einen Kreis beschrieben wird, so ist das Quadrat einer Seite gleich dem dreifachen Quadrat des Radius: $\overline{ab}^2 = 3\overline{ad}^2$.

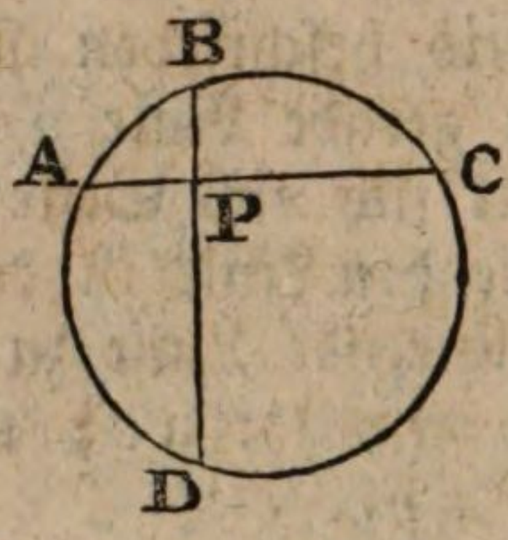


44. Ein in einen Kreis beschriebenes Quadrat ist gleich dem Quadrat des Radius, zwei mal genommen.

45. Die Seite eines in einen Kreis beschriebenen regulären Sechsecks ist gleich dem Radius des Kreises; $BE = BC$.

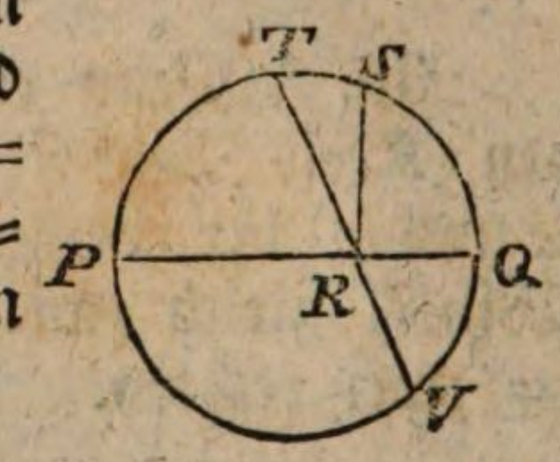


46. Wenn zwei Sehnen iu einem Kreise sich wechselsweise unter rechten Winkeln durchschneiden, so ist die Summe der Quadrate der Abschnitte der Sehnen gleich dem Quadrate des Diameters des Kreises.
$AP^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = \text{Diam.}^2$

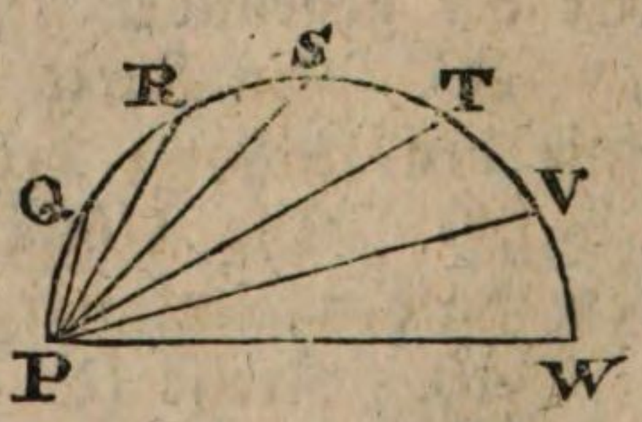


47. Wenn der Diameter PQ in einem Puncte R in zwei Theile getheilt wird, und wenn RS senkrecht auf PQ ist, und TR = dem Radius genommen und bis an den Umfang bei V verlängerte wird: so ist zwischen den beiden Abschnitten PR, RQ —

RT das arithmetische Mittel
RS das geometrische Mittel
RV das harmonische Mittel*).



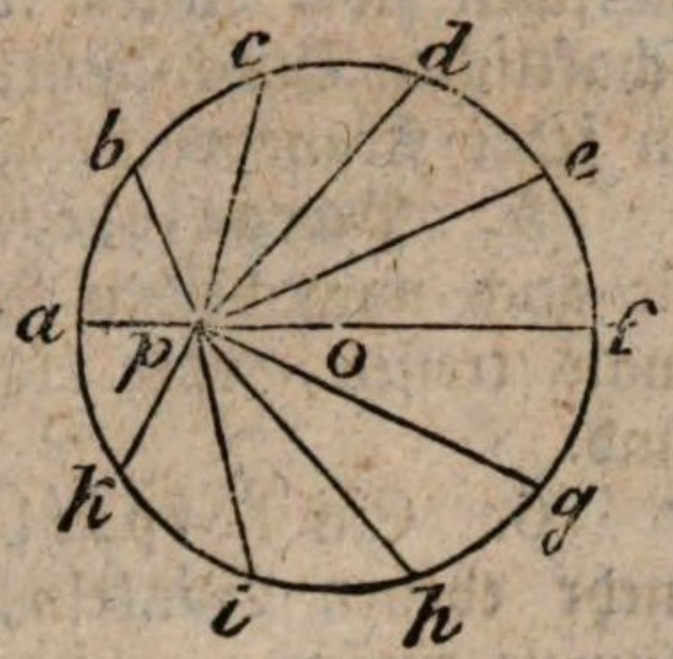
48. Wenn die Bogen PQ, QR, RS u. s. w. gleich sind, und die Sehnen PQ, PR, PS u. s. w. gezogen werden, so wird $PQ:PR = PR:PQ + PS = PS:PR + PT = PT:PS + PV$, &c.

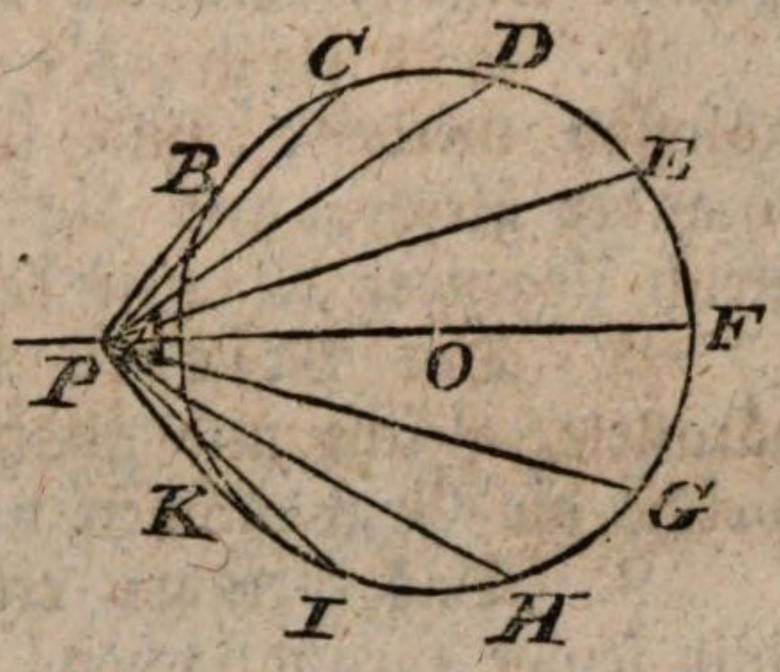


---

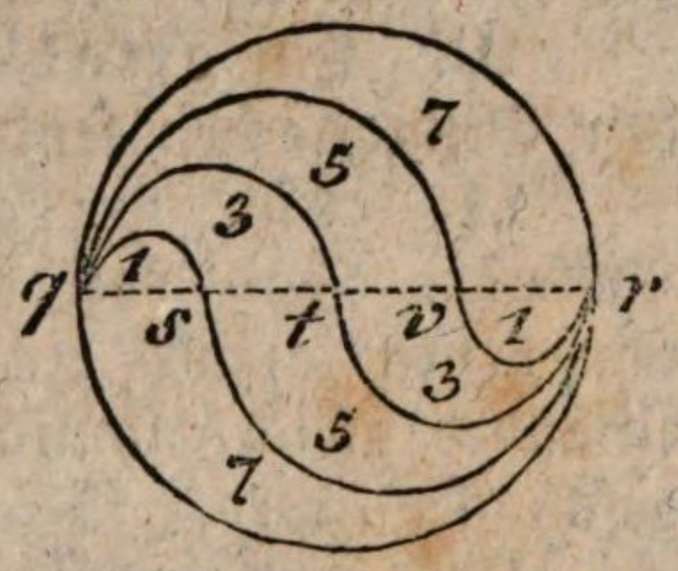
*) Man bemerke: daß sich das arithmetische Mittel zum geometrischen, wie das geometrische zum harmonischen verhält.
(D.)

49. Wenn o der Mittelpunct eines Kreises, und p ein Punct in dem Radius, oder in dem verlängerten Radius ist, und man theilt nun den Umfang in so viele gleiche Theile ab, bc, cd, u. s. w. als in 2n Einheiten enthalten sind, und zieht aus p nach allen Theilungspuncten gerade Linien, so wird das Product aus den, eine um die andere genommenen, Linien, z. B. $pa \times pc \times pe$ u. s. w. $= r^n - x^n$ wenn p in dem Kreise liegt, oder $= x^n - r^n$ wenn p außerhalb des Kreises liegt; und das Product aus den übrigen der Linien, z. B. $pb \times pd \times pf$, u. s. w. $= r^n + x^n$, wo $r = ao$ der Radius, und $x = op$ der Abstand des Punctes p vom Mittelpuncte.





50. Ein Kreis kann in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt werden, so daß sie einander sowohl an Fläche als Umfange gleich werden. Man theile den Diameter qr in die gegebene Anzahl gleicher Theile bei den Puncten s, t, v, u. s. w.; dann beschreibe man Halbkreise über den Diametern qs, qt, qv, und auf der andern Seite auf rv, rt, rs, so werden die Theile 17, 35, 53, 71 alle gleich seyn, so wohl an Fläche als an Umfange.



5. Abschnitt. Von ebenen Flächen und Körpern.

Erklärungen.

1. Der gemeinschaftliche Durchschnitt zweier Ebenen ist die Linie, in welcher sie zusammenstoßen oder einander schneiden.

2. Eine Linie steht senkrecht auf einer Ebene, wenn sie senkrecht auf jeder Linie in dieser Ebene steht, welche sie trifft.

3. Eine Ebene steht senkrecht auf einer andern, wenn jede Linie in der einen, die senkrecht auf der Linie ihres gemeinschaftlichen Schnittes steht, auch senkrecht auf der andern Ebene ist.

4. Die Neigung einer Ebene gegen eine andere, oder der Winkel, den sie zwischen sich bilden, ist der Winkel, der

zwischen zwei Linien liegt, die von einem Puncte im gemeinschaftlichen Durchschnitte unter rechten Winkeln gegen denselben, in jeder Ebene eine, gezogen werden.

5. Parallele Ebenen sind solche, die, so weit man sie auch nach beiden Richtungen verlängert, einander doch niemals treffen, oder die überall in gleichem senkrechten Abstande sind.

6. Ein körperlicher Winkel ist, der von drei oder mehr ebenen Winkeln, die einander in einem und demselben Puncte treffen, gebildet wird.

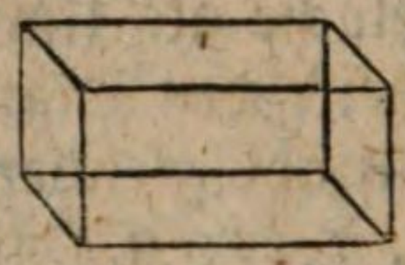
7. Aehnliche Körper, die von ebenen Figuren eingeschlossen werden, sind solche, deren körperliche Winkel alle einander gleich, und die von derselben Anzahl ähnlicher und gleich liegender Flächen begrenzt werden.

8. Das Prisma ist ein Körper, dessen Grundflächen parallele, gleiche und ähnliche Figuren, und deren Seitenflächen, welche die Grundflächen verbinden, Parallelogramme sind.

9. Das Prisma erhält besondere Namen nach der Gestalt seiner Grundflächen, je nachdem dieselben Dreiecke, Quadrate, Vierecke, Fünfecke, Sechsecke u. s. w. sind.

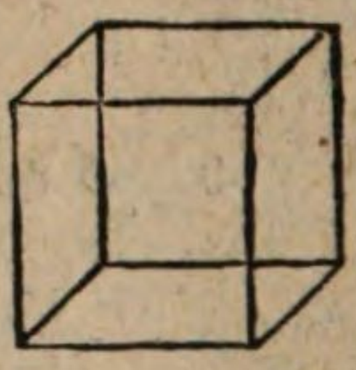
10. Ein gerades Prisma ist, dessen Seitenflächen auf den Grundflächen senkrecht stehen.

11. Ein Parallelepipedon ist ein Prisma, das von sechs Parallelogrammen, von denen je zwei einander gegenüber liegende einander gleich, ähnlich und parallel sind, eingeschlossen wird.



12. Ein rechtwinkliches Parallelepipedon ist, dessen einschießende Flächen Rechtecke sind, die auf einander senkrecht stehen.

13. Ein Würfel ist ein quadratisches Prisma, das von sechs gleichen Quadraten, die auf einander senkrecht sind, eingeschlossen wird.



14. Ein Cylinder ist ein rundes Prisma, das zu Grundflächen Kreise hat, und durch die Umdrehung einer geraden Linie um die Mittelpuncte zweier gleichen und parallelen Kreise, so daß sie der Achse immer parallel bleibt, entstanden gedacht wird.

15. Die Axe eines Cylinders ist die gerade Linie, welche die Mittelpuncte der beiden parallelen Kreise, um die der Körper beschrieben ist, verbindet.

16. Eine Pyramide ist ein Körper, dessen Grundfläche eine geradlinige Figur, und dessen Seitenflächen Dreiecke sind, deren Spitzen alle in einem Puncte über der Grundfläche, der die Spitze der Pyramide genannt wird, liegen.

17. Eben so wie das Prisma erhält die Pyramide, nach der Gestalt der Grundfläche, besondere Namen.

18. Ein Kegel ist eine runde Pyramide, welche einen Kreis zur Grundfläche hat, und die man sich durch die Bewegung einer geraden Linie um die Peripherie eines Kreises so entstanden denkt, daß ein Ende derselben in einem Puncte über der Ebene dieses Kreises fest bleibt.

19. Die Axe eines Kegels ist die gerade Linie, die die Spitze oder den festen Punct, und den Mittelpunct des Kreises, um den die Figur beschrieben ist, verbindet.

20. Aehnliche Kegel und Cylinder sind solche, in denen die Höhen und die Durchmesser der Grundflächen in Proportion stehen.

21. Eine Kugel ist ein Körper, der von einer krummen Oberfläche begrenzt wird, welche überall gleich weit von einem gewissen Puncte innerhalb, dem sogenannten Mittelpuncte, absteht. Man denkt sie sich durch die Umdrehung eines Halbkreises um seinen Durchmesser, der fest bleibt, entstanden.

22. Die Axe einer Kugel heißt die gerade Linie, um die sich der Halbkreis dreht, und der Mittelpunct ist derselbe, wie der des sich drehenden Kreises.

23. Der Durchmesser einer Kugel ist eine gerade Linie, die durch den Mittelpunct geht, und sich auf beiden Seiten in der Oberfläche endigt.

24. Die Höhe eines Körpers ist die senkrechte Linie, die von der Spitze auf die entgegengesetzte Seiten- oder Grundfläche gezogen wird.

Satz 1. Wenn ein Prisma durch eine zur Grundfläche parallele Ebene geschnitten wird, so ist der Schnitt der Grundfläche gleich und parallel.

2. Wenn ein Cylinder durch eine zu seiner Grundfläche parallele Ebene geschnitten wird, so wird der Schnitt ein der Grundfläche gleicher Kreis seyn.

3. Alle Prismen und Cylinder von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe sind einander gleich.

4. Rechtwinklige Parallelepipeda von gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundflächen.

5. Rechtwinkliche Parallelepipeda von gleichen Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen.

6. Da Prismen und Cylinder sich wie ihre Höhen verhalten, wenn ihre Grundflächen, und wie ihre Grundflächen verhalten, wenn ihre Höhen einander gleich sind, so werden sie sich allgemein, wenn keines von beiden einander gleich ist, zu einander verhalten, wie die Producte ihrer Grundflächen und Höhen; daher sind auch diese Producte die eigentlichen Zahlenmaße ihrer Größen.

7. Aehnliche Prismen und Cylinder verhalten sich zu einander wie die Würfel ihrer Höhen oder anderer ähnlicher Linear-Dimensionen.

8. In jeder Pyramide ist ein, der Grundfläche paralleler, Schnitt eine derselben ähnliche Figur; und diese beiden Ebenen verhalten sich zu einander, wie die Quadrate ihrer Abstände von der Spitze.

9. In jedem Kegel ist ein der Grundfläche paralleler Schnitt ein Kreis, und dieser Schnitt verhält sich zur Grundfläche, wie die Quadrate ihrer Abstände von der Spitze.

10. Alle Pyramiden und Kegel von gleichen Grundflächen und Höhen sind einander gleich.

11. Jede Pyramide ist der dritte Theil eines Prismas von derselben Grundfläche und Höhe.

12. Wird eine Kugel von einer Ebene geschnitten, so ist der Schnitt ein Kreis.

13. Jede Kugel ist zwei Drittel des um sie umschriebenen Cylinders.

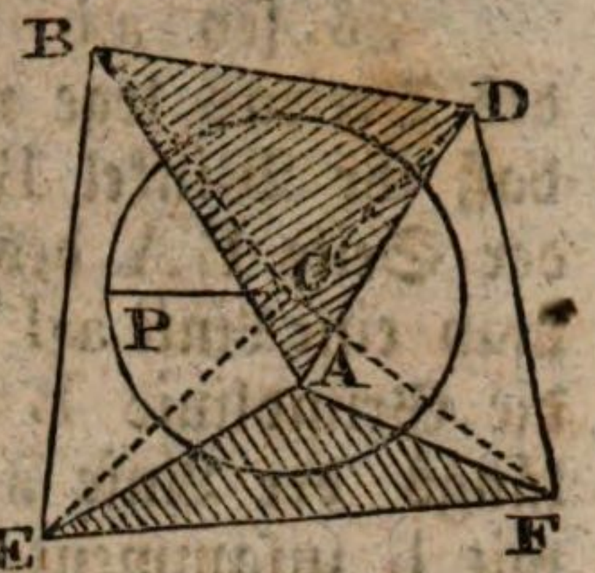
14. Ein Kegel, eine Kugel und ein Cylinder von derselben Grundfläche und Höhe verhalten sich zu einander wie die Zahlen 1, 2, 3.

15. Alle Kugeln verhalten sich zu einander wie die Würfel ihrer Durchmesser, da diese alle gleiche Theile der um sie umschriebenen Cylinder sind.

16. Nur drei Arten regelmäßiger ebener Figuren können, zusammen verbunden, einen körperlichen Winkel bilden; diese sind 3, 4 oder 5 Dreiecke, 3 Quadrate und 3 Fünfecke.

Daher kann es nur fünf regelmäßige Körper geben, die Pyramide, den Würfel, das Oktaeder, das Dodekaeder und das Ikosaeder.

17. Nur eine Art der fünf regelmäßigen Körper kann, mit ihren Winkeln zusammen gestellt, vollkommen einen körperlichen Raum ausfüllen, nämlich acht Würfel.



18. Eine Kugel verhält sich zu einem umschriebenen Körper (dessen Seitenflächen alle die Kugel berühren), wie die Oberfläche der Kugel zu der Oberfläche des Körpers.

19. Alle um ein und dieselbe Kugel umschriebenen Körper verhalten sich wie ihre Oberflächen.

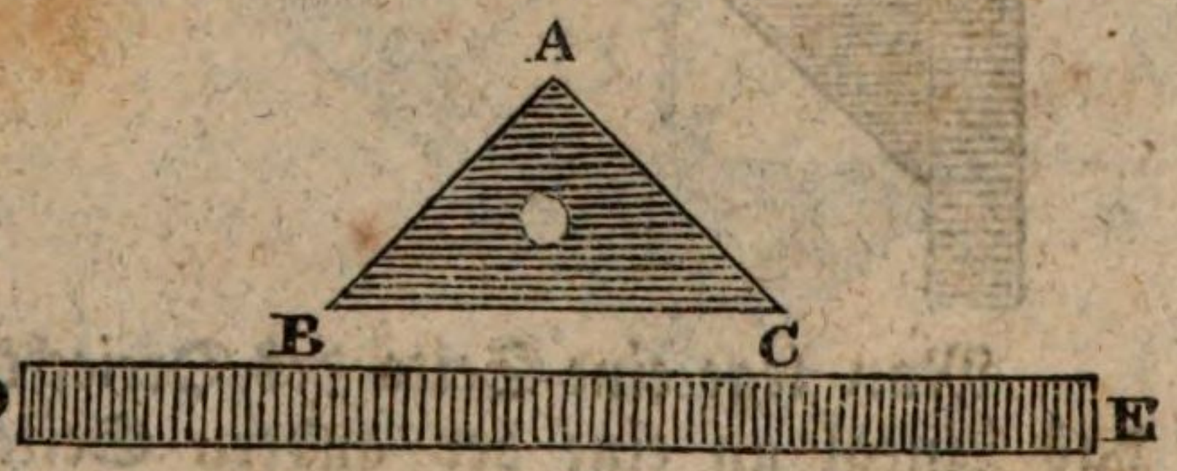
20. Unter allen Körpern von gleicher Oberfläche ist die Kugel der größte und schließt den meisten Raum ein.

6. Abschnitt. Praktische Geometrie.

Es ist nicht meine Absicht, hier eine vollständige Sammlung geometrischer Aufgaben zu geben, sondern bloß eine Auswahl der brauchbarsten, vorzüglich in Bezug auf die Beschäftigungen der Mechaniker und Ingenieurs.

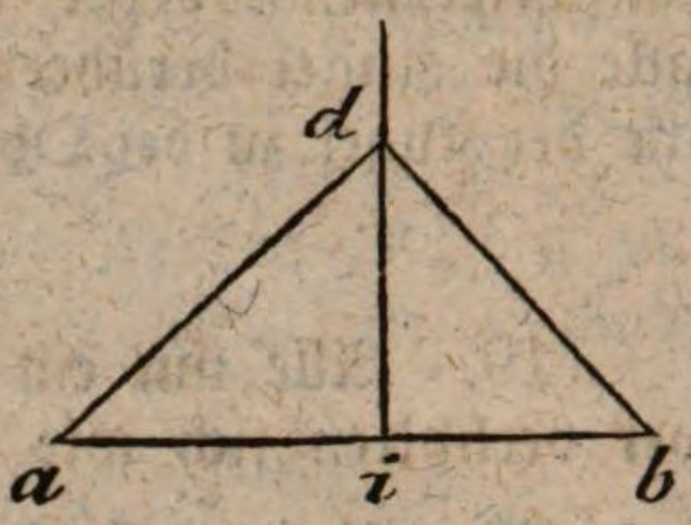
Die wohlbekannten Instrumente, deren man sich bei geometrischen Constructionen bedient, sind der verjüngte Maaßstab, Cirkel, Transporteur, Proportionscirkel und Parallel-Lineal. Diesen können einige wenige andre gebräuchliche Instrumente hinzugefügt werden, die wir in der Folge beschreiben. Zuerst vom Triangel und dem Lineale.

Diese sind, wie ihre Namen anzeigen, ein Dreieck, und zwar ein rechtwinklich-gleichschenkliches Dreieck, und ein Lineal, beides von trocknem Holze oder Elfenbein, Ebenholz oder Metall verfertigt. Jede Seite AB, AC, des Dreiecks um den rechten Winkel A herum, sey 3, 4, 6 oder 8 Zoll, nach der Größe der Figuren, bei deren Construction man es zu brauchen denkt. Ungefähr in der Mitte des Dreiecks sey eine kreisrunde Oeffnung, wie die Figur sie zeigt; am besten ist es, wenn eine Scale gleicher Theile auf jede der drei Seiten aufgetragen wird. Das Lineal sey von 12 bis 18 Zollen in der Länge und habe längs einer seiner Seiten eine Scale. Beide Instrumente zusammengenommen sind in ihrer Anwendung von großem Nutzen, wie es sich sogleich zeigen wird.

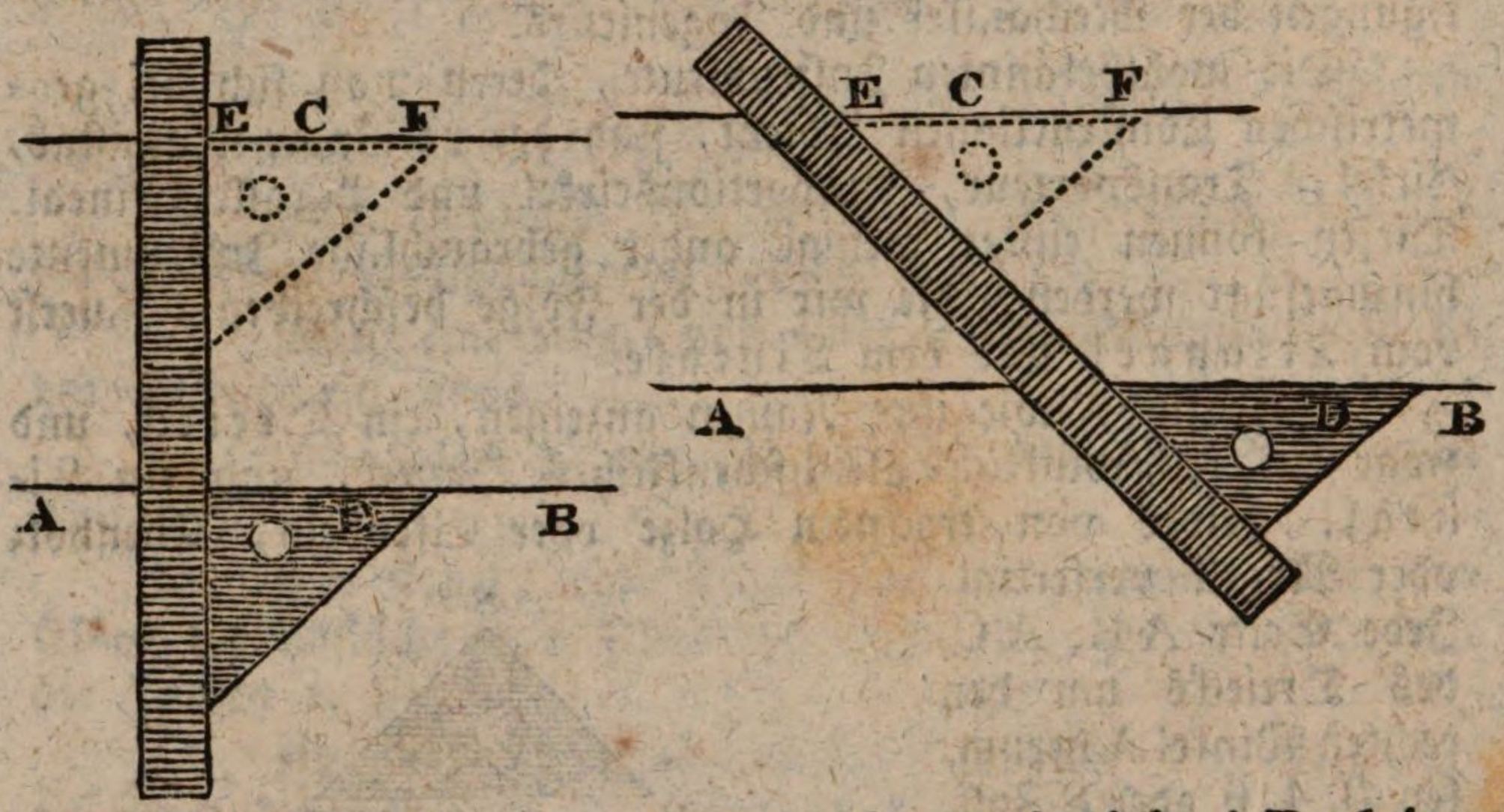


Aufgabe 1. Eine gegebene Linie zu halbiren.

Es sey a b die gegebene Linie. Die längste Seite B C des Dreiecks lege man so, daß sie mit a b zusammenfällt, und daß ihr Winkel B auf den Punkt a zu liegen kommt, längs der Seite B A des Dreiecks aber ziehe man eine Linie a d. Hierauf lasse man die Grundlinie B C des Dreiecks sich längs der Linie a b bewegen, bis C mit b zusammentrifft, und längs der Seite C A ziehe man die Linie b d, welche die vorhergezogene Linie in d schneidet. Nun bringe man das Lineal an die Linie a b, lege daran einen Schenkel B A des Dreiecks, rücke das Dreieck längs dem Lineale, bis der andere Schenkel A C durch den Punct d geht, ziehe längs A C die eben so gelegene Linie d i, so wird diese senkrecht auf a b seyn, und wird dieselbe in i, dem verlangten Puncte, halbiren.

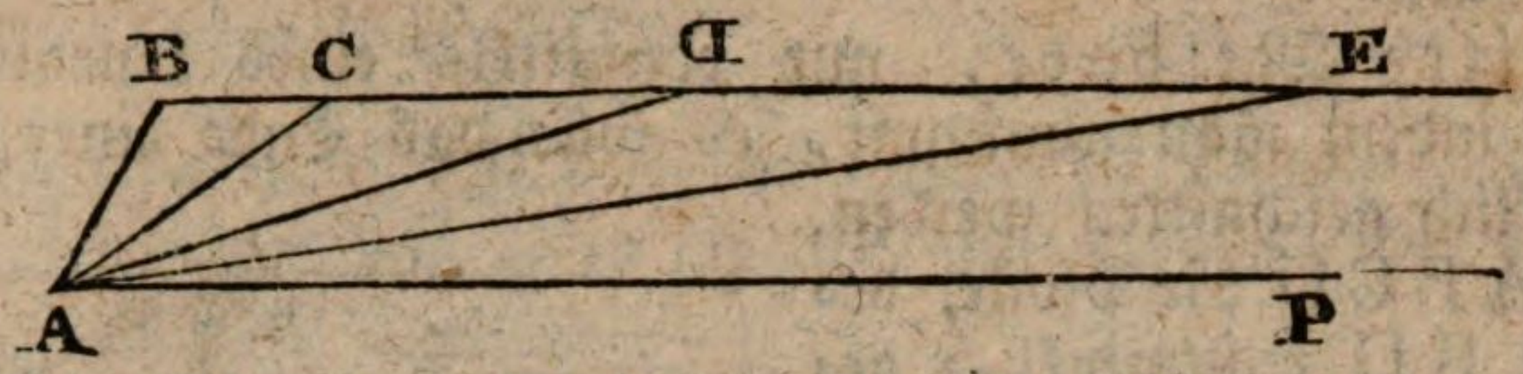


Aufgabe 2. Durch einen gegebenen Punct C eine Linie zu einer gegebenen Linie A B parallel zu ziehen.



Man lege eine Seite des Dreiecks an die Linie A B, bringe das Lineal an eine der andern Seiten des Dreiecks, halte es fest, und bewege das Dreieck ihm entlang, bis dieselbe Seite, welche mit einem Theile der Linie A B zusammenfiel, den Punct C berührt. Hierauf ziehe man längs dieser Seite durch den Punct C die Linie E F, so wird sie zu A B parallel seyn, wie es verlangt wurde.

Aufgabe 3. Einen gegebenen Winkel, seine Hälfte u. s. w. zu halbiren.



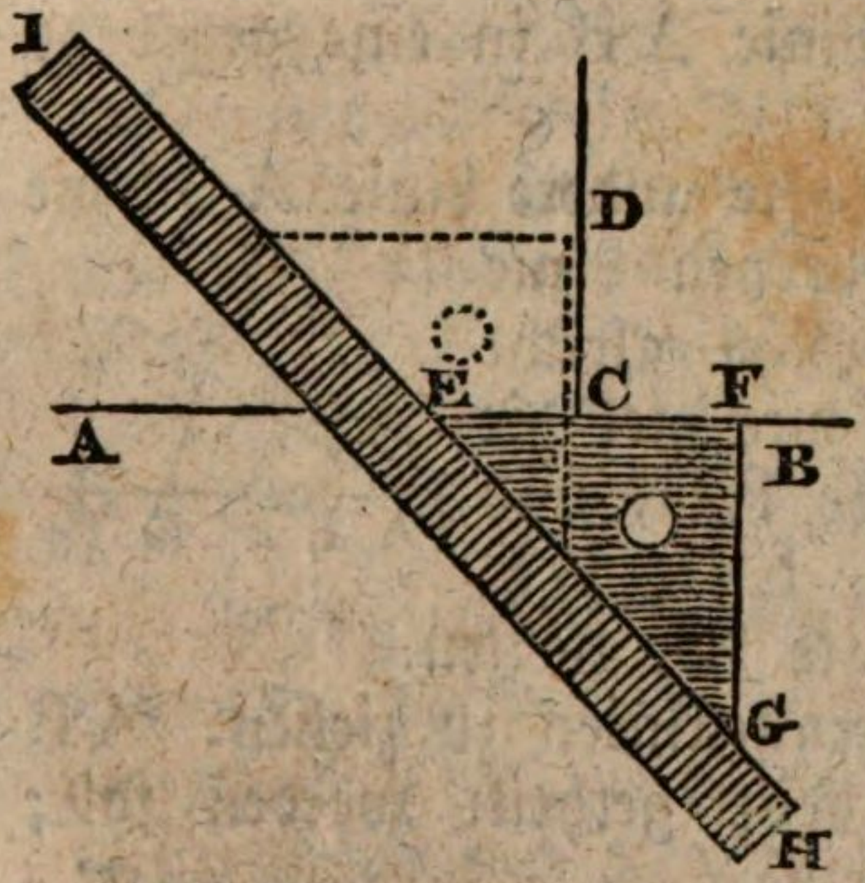
BAP sey der gegebene Winkel. Durch einen Punct B ziehe man, (nach der vorhergehenden Aufgabe), BE parallel zu AP. Auf BE trage man mit dem Cirkel, von der Scala an der Schärfe des Lineals BC=BA auf, ziehe AC, so wird diese Linie BAP halbiren.

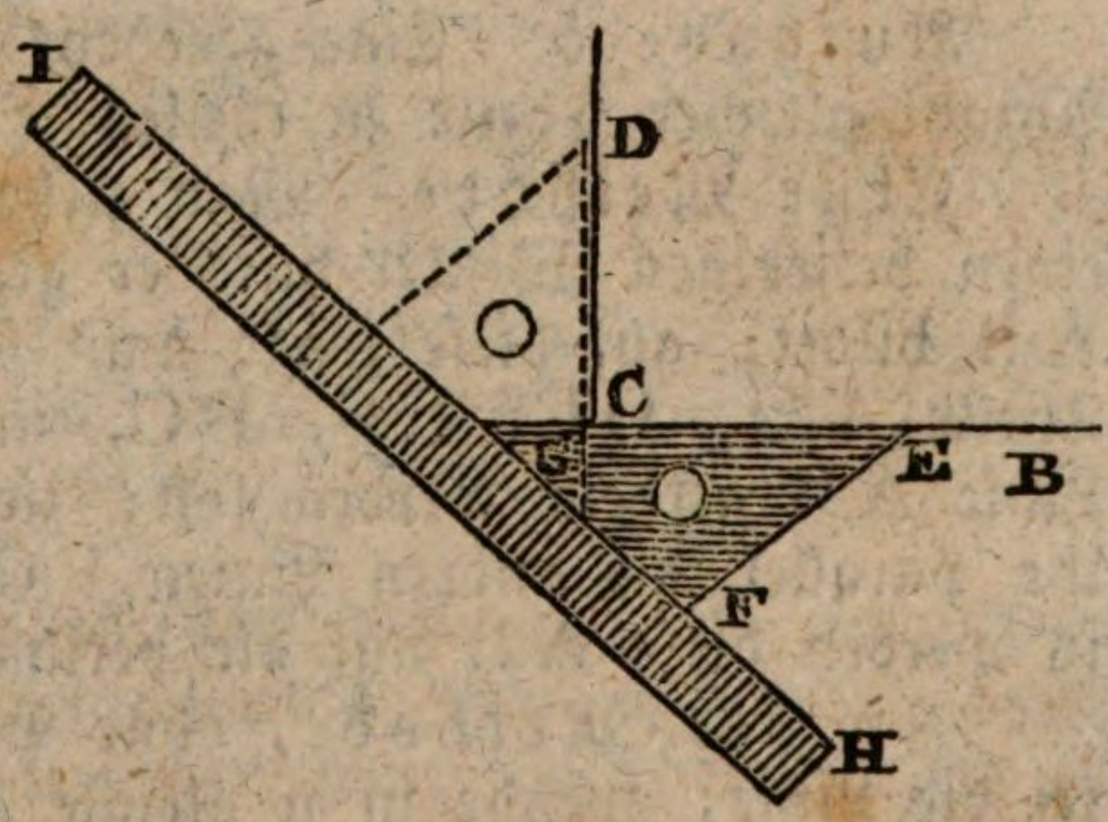
Ferner trage man auf BE von C aus CD=CA auf, ziehe AD, so wird diese Linie CAP halbiren, oder BAP vierteln.

Ferner trage man auf BE, DE=DA auf, ziehe EA, so wird EAP=$\frac{1}{8}$BAP seyn, und so fort.

Aufgabe 4. In einem gegebenen Punete C einer gegebenen Linie AB eine Senkrechte zu errichten.

Erste Methode. An die Linie AB lege man einen der Schenkel, EF, und die Seite des Lineals HI an die Hypotenuse EG des Dreiecks, halte es fest, und bewege das Dreieck aufwärts bis die Seite FG den Punct berührt; hierauf ziehe man CD längs diesem Schenkel, so wird dies die verlangte Senkrechte seyn.

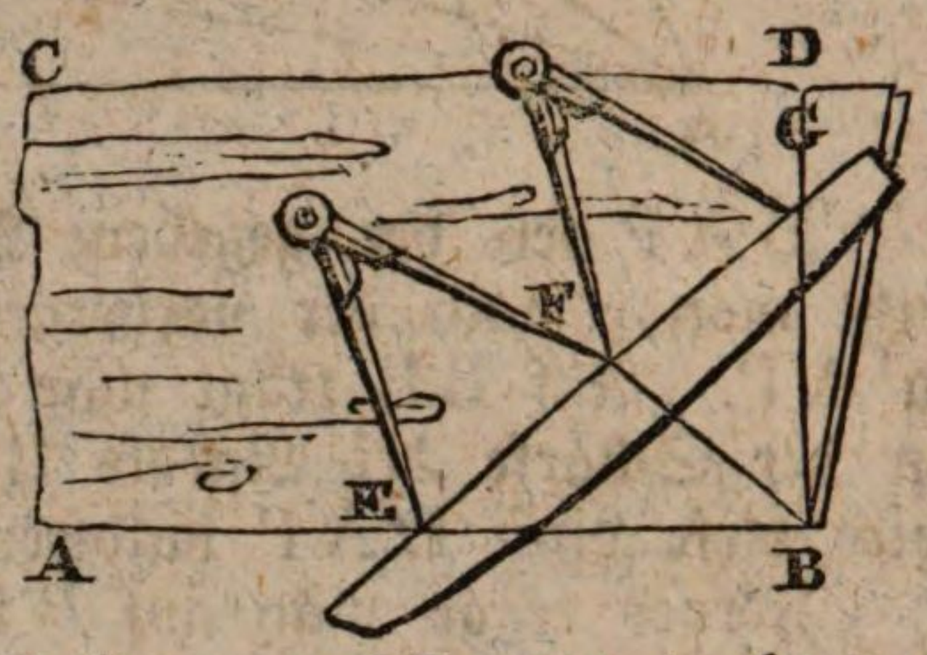




Zweite Methode. Man lege die Hypotenuse GE des Dreiecks an die Linie AB, die Schärfe des Lineals HI an den Schenkel GF, halte es fest und drehe das Dreieck, so daß der andere Schenkel FE gegen das Lineal zu liegen kommt; hierauf bewege man das Dreieck aufwärts, bis die Hypotenuse den Punct C trifft, ziehe ihr entlang CD, so wird dies die verlangte Senkrechte seyn.

Anmerkung. Nach ähnlichen Methoden kann man von einem Puncte D, oberhalb einer Linie AB, ein Perpendikel darauf fällen.

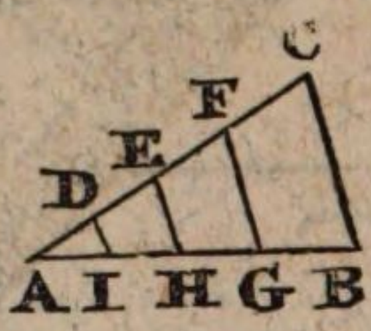
Dritte Methode, nur vermittels eines Lineals und Cirkels, indem man annimmt, es solle das Ende einer Pfoste rechtwinklich geschnitten werden. Es sey ABCD die Pfoste, deren Ende BD rechtwinklich geschnitten werden soll. Ist die Kante AB ganz gerade, so öffne man den Cirkel bis zu einer passenden Entfernung, und setze den einen Fuß desselben in B, den andern in einen beliebigen Punct, z. B. F; den Fuß in F halte man fest, und drehe den andern, bis er die Kante AB in E trifft; hierauf halte man beide Füße fest, und lege die Schärfe des Lineals an EF, wie die Figur zeigt; halte den Fuß des Cirkels in F noch fest, und wende den andern in die Richtung FG, so daß G dicht an der Schärfe des Lineals liegt, und mache in G ein Zeichen. Wenn nun die Schärfe des Lineals an G und B gelegt, und GB gezogen wird, so wird diese Linie senkrecht auf der Kante AB seyn.



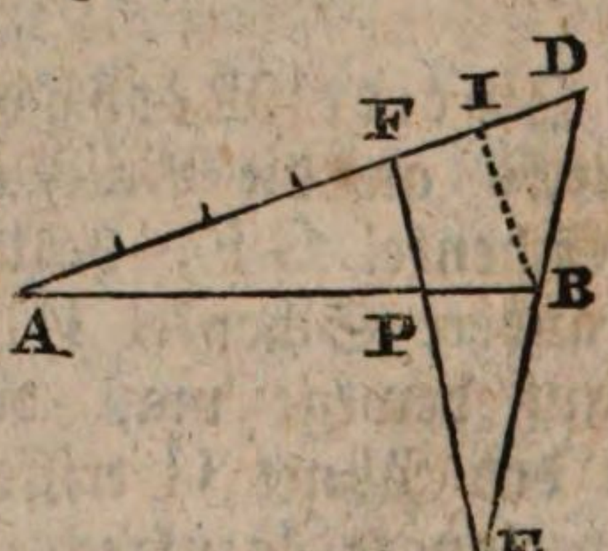
Anmerkung. Bei dieser Construction ist F offenbar der Mittelpunct, und EG der Durchmesser eines Halbkreises, der durch B geht; folglich ist B ein rechter Winkel.

Aufgabe 5. Eine gegebene Linie AB in eine gegebene Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Erste Methode. Man ziehe eine andere Linie AC, die einen beliebigen Winkel mit der gegebenen Linie AB bildet; auf diese trage man so viel gleiche Theile AD, DE, EF, FC, in wie viel die Linie AB getheilt werden soll; ziehe BC, und ihr parallel die andern Linien FG, EH, DI, so werden diese AB auf die verlangte Art theilen.



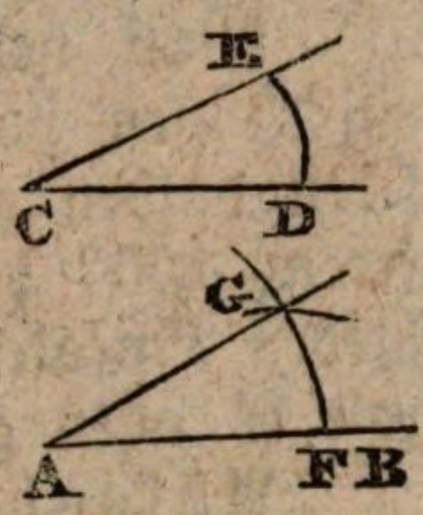
Zweite Methode, ohne Parallellinien zu ziehen. AB sei die Linie, welche in n gleiche Theile getheilt werden soll; durch das eine Ende A ziehe man eine gerade Linie AC, auf der man $n+1$ gleiche Theile aufträgt, so daß der Punct D am Ende des $(n+1)$sten Theils liegt; hierauf ziehe man die Linie DB und verlängere sie, bis die Verlängerung $BE = BD$ wird. Ist F das Ende des $(n-1)$sten Theils, so ziehe man FE,



dann wird die gerade Verbindungslinie die gegebene Linie AB in dem Puncte P so schneiden, daß $BP = \frac{1}{n} AB$ ist, folglich Theile, gleich BP, auf BA aufgetragen, theilen dieselbe in dem gegebenen Verhältnisse *).

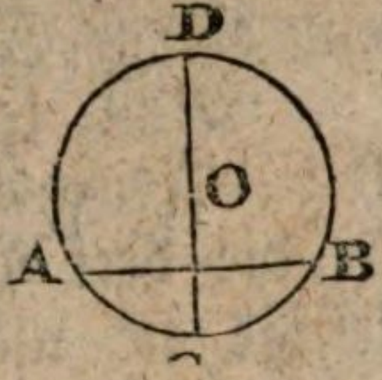
Aufgabe 6. In einem gegebenen Puncte A auf einer gegebenen Linie AB einen Winkel aufzutragen, der einem gegebenen Winkel C gleich ist.

Von den Puncten A und C, als Mittelpuncten, beschreibe man mit einem beliebigen Halbmesser die Bogen DE, FG; hierauf beschreibe man aus F, als Mittelpunct, und mit DE als Halbmesser, einen Bogen, der FG in G schneidet, ziehe die Linie AG, so wird diese den verlangten Winkel bilden.



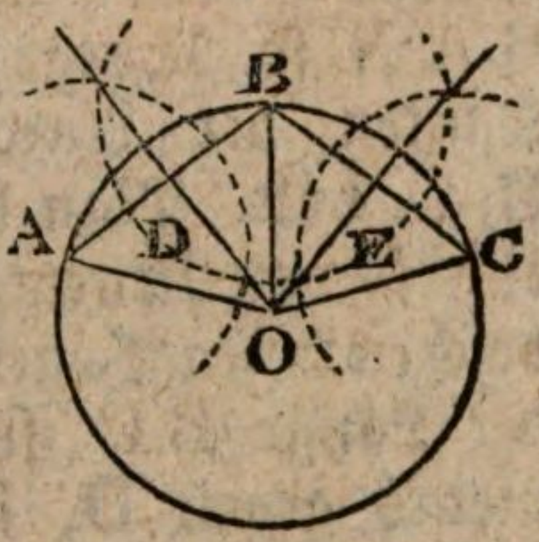
Aufgabe 7. Den Mittelpunct eines Kreises zu finden.

Man ziehe eine Sehne AB, halbire sie durch eine darauf senkrechte Linie CD, halbire diese in O, so wird dies der verlangte Mittelpunct seyn.



Aufgabe 8. Durch drei gegebene Puncte A, B, C, die Peripherie eines Kreises zu beschreiben.

Von dem mittlern Puncte B ziehe man Sehnen BA, BC, nach den beiden andern Puncten, und halbire dieselben durch Senkrechte, die sich in O, dem Mittelpuncte, treffen. Hierauf beschreibe man vom Mittelpuncte C aus, mit dem Abstande einer der Puncte, z. B. OA einen Kreis, so wird dieser durch die beiden andern Puncte B und C gehen, wie verlangt wurde.



Aufgabe 9. Ueber einer gegebenen Linie AB einen Kreisbogen zu beschreiben, der eine gewisse Anzahl Grade enthält, so jedoch, daß man die Aufgabe ohne Cirkel und ohne den Mittelpunct des Kreises zu suchen, löst.

Man lege die Lineale unter einem Winkel ACB, gleich dem Supplemente der halben gegebenen Anzahl Grade, an

---

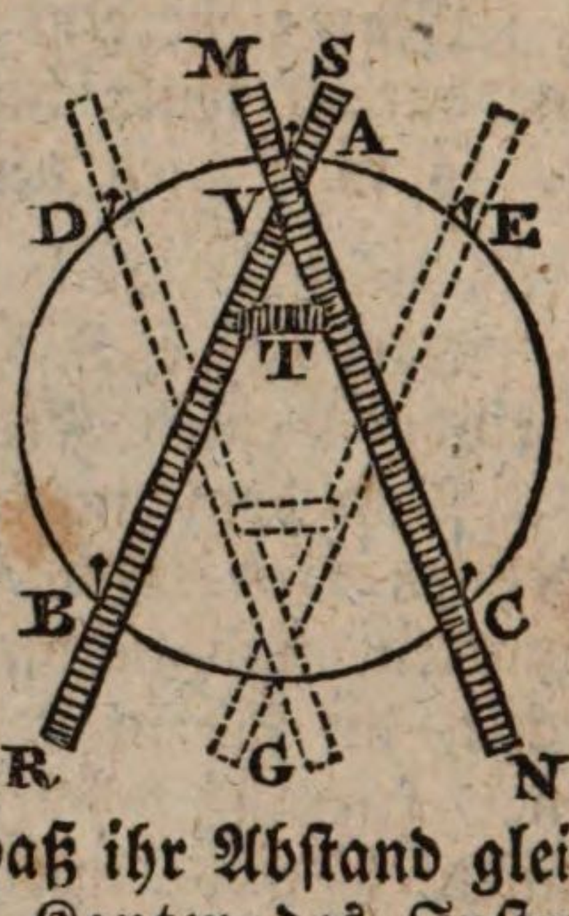
*) Die Richtigkeit dieser Methode kann leicht bewiesen werden. Durch I, den Halbirungspunct von FD auf AC, ziehe man IB, so ist, da DB = BE, und DI = IF, IB zu FB parallel. Folglich: BP : BA = IF : IA = 1 : n, nach der Construction.

einander, und befestige sie in C; stecke an die Enden der gegebenen Linie Nadeln, und halte in C einen Bleistift, bewege die Ecken dieses Instruments gegen die Nadeln, so wird der Bleistift den verlangten Bogen beschreiben.

Man nehme an, es soll über der gegebenen Linie AB ein Bogen von 50° beschrieben werden; man subtrahire 25° (den halben gegebenen Winkel), von 180°, so wird die Differenz 155° das Supplement seyn. Hierauf bilde man mit den beiden Linealen einen Winkel ACB von 155°, und verfahre wie es oben gezeigt worden ist.

Aufgabe 10. Die Peripherie eines Kreises durch drei gegebene Puncte A, B, C, mechanisch zu beschreiben, wenn der Mittelpunct unzugänglich, oder der Kreis zu groß ist, um mit einem Cirkel beschrieben zu werden.

Man lege die beiden Lineale MN, RS, kreuzweise über einander, so daß sie die drei Puncte A, B, C treffen, befestige sie mit einem Stifte in V, und mit einem Querstück T; in A halte man einen Bleistift und beschreibe den Bogen BAC, indem man den Winkel RAN so bewegt, daß man die äußern Kanten der Lineale gegen die Nadeln B, C, hält. Man bewege das Instrument RVN von Neuem, und bemerke auf dem beschriebenen Bogen zwei Puncte D, E, so daß ihr Abstand gleich der Länge BC ist; dann bringe man die Kanten des Instruments gegen D, E, und beschreibe mit einem Bleistifte in G den Bogen BC, so wird derselbe die Peripherie des verlangten Bogens vollenden.



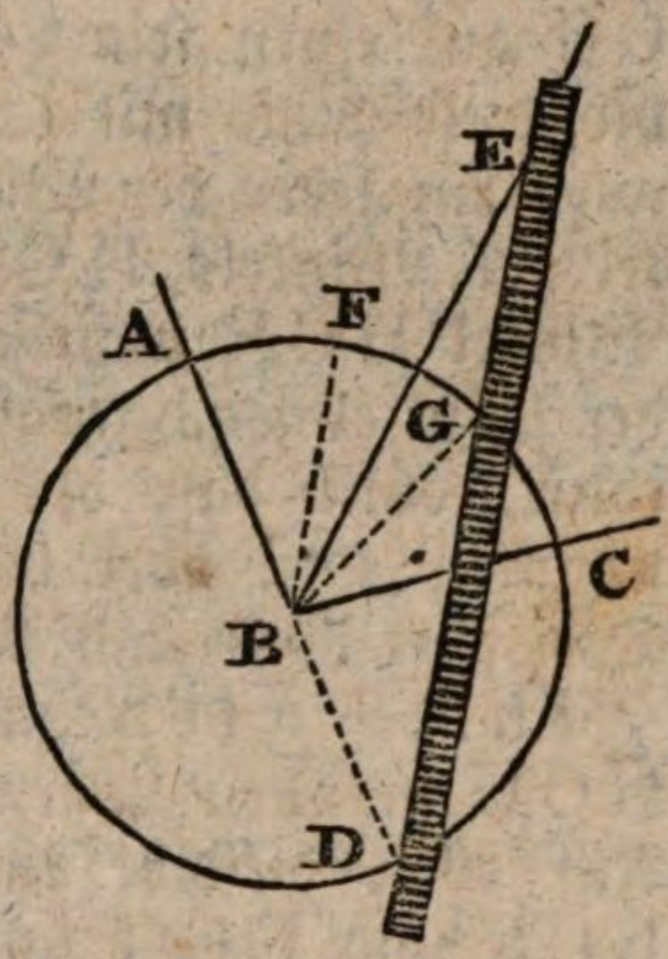
Anders. Eine Axe von 12 oder 15 Zollen trage zwei ungleiche Räder, von denen das eine, A, fest ist, während das andre, B, längs der Axe bewegt, und in einen bestimmten Abstand, AB, auf dem Papiere oder der Ebene, auf der der Kreis beschrieben werden soll, gebracht werden kann. Dann werden A und B die Grundflächen eines abgestutzten Kegels vorstellen, indem die Spitze des vollständigen Kegels der Mittelpunct des Kreises ist, der von dem Rande oder der Kante des Rades A beschrieben

wird, wenn es auf der gegebenen Ebene rollt. Es verhält sich dann der Durchmesser des Rades A zu der Differenz der Durchmesser A und B, wie der Halbmesser des mit A zu beschreibenden Kreises zu dem Abstande AB, in dem sich die beiden Räder von einander befinden müssen, diesen auf der Ebene gemessen, auf der der Kreis beschrieben werden soll.

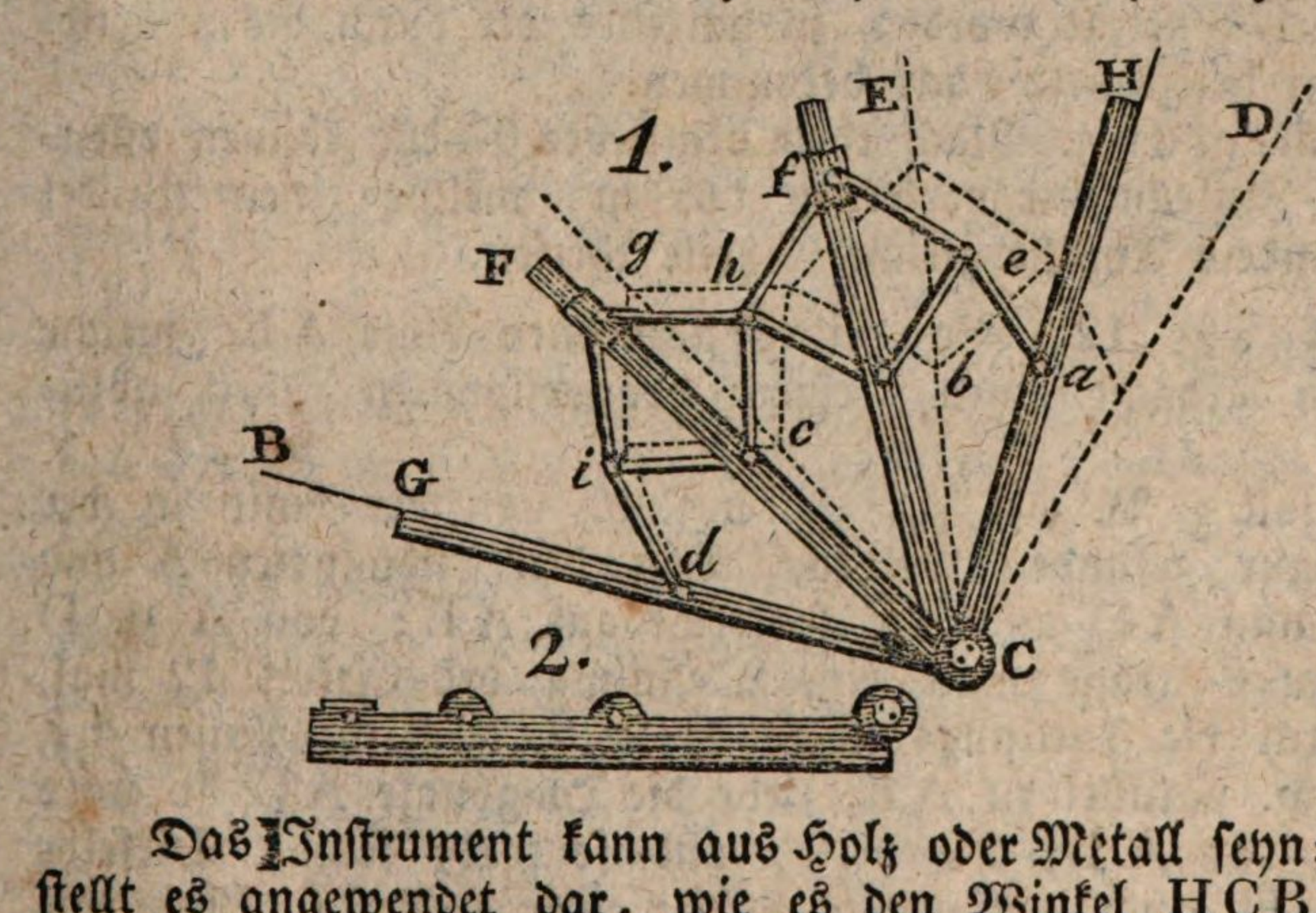
Das Rad B wird offenbar zu gleicher Zeit einen andern Kreis beschreiben, dessen Halbmesser kleiner seyn wird, als der frühere mit AB beschriebene.

Aufgabe 11. Einen gegebenen Winkel ABC in drei gleiche Winkel zu theilen.

Von B aus beschreibe man mit einem beliebigen Halbmesser den Kreis ACDA, halbire den Winkel ABC durch BE, und verlängere AB nach D. Dann trage man auf die Kante des Lineals den Halbmesser AB, lege das Lineal an D, und bewege es, bis eine Marke auf der Kante des Lineals BE, und die andere den Bogen AC in G schneidet; trägt man nun den Abstand CG von G nach F, so werden die gezogenen Linien BF und BG den Winkel ABC in drei Theile theilen.



Anders, mit einem sinnreichen Instrumente von R. Christie, den Winkel mechanisch in drei Theile zu theilen.



Das Instrument kann aus Holz oder Metall seyn; Fig. 1. stellt es angewendet dar, wie es den Winkel HCB in drei Theile theilt, Fig. 2. aber zusammengeschlagen. Die Stücke HC, EC, FC und GC sind alle von gleicher Länge, und um

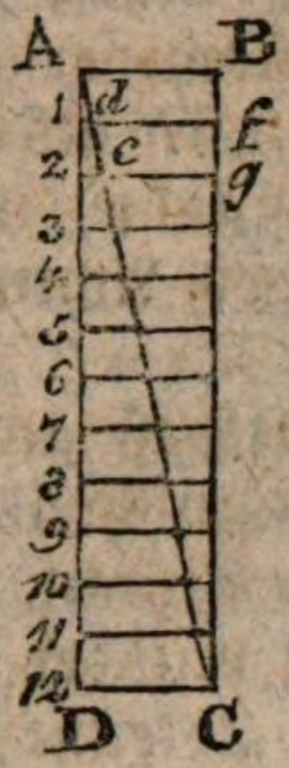
den Punct C beweglich; die Gelenke a, b, c und d stehen alle von C gleich weit ab. Die verbindenden Stücke ae, eb, bh, hc, ci und id sind alle einander gleich, ferner die Stücke ef, fh, hg und gi sind ebenfalls unter einander gleich, aber länger als die vorhergehenden Stücke; f und g sind zwei Hülsen, die sich an den Stücken EC und FC auf und nieder bewegen lassen; alle Stücke aber sind an ihren Gelenken, die durch die kleinen Buchstaben a, b, c, d u. s. w. bezeichnet sind, durch Zapfen verbunden, und die verbundenen Stücke passen in einander, wenn der Apparat zusammengelegt wird.

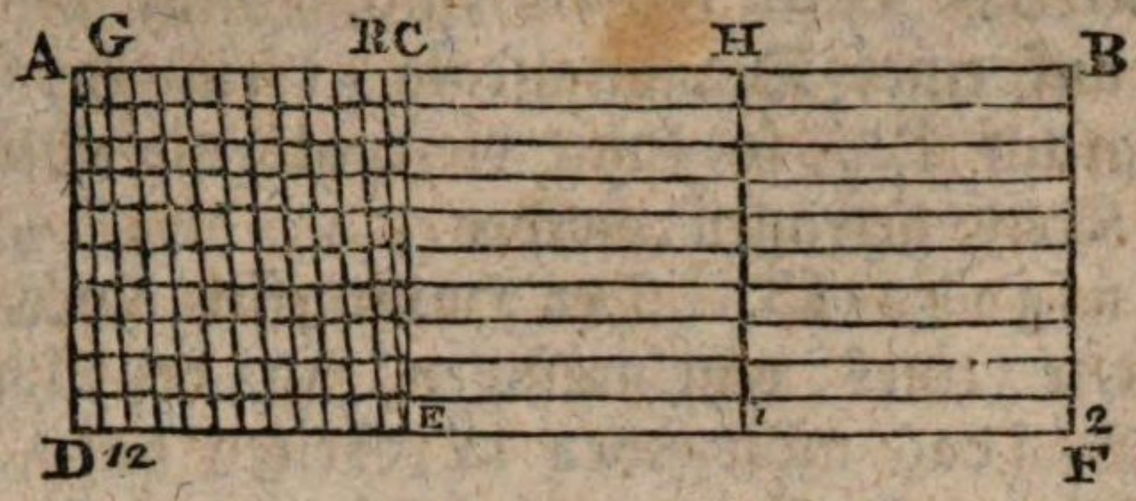
Bei der Anwendung dieses Instruments ist es nur nöthig, den Mittelpunct C auf den Scheitel des gegebenen Winkels, CG auf einen seiner Schenkel zu legen, und HC zu bewegen, bis diese Linie mit dem andern Schenkel zusammenfällt, dann wird ein jeder der Winkel HCE, ECF und FCG ein Drittel des Winkels HCB seyn. Denn es ist offenbar, daß der Winkel HCE nicht größer werden kann, ohne daß zugleich der Winkel aeb größer wird, und daß aeb nicht wachsen kann, ohne daß der Winkel bef und der Abstand fb abnimmt; weil aber be=bh, fe=fh, und fb den beiden Dreiecken feb und fhb gemeinschaftlich ist, so muß immer ∠fhb=∠feb, und folglich bhc=aeb seyn; daher muß HCE in allen Lagen des Apparats immer gleich ECF seyn. Auf eben dieselbe Art kann gezeigt werden, daß die Winkel ECF und FCG immer einander gleich seyn werden. Daher ist der Winkel HCB durch die geraden Linien EC und FC in drei gleiche Theile getheilt. Wäre das Instrument an den Winkel DCB gelegt worden, so hätte es die durch die punctirten Linien bezeichnete Lage bekommen.

Anmerkung. Nach eben demselben Gesetze können offenbar auch Instrumente verfertigt werden, welche einen Winkel in eine andere Anzahl gleicher Theile theilen.

Aufgabe 12. Von einer gegebenen Linie AB, welche sehr klein gedacht wird, einen proportionalen Theil abzuschneiden.

Es soll z. B. $\frac{1}{12}$, $\frac{2}{12}$, $\frac{3}{12}$, u. s. w. von der Linie in der ersten Figur gefunden werden. Von den Endpuncten A und B ziehe man AD und BC senkrecht auf AB; von A zu D und B zu C trage man eine Oeffnung des Cirkels 12 mal, ziehe durch die Theilungspuncte 1, 2, 3, u. s. w. Linien 1f, 2g u. s. w. parallel zu AB, ziehe die Diagonale AC, so wird 1d=$\frac{1}{12}$ von AB; 2c=$\frac{2}{12}$, und so fort, seyn. Dieselbe Methode ist auch auf andere Theile einer gegebenen Linie anwendbar.





Aufgabe 13. Eine schräge Scale von Fußen, Zollen und Zehntel-Zollen *) zu machen.

Man ziehe eine unbestimmt lange Linie AB, auf der man von A nach B die für einen Fuß gegebene Länge so viel mal aufträgt, als die verlangte Anzahl es fordert. Von den Theilungspuncten A, C, H, B, ziehe man AD, CE u. s. w. senkrecht auf AB; auf AD und BF trage man eine beliebige Länge zehn mal auf, und ziehe durch diese Theilungspuncte Parallelen zu AB. Hierauf theile man AC und DE in 12 gleiche Theile, von denen jeder ein Zoll seyn wird; ziehe die Linien A1, G2 u. s. w., so werden sie die verlangte Scale bilden, so nämlich, daß jeder der breiteren Theile, wie E — 1, 1 — 2 einen Fuß, jeder der zwölf Theile aber zwischen D und E, einen Zoll darstellen wird; endlich die einzelnen Parallelen zu RC in dem Dreiecke ECR $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$, u. s. w. eines Zolles.

Anmerkung. Soll die Scale Fuße, oder eine andere Einheit, und Zehntel und Hundertel darstellen, so muß DE anstatt in 12, in 10 gleiche Theile getheilt werden.

Aufgabe 14. Die Seite eines regelmäßigen Vielecks von einer beliebigen Anzahl Seiten ist gegeben, den Halbmesser des Kreises zu finden, in den dasselbe eingeschrieben werden kann.

Man multiplicire die gegebene Seite des Vielecks mit der Zahl, welche in der nachfolgenden Tafel in der Colonne: „Halbmesser des umschriebenen Kreises" der gegebenen Zahl der Seiten gegenüber steht, das Product ist der verlangte Halbmesser.

---

*) Oder einen verjüngten Maßstab.

Man nehme z. B. an, das Vieleck sey ein Achteck, und jede Seite 12; dann wird der verlangte Halbmesser seyn: 1,3065628 × 12 = 15,6687536. Man nehme 15,67 als Halbmesser auf einer Diagonalscale (verjüngtem Maßstabe), nehme eben darauf 12, so kann diese als die Seite eines Achtecks in diesen Kreis getragen werden.

Aufgabe 15. Der Halbmesser eines Kreises ist gegeben, die Seite eines regelmäßigen, in denselben einzuschreibenden Vielecks, (das nicht über 12 Seiten hat), wird gesucht.

Man multiplicire den gegebenen Halbmesser mit der Zahl, die in der „Factoren für Seiten" betittelten Colonne, der Zahl des gegebenen Vielecks gegenüber steht; das Product ist die verlangte Seite.

Man setze z. B. den Halbmesser des Kreises gleich 5, so wird 5 × 1,732051 = 8,66025 die Seite des eingeschriebenen Dreiecks seyn.

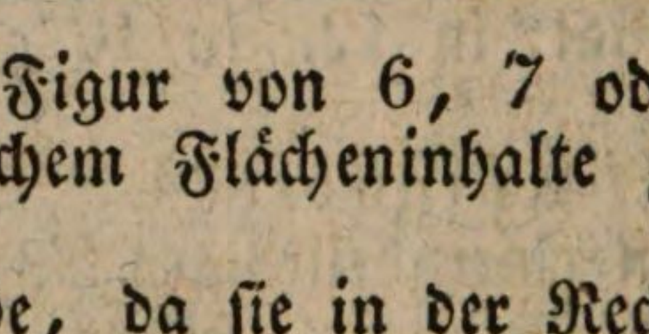
Polygonen-Tafel.

Zahl der Seiten	Namen.	Multiplicatoren für Flächenräume.	Halbmesser des umschriebenen Kreises.	Factoren für Seiten.
3	Dreieck	0,4330127	0,5773503	1,732051
4	Viereck	1,0000000	0,7071068	1,414214
5	Fünfeck	1,7204774	0,8506508	1,175570
6	Sechseck	2,5980762	1,0000000	1,000000
7	Siebeneck	3,6339124	1,1523824	0,867767
8	Achteck	4,8284271	1,3065628	0,765367
9	Neuneck	6,1818242	1,4619022	0,684040
10	Zehneck	7,6942088	1,6180340	0,618034
11	Eilfeck	9,3656399	1,7747324	0,563465
12	Zwölfeck	11,1961524	1,9318517	0,517638

Aufgabe 16. Eine geradlinige Figur von 6, 7 oder mehr Seiten in ein Dreieck von gleichem Flächeninhalte zu verwandeln.

Dies ist eine sehr nützliche Aufgabe, da sie in der Rechnung viele Mühe erspart.

Es sey ABCDE die gegebene Figur, die in ein Dreieck verwandelt werden soll. Man lege von A nach C ein Parallellineal und bewege es, bis es durch den Punct B geht, indem man den Punct 1 bezeichnet, in dem es die Verlängerung von AG schneidet; hierauf lege man das Lineal durch 1 und D, bewege es, bis es durch C geht, und bezeichne den Punct 2, wo es AG schneidet; dann

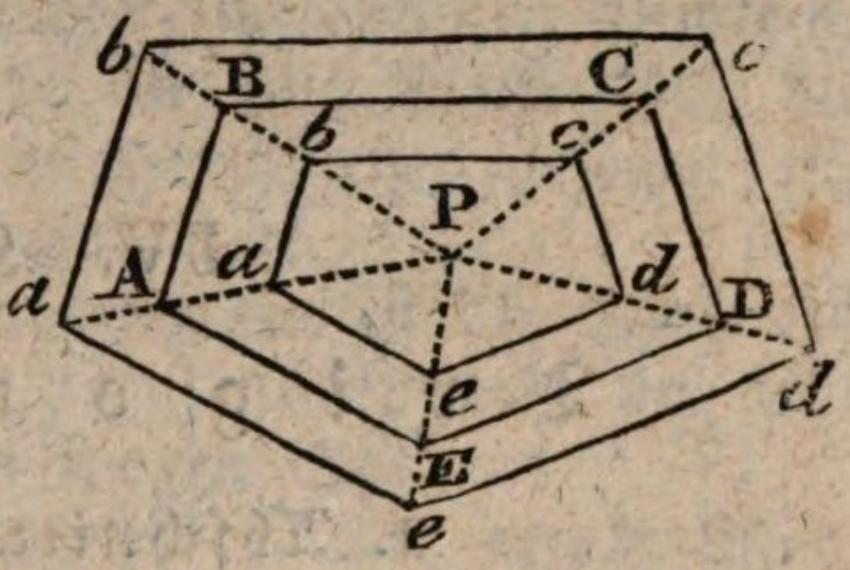


bringe man das Lineal durch 2 und E, bewege es bis es durch D geht, und bemerke den Punct 3, wo es die Verlängerung von A G schneidet; ferner lege man das Lineal durch 3 und F, bewege es, bis es durch E geht, und bemerke 4, den Durchschnittspunct mit der verlängerten G A; endlich ziehe man die gerade Linie 4 F, so wird das Dreieck 4 F G an Flächeninhalt dem unregelmäßigen Vielecke A B C D E F G gleich seyn.

Es ist hier B 1 der Linie A C parallel, so daß, wenn C gezogen würde, das Dreieck A 1 C dem Dreiecke A C B gleich wäre, und diese Umwandlung ist durch das mechanische Verfahren geschehen. Auf gleiche Weise sind die übrigen Dreiecke, eins nach dem andern, in gleiche Dreiecke verwandelt worden, deren Grundlinien auf der Linie G A oder ihrer Verlängerung liegen. Daher ist das Gesetz der Umwandlung augenscheinlich.

Aufgabe 17. Eine geradlinige Figur in eine ähnliche von kleinerm oder größerm Maßstabe zu verwandeln.

Man wähle irgendwo einen Punct P, sey es nun innerhalb der gegebenen Figur A B C D E, oder außerhalb, oder auf einer ihrer Seiten oder Winkel, am besten aber in der Nähe der Mitte; von diesem Puncte P ziehe man Linien durch alle Winkelpuncte, auf einer derselben nehme man das Verhältniß P a : P A, gleich dem gegebenen Verhältniß der Maßstab- oder Linear-Dimensionen; hierauf ziehe man a b parallel zu A B, b c zu B C u. s. w., so wird a b c d e die verwandelte Figur, welche man suchte, seyn, größer oder kleiner als die ursprüngliche.



Auf andre Weise, die Figur durch einen Maßstab zu verwandeln. — Man messe mit einem Maßstabe alle Seiten und Diagonalen der Figur, wie A B C D E, und trage in dem verlangten Verhältnisse dieselben Maße so, wie sie in der gegebenen Figur folgen, nach einem andern Maßstabe auf.

Eine Landcharte, Zeichnung oder Figur durch Quadrate zu verwandeln. — Man theile das Original in eine Anzahl kleiner Quadrate, und theile ein Stück Papier von der verlangten Ausdehnung in dieselbe Anzahl anderer Quadrate, die, je nachdem es verlangt wird, größer oder kleiner als die vorhergehenden sind. Ist dies gethan, so zeichne in jedem Quadrate der zweiten Figur, was in dem entsprechenden Quadrate der ersten oder Original-Figur sich befindet.

Die sich durchkreuzenden Linien, welche diese Quadrate bilden, können mit einem Bleistifte gezogen und nach Vollendung des Werks wieder herausgerieben werden. Aber beque-

mer und passender würde es seyn, vorzüglich wenn solche Verwandlungen oft vorkommen, immer genau gemachte Quadratnetze von verschiedener Größe bei der Hand zu haben; denn nur indem man sie genau auf das Papier legt, werden die entsprechenden Theile genau copirt werden können. Diese Netze können aus vier steifen oder unbiegsamen Stäbchen bestehen, die mit Pferdehaaren oder feinen Darmsaiten durchzogen sind.

Sind die Figuren zusammengesetzter, so kann die Umwandlung nach einem andern Maßstabe, am besten vermittels solcher Instrumente bewerkstelligt werden, wie der Eidograph des Professor Wallace, oder durch einen Pantograph, ein Instrument, das jetzt durch die Veränderung der Stelle der Unterstützung beträchtlich verbessert worden ist. Siehe Mechanics' Oracle, Part II. page 33.

IV. Kapitel.

Trigonometrie.

1. Abschnitt. Ebene Trigonometrie.

1. Die ebene Trigonometrie ist der Theil der Mathematik, durch den wir aus drei Stücken eines ebenen oder geradlinigen Dreiecks, die drei andern, wenn es möglich ist, bestimmen oder berechnen lernen.

Die Bestimmung des gegenseitigen Verhältnisses der Sinus, Tangenten, Secanten u.s.w., der Summen, Differenzen, der Vielfachen u. s. w., der Bogen, Winkel, oder die Untersuchung der zusammenhängenden Formeln wird ebenfalls zu der Trigonometrie gerechnet *).

2. A C B sey ein geradliniger Winkel; wenn man nun um C als Mittelpunct einen Kreis beschreibt, der C A, C B, in A, B, durchschneidet, so heißt der Bogen A B das Maß des Winkels A C B (Siehe die nächste Figur).

3. Die Peripherie eines Kreises denkt man sich in 360 gleiche Theile, Grade genannt, getheilt, oder sie kann wenigstens so getheilt gedacht werden, jeden Grad in 60 gleiche Theile, Minuten genannt, jeden derselben wieder in 60 gleiche Theile,

---

*) Heißt wohl auch Goniometrie.

(D.)

Secunden, und so fort bis zu den möglich kleinsten Theilen. Die erste Art dieser Theile wird durch einen kleinen Kreis, die zweite durch einen einfachen Accent, die dritte durch einen doppelten u. s. w. angedeutet. So bezeichnet 47° 18′ 34″ 54‴, 47 Grad, 18 Minuten, 34 Secunden und 45 Tertien. So viel Grade, Minuten, Secunden u. s. w. nun auf einem Bogen enthalten sind, von so viel Graden, Minuten, Secunden u. s. w. ist der Winkel, dessen Maß dieser Bogen seyn soll. Folglich da ein Quadrant oder Viertelkreis 90 Grade enthält, und ein Quadranten-Bogen das Maß eines rechten Winkels ist, so sagt man, der rechte Winkel sey ein Winkel von 90°.

4. Das Complement eines Bogens ist sein Unterschied von einem Quadranten; und das Complement eines Winkels ist sein Unterschied von einem rechten Winkel.

5. Das Supplement eines Bogens ist sein Unterschied von einem Halbkreise, und das Supplement eines Winkels ist sein Unterschied von zwei rechten Winkeln.

6. Der Sinus eines Bogens ist eine Senkrechte, die von einem Ende desselben auf einen Durchmesser gezogen ist, der durch das andere Ende des Bogens geht.

7. Der Sinus versus eines Bogen ist der Theil des Durchmessers, der zwischen dem Durchschnittspuncte des Sinus mit dem Durchmesser und dem Bogen liegt.

8. Die Tangente eines Bogens ist eine gerade Linie, welche denselben in dem einen Ende berührt, und von einer geraden Linie begrenzt wird, die von dem Mittelpuncte des Kreises durch das andere Ende des Bogens gezogen ist.

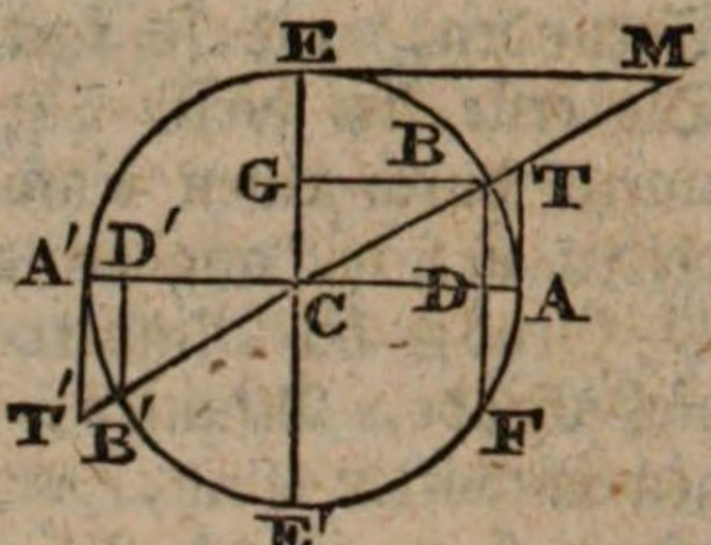
9. Die Secante ist diese geneigte Linie, die die Tangente begrenzt.

10. Diese Sinus, Tangenten u. s. w. heißen auch eben so die Sinus, Tangenten ꝛc. des Winkels, der in Beziehung auf seinen bestimmten Halbmesser, von dem vorher genannten Bogen gemessen wird.

11. Der Cosinus eines Bogens oder Winkels ist der Sinus des Complements des Bogens oder Winkels; die Cotangente eines Bogens oder Winkels ist die Tangente des Complements des Bogens oder Winkels. Der Cosinus versus und die Cotangente werden eben so definirt.

Um diese Erklärungen durch die beigefügte Figur zu erläutern, sey AB ein Kreisbogen, der mit dem Halbmesser AC beschrieben ist; AE sey ein Quadranten-Bogen; BD die von dem Ende B auf den Durchmesser AA′ gefällte Senkrechte, AT werde parallel dazu gezogen und von CT oder der Verlängerung derselben begrenzt; dann ist BE das Complement von BA, und Winkel BCE das Complement des

Winkels BCA; BEA′ ist das Supplement von BA, und Winkel BCA′ das Supplement von BCA; BD ist der Sinus, DA der Sinus versus, AT die Tangente, CT die Secante, GB der Cosinus, GE der Cosinus versus, EM die Cotangente und CM die Cosecante des Bogens AB, oder des Winkels ACB, nach dem Vorhergehenden.



Anmerkung. Diese Ausdrücke werden gewöhnlich durch Abkürzungen bezeichnet.

So setzt man für Sinus des Bogens AB . sin. AB,
Tangente . . . . . tang. AB,
Secante . . . . . sec. AB,
Sinus versus . . . . sin. vers. AB,
Cosinus . . . . . cos. AB,
Cotangente . . . . . cot. AB,
Cosecante . . . . . cosec. AB,
Cosinus versus . . . . cos. vers. AB.

Folgesätze aus den oben gegebenen Erklärungen.

12. (A.) Der Bogen unter 90° ist kleiner als seine zugehörige Tangente; die Sehne aber ist allemal kleiner als ihr Bogen, und der Sinus kleiner als die Sehne.

(B.) Sin. BD eines Bogens AB ist die halbe Sehne BF des doppelten Bogens.

(C.) Ein Bogen und sein Supplement haben denselben Sinus, Tangente uud Secante. (Die beiden letzten sind jedoch mit verschiedenen Zeichen + oder — behaftet, je nachdem sie zu Bogen gehören, die kleiner oder größer sind als ein Quadrant.

(D.) Wenn der Bogen verschwindet, so verschwinden der Sinus, die Tangente und der Sinus versus ebenfalls, und die Secante wird gleich dem Halbmesser, welche Größe ihre niedrigste Grenze ist. Wächst dann der Bogen, so wachsen auch der Sinus, Tangenten, Secanten und Sinus versus, bis der Bogen ein Quadrant AE wird, und dann hat der Sinus seinen größten Werth, gleich dem Halbmesser, erreicht, in welchem Falle er auch sinus totus heißt; der Sinus versus ist dann auch gleich dem Halbmesser; die Secante und Tangente aber, die sich dann nicht gegenseitig begrenzen können, werden als unendlich betrachtet.

(E.) Der Sinus versus eines Bogens und sein Cosinus zusammengenommen, sind gleich dem Halbmesser. So ist

$AD + BG = AD + DC = AC$. (Dies ist nicht auf Bogen beschränkt, die kleiner als ein Quadrant sind.)

(F.) Der Halbmesser, die Tangente und die Secante bilden ein rechtwinkliches Dreieck CAT. Der Cosinus, Sinus und Halbmesser bilden ein anderes rechtwinkliches Dreieck CDB, das dem vorhergehenden ähnlich ist. So bilden ferner die Cotangente, der Halbmesser und Cosecante ein drittes rechtwinkliches Dreieck, MEC, das den beiden vorhergehenden ähnlich ist. Sind daher der Sinus und Halbmesser bekannt, so ist der Cosinus durch die Eigenschaft des rechtwinklichen Dreiecks bestimmt.

Dasselbe gilt von der Bestimmung der Secante durch die Tangente und den Halbmesser u. s. w.

(G.) Ferner da $CD : DB = CA : AT$ ist, so sieht man, daß die Tangente eine vierte Proportionallinie ist zu dem Cosinus, dem Sinus und dem Halbmesser.

Es ist auch $CD : CB = CA : CT$; das heißt: die Secante ist die dritte Proportionallinie zu dem Cosinus und Halbmesser.

Ferner $CG : GB = CE : EM$; das heißt: die Cotangente ist die vierte Proportionallinie zu dem Sinus, Cosinus und Halbmesser.

Endlich $BD : BC = CE : CM$; das heißt: die Cosecante ist die dritte Proportionallinie zu dem Sinus und Halbmesser.

(H.) Gebraucht man nun die gewöhnlichen Abkürzungen, so wird man, den Radius $= r$ gesetzt, haben:

1. $\cos. = \sqrt{r^2 - \sin.^2}$ 2. $\text{tang.} = \sqrt{\sec.^2 - r^2}$.
3. $\sec. = \sqrt{r^2 + \text{tang.}^2}$ 4. $\text{cosec.} = \sqrt{r^2 + \cot.^2}$
5. $\text{tang.} = \frac{r \,.\, \sin.}{\cos.} = \frac{r^2}{\cot.}$ 6. $\cot. = \frac{r \,.\, \cos.}{\sin.} = \frac{r^2}{\text{tang.}}$
7. $\sec. = \frac{r^2}{\cos.}$ 8. $\text{cosec.} = \frac{r^2}{\sin.}$

Diese Formeln werden, wenn der Halbmesser des Kreises als Einheit angenommen wird:

1. $\cos. = \sqrt{1 - \sin.^2}$ 2. $\text{tang.} = \sqrt{\sec.^2 - 1}$.
3. $\sec. = \sqrt{1 + \text{tang.}^2}$ 4. $\text{cosec.} = \sqrt{1 + \cot.^2}$
5. $\text{tang.} = \frac{\sin.}{\cos.} = \frac{1}{\cot.}$ 6. $\cot. = \frac{\cos.}{\sin.} = \frac{1}{\text{tang.}}$
7. $\sec. = \frac{1}{\cos.}$ 8. $\text{cosec.} = \frac{1}{\sin.}$

13. Aus diesen und andern Eigenschaften und Lehrsätzen haben die Mathematiker die Länge der Sinus, Tangenten,

Secanten und Sinus versus für einen angenommenen Halbmesser berechnet, welche Bogen von einer Secunde an, durch alle Abstufungen der Größe bis zu einem Quadranten oder 90°, entsprechen. Die Resultate dieser Berechnungen sind zum Gebrauche in Tafeln gebracht worden, welche „Trigonometrische Tafeln" genannt werden. Die Einrichtung ist im Allgemeinen für zwei verschiedene Arten dieser künstlichen Zahlen bestimmt, die in der gewöhnlichen Ordnung auf entgegengesetzte Seiten gebracht sind. Auf den Seiten linker Hand stehen die Sinus, Tangenten, Secanten u. s. w., wenigstens für jeden Grad und Minute im Quadranten, für den Halbmesser, 1 berechnet, und in Decimalstellen ausgedrückt. Auf den Seiten rechter Hand stehen in gehöriger Folge die entsprechenden Logarithmen der Zahlen, die auf der jedesmal entgegengesetzten Seite die verschiedenen Sinus, Tangenten u. s. w. bezeichnen. Um die Nothwendigkeit, negative Characteristiken in den Logarithmen zu gebrauchen, zu vermeiden, denkt man sie sich als Logarithmen von Sinus, Tangenten, Secanten u. s. w. die für den Halbmesser 10000000000 berechnet sind. Die so berechneten und auf die nach einander folgenden Seiten rechter Hand gesetzten Zahlen heißen logarithmische Sinus, Tangenten u. s. w. Die Zahlen, wovon diese die Logarithmen sind, und die auf den Seiten linker Hand stehen, heißen natürliche Sinus, Tangenten u. s. w.

2. Allgemeine Eigenschaften und Wechselbeziehungen.

1. Die Sehne eines Bogens ist die mittlere Proportionale zwischen dem Sinus versus dieses Bogens und dem Durchmesser des Kreises.

2. Wie sich der Halbmesser zu dem Cosinus eines Bogens verhält, so verhält sich der doppelte Sinus dieses Bogens zu dem Sinus des doppelten Bogens.

3. Die Secante eines Bogens ist gleich der Summe seiner Tangente und der Tangente seines halben Complements.

4. Die Summe der Tangente und Secante eines Bogens ist der Tangente eines Bogens gleich, der diesen zu seinem halben Complement ergänzt. Oder die Summe der Tangente und Secante eines Bogens ist gleich der Tangente von 45° plus dem halben Bogen.

5. Die Sehne von 60° ist dem Halbmesser des Kreises gleich; der Sinus versus und Cosinus versus von 60° sind dem halben, und die Secante von 60° dem doppelten Halbmesser gleich.

6. Die Tangente von 45° ist dem Halbmesser gleich.

7. Das Quadrat des Sinus eines halben Bogens oder Winkels ist gleich dem Rechtecke aus dem halben Halbmesser und dem Sinus versus des ganzen Bogens oder Winkels; und das Quadrat seines Cosinus ist gleich dem Rechtecke aus dem halben Halbmesser und dem Sinus versus des Supplements des ganzen Bogens oder Winkels.

8. Das Rechteck aus dem Halbmesser und dem Sinus der Summe oder der Differenz zweier Bogen, ist der Summe oder Differenz der Rechtecke aus ihren abwechselnden Sinus und Cosinus gleich.

9. Das Rechteck des Halbmessers und des Cosinus der Summe oder der Differenz zweier Bogen, ist der Differenz oder der Summe der Rechtecke aus ihren gegenseitigen Cosinus und Sinus gleich.

10. Wie sich die Differenz oder die Summe des Quadrats des Halbmessers und des Rechtecks aus den Tangenten der beiden Bogen zu dem Quadrate des Halbmessers verhält, so verhält sich die Summe oder Differenz ihrer Tangenten zu der Tangente der Summe oder Differenz der Bogen.

11. Die Summe der Sinus zweier ungleichen Bogen verhält sich zu ihrer Differenz, wie die Tangente der halben Summe dieser beiden Bogen zu der Tangente ihrer halben Differenz.

12. Bei drei gleich verschiedenen Bogen verhält sich der Halbmesser zu dem Cosinus ihrer gemeinschaftlichen Differenz, wie der Sinus des mittlern Bogens zu der halben Summe der Sinus der äußern; und der Halbmesser zu dem Sinus der gemeinschaftlichen Differenz, wie der Cosinus des mittlern Bogens zu der halben Differenz der Sinus der beiden äußern.

(A.) Wird der Sinus des mittlern der drei gleich verschiedenen Bogen (den Halbmesser gleich 1 gesetzt) mit dem doppelten Cosinus der gemeinschaftlichen Differenz multiplicirt, und der Sinus jedes äußern von dem Producte abgezogen, so wird der Rest der Sinus des andern äußern Bogens seyn.

(B.) Der Sinus eines Bogens über 60° ist dem Sinus eines andern Bogens eben so viel unter 60° plus dem Sinus seines Ueberschusses über 60° gleich.

Bemerkung. Nach diesem letzten Satze sind die Sinus von Bogen über 60° blos durch Addition bestimmbar, wenn die Sinus unter 60° bekannt sind.

13. In jedem rechtwinklichen Dreiecke verhält sich die Hypotenuse zu der einen Kathete, wie der Halbmesser zu dem Sinus des Winkels, der dieser Kathete gegenüber liegt; und die eine Kathete verhält sich zu der andern, wie der Halbmesser zu der Tangente des Winkels, der der letztern gegenüber liegt.

14. In jedem ebenen Dreiecke verhält sich eine Seite zu der andern, wie der Sinus des Winkels, der der ersteren gegenüber liegt, zu dem Sinus des Winkels, der der letztern gegenüber liegt.

15. In jedem ebenen Dreiecke verhält sich die Summe der Seiten um den Winkel an der Spitze zu ihrer Differenz, wie die Tangente der halben Summe der Winkel an der Grundlinie zu der Tangente ihrer halben Differenz.

16. In jedem ebenen Dreiecke verhält sich der Cosinus der Differenz der Winkel an der Grundlinie zu dem Cosinus ihrer halben Summe, wie die Summe der Seiten um den Winkel an der Spitze zu der dritten Seite. Auch verhält sich der Sinus der halben Differenz der Winkel an der Grundlinie zu dem Sinus ihrer halben Summe, wie die Differenz der Seiten um den Winkel an der Spitze zu der dritten Seite oder der Grundlinie *).

17. In jedem ebenen Dreiecke verhält sich die Grundlinie zu der Summe der beiden andern Seiten, wie die Differenz dieser beiden Seiten zur Differenz der Abschnitte, die eine aus der Spitze gefällte Senkrechte auf der Grundlinie macht.

18. In jedem ebenen Dreiecke verhält sich das doppelte Rechteck aus zwei Seiten zu der Differenz der Summe der Quadrate dieser beiden Seiten und dem Quadrate der Grundlinie, wie der Halbmesser zu dem Cosinus des Winkels, den die beiden Seiten einschließen.

Zusatz. Wenn der Halbmesser als Einheit angenommen wird, ferner wenn AC, AB, BC die Seiten eines Dreiecks sind, so giebt dieser Satz $\cos. C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2BC \,.\, CA}$; und ähnliche Ausdrücke für die übrigen Winkel.

19. Die Summe der Tangenten zweier ungleichen Winkel verhält sich zu ihrer Differenz, wie der Sinus der Summe dieser Winkel zu dem Sinus ihrer Differenz.

---

*) Diese Sätze wurden zuerst von Thacker in seinen Mathematical Miscellany, die im Jahre 1741 herauskamen, gegeben; ihren praktischen Nutzen hat neulich Professor Wallace in den Edinburger philosophischen Verhandlungen gezeigt. †)

†) Mollweide kam bei uns für sich ebenfalls auf diese Formeln, nur gab er sie in etwas anderer Gestalt; nämlich unter dieser:

$$a = \frac{(b+c) \,.\, \sin. \frac{1}{2}A}{\cos. \frac{1}{2}(B-C)} = \frac{(b-c) \cos. \frac{1}{2}A}{\sin. \frac{1}{2}(B-C)};$$

vergl. v. Zach's monatl. Correspondenz ꝛc. Bd. XVIII. S. 396. Unsere Lehrbücher übergehen diese Formeln immer noch häufig. Ihre Ableitung ist sehr einfach. S. meine „Grundzüge der ebenen und körperlichen Trignometrie" Leipz. 1825 S. 38.

(D.)

20. Der Sinus der Differenz zweier ungleichen Winkel verhält sich zu der Differenz ihrer Sinus, wie die Summe dieser Sinus zu dem Sinus der Summe der Winkel.

Diese und andere Sätze begründen verschiedene Formeln, über die der Leser, welcher die Untersuchung verfolgen will, die besten Lehrbücher der Trignometrie vergleichen kann.

3. Auflösung der einzelnen Fälle des ebenen Dreiecks.

Obgleich die drei Seiten und drei Winkel eines ebenen Dreiecks, je drei und drei verbunden, zwanzig verschiedene Verbindungen geben, so enthalten sie doch nur drei verschiedene Fälle, welche besondere Regeln erfordern.

Fall 1.

Wenn eine Seite und ein Winkel zwei der gegebenen Stücke sind.

Dieser Fall kann durch den vierzehnten Satz des vorigen Abschnittes gelöst werden, welcher aussagt, daß die Seiten ebener Dreiecke den Sinus ihrer entgegenstehenden Seite beziehungsweise proportional sind.

Soll eine Seite gesucht werden, so fange man bei der Lösung die Proportion mit einem Sinus an, und sage:

Der Sinus des gegebenen Winkels zu seiner entgegenstehenden Seite;

wie der Sinus eines der beiden andern Winkel zu der entgegengesetzten Seite.

Wird ein Winkel gesucht, so fange man die Proportion mit einer Seite an, und sage:

Eine der gegebenen Seiten

zu dem Sinus des gegenüberliegenden Winkels;

wie die andere gegebene Seite

zu dem Sinus seines entgegengesetzten Winkels.

Den dritten Winkel erhält man, wenn man die Summe der beiden andern von 180° abzieht.

Anmerkung 1. Da Sinus Linien sind, so werden sie nicht unpassend mit den Seiten der Dreiecke verglichen, und so erinnern sich Anfänger leichter der Regel, als wenn Sinus und Seiten mit einander verglichen werden.

Anmerkung 2. Gewöhnlich, jedoch nicht immer, ist es am besten, die Proportionen in der Trigonometrie mit den Logarithmen zu behandeln, indem man den Logarithmus des ersten Gliedes von der Summe der Logarithmen des zweiten und dritten Gliedes abzieht, um den Logarithmus des vierten

Gliedes zu erhalten. Oder, indem man das arithmetische Complement des Logarithmen des ersten Gliedes zu den Logarithmen der beiden andern hinzufügt, um den Logarithmus des vierten Gliedes zu erhalten.

Fall 2.

Wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind.

Dieser Fall wird durch Satz 15 und 16 des vorigen Abschnitts gelöst.

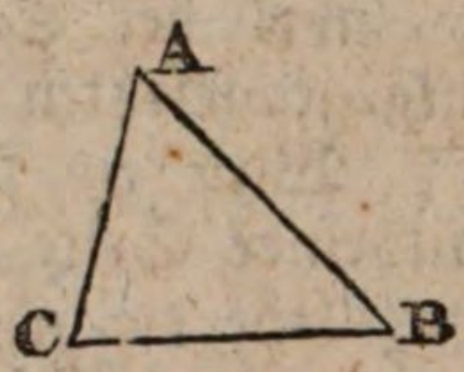
Den gegebenen Winkel ziehe man von 180° ab, so wird der Rest die Summe der beiden übrigen Winkel seyn.

Dann sage man: Die Summe der gegebenen Seiten
zu ihrer Differenz;
wie die Tangente der halben Summe der übrigen Winkel,
zu der Tangente ihrer halben Differenz.

Zweitens sage man: der Cosinus der halben genannten Differenz
zu dem Cosinus der halben Summe der Winkel,
wie die Summe der gegebenen Seiten,
zu der dritten oder gegebenen Seite.

Oder: der Sinus der halben Differenz der Winkel,
zu dem Sinus ihrer halben Summe;
wie die Differenz der gegebenen Seiten,
zu der dritten Seite.

Beispiel. In dem Dreiecke ABC sind AC = 450, BC = 540, und der eingeschlossene Winkel C = 80° gegeben; die dritte Seite und die beiden übrigen Winkel zu finden.



Hier ist BC + AC = 990, BC — AC = 90, 180° — C = 100° = A + B.

Daher BC + AC	990 . .	Log. =	2,9956352
zu BC — AC	90 . .	Log. =	1,9542425
wie tang. $\frac{1}{2}$(A + B)	50° .	Log. =	10,0761865
zu tang. $\frac{1}{2}$(A — B)	6° 11′ .	Log. =	9,0347938

Cos. $\frac{1}{2}$(A — B)	6° 11′	Log. =	9,9974660
zu Cos. $\frac{1}{2}$(A + B)	50°	Log. =	9,8080675
wie BC + AC	990	Log. =	2,9956352
zu AB	640,08	Log. =	2,8062367

Auch ist $\frac{1}{2}$(A + B) + $\frac{1}{2}$(A — B) = 56° 11′ = A; und $\frac{1}{2}$(A + B) — $\frac{1}{2}$(A — B) = 43° 49′ = B.

Man kann hier viel Zeit bei der Berechnung ersparen, wenn man aus den Tafeln cos. $\frac{1}{2}(A+B)$ zugleich mit tang. $\frac{1}{2}(A+B)$ nimmt; cos. $\frac{1}{2}(A-B)$ findet man eben so zugleich mit tang. $\frac{1}{2}(A-B)$. Auch bemerke man, daß der Logarithmus von $BC+AC$ derselbe in der zweiten, wie in der ersten Operation ist. Auf diese Art brauchen die Tafelnfür beide Operationen nur fünf mal aufgeschlagen zu werden.

Eine andere Auflösung des zweiten Falls.

Es sey C der gegebene Winkel, CA, CB, die gegebenen Seiten, dann wird die dritte Seite durch folgende Formel gefunden:

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AC \,.\, CB \,.\, \cos.\, C}.$$

Nimmt man daher $AC = 450$, $BC = 540$, $C = 80°$, wofür der Cosinus 0,1736482 ist, so findet man

$$AB = \sqrt{450^2 + 540^2 - 2 \,.\, 450 \,.\, 540 \times 0{,}1736482}$$
$$= \sqrt{90^2 (5^2 + 6^2 - 2 \,.\, 5 \,.\, 6 \times 0{,}1736482)}$$
$$= 90 \sqrt{50{,}58118} = 90 \times 7{,}112 = 640{,}08,$$ wie vorher.

Fall 3.

10. Wenn die drei Seiten eines ebenen Dreiecks gegeben sind, die drei Winkel zu finden.

Erste Methode. Man nehme die längste der drei Seiten als Grundlinie, und sage dann, übereinstimmend mit Satz 16:

Die Grundlinie
zu der Summe der beiden andern Seiten;
wie die Differenz dieser Seiten
zu der Differenz der Abschnitte der Grundlinie.

Die halbe Grundlinie zu der genannten Differenz hinzugefügt, giebt den größern Abschnitt, und um dieselbe verringert, giebt den kleinern; auf diese Art theilt eine Senkrechte aus der Spitze das ursprüngliche Dreieck in zwei andere, die beide unter den ersten Fall gehören.

Zweite Methode. Vermittels des 18ten Satzes des vorhergehenden Abschnittes suche man einen der Winkel; und jeden der beiden übrigen Winkel durch eine Wiederholung derselben Regel, oder durch Beziehung der Seiten auf die gegenüber liegenden Winkel.

So ist cos. $C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \,.\, BC}$;

$$\cos. B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \,.\, BC},$$

$$\cos. A = \frac{BA^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \,.\, AC}.$$

Rechtwinklige ebene Dreiecke.

1. Rechtwinklige Dreiecke können, eben so gut als andere, vermittels der Regel des Falles aufgelöst werden, unter den das gegebene Beispiel gehört; und da ein rechter Winkel immer unter die gegebenen Stücke gehört, so wird man finden, daß die Regel in ihrer Anwendung gewöhnlich vereinfacht wird.

2. Sind zwei Seiten gegeben, so kann die dritte durch die Eigenschaft in der ebenen Geometrie in der Lehre von den Dreiecken Satz 16. gefunden werden, nämlich, bezeichnet a die eine Kathete, b die andere, c die Hypotenuse, so ist:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{(c+b) \,.\, (c-b)}$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(c+a) \,.\, (c-a)}.$$

3. Man hat für rechtwinklige Dreiecke auch noch eine andere Methode, bekannt durch die Redensart: indem man die Seite ... zum Halbmesser nimmt; sie ist folgende:

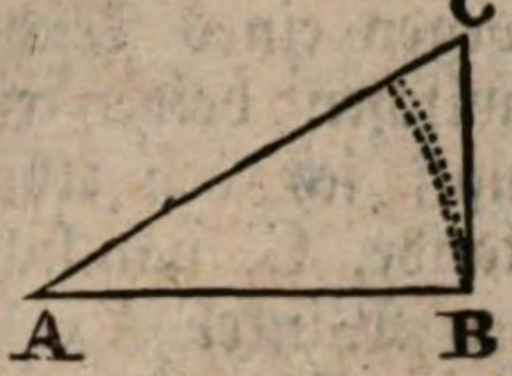
Eine Seite zu finden. Eine der Seiten nenne man Halbmesser, und schreibe dieses Wort darüber; bemerke dann ob die andern Seiten Sinus, Tangenten oder Secanten werden, und schreibe dem gemäß diese Worte darüber. Nenne nun das Wort, das über jeder Seite geschrieben ist, ihren Namen, und sage:

Der Name der gegebenen Seite
zu der gegebenen Seite:
Wie der Name der gesuchten Seite,
zu der gesuchten Seite.

Einen Winkel zu finden. Eine der gegebenen Seiten nenne man Halbmesser, und schreibe dieses Wort darüber, bemerke, ob die andern Seiten Sinus, Tangenten oder Secanten werden, und schreibe dem gemäß diese Worte darüber; das über jeder Seite geschriebene Wort nenne man ihren Namen, und sage dann:

Die zum Halbmesser gemachte Seite
zu dem Halbmesser:
Wie die andere gegebene Seite,
zu dem Namen dieser Seite.
Hierdurch wird der gegenüberstehende Winkel bestimmt.

4. Wenn jede der Zahlen, die die Seiten des Dreiecks messen, entweder unter 12 ist, oder in Factoren aufgelöst werden kann, von denen jeder kleiner als 12 ist, so kann man die Auflösung, dieser Regel gemäß, leichter ohne, als mit Logarithmen erhalten. Denn:



Es sey ABC ein rechtwinkliges Dreieck, in dem AB, die Grundlinie, zum Halbmesser genommen wird; BC ist die Tangente von A, und AC seine Secante in Beziehung auf diesen Halbmesser; oder indem man jede derselben durch die Grundlinie dividirt, wird man die Tangente und Secante von A, den Halbmesser gleich 1 gesetzt, erhalten. Und indem man auf gleiche Weise das verfolgt, was sich ergiebt, wenn man BC und AC, jedes zum Halbmesser, annimmt, so wird man leicht diese Ausdrücke erhalten, in denen a und b wiederum die Katheten und c die Hypotenuse bezeichnen:

1. $\frac{a}{b}$ = Tangente des Winkels an b.
2. $\frac{b}{a}$ = Tangente des Winkels an a.
3. $\frac{c}{b}$ = Secante des Winkels an b.
4. $\frac{c}{a}$ = Secante des Winkels an a.
5. $\frac{a}{c}$ = Sinus des Winkels an b.
6. $\frac{b}{c}$ = Sinus des Winkels an a.

2. Abschnitt. Von den Höhen und Entfernungen der Gegenstände.

Die Instrumente, die zur Messung von Winkeln angewendet werden, sind: Quadranten, Sextanten, Theodolite, deren Gebrauch durch eine Besichtigung derselben leichter, als durch eine Beschreibung ohne sie, erlernt werden kann. Für Militärpersonen und Civil-Ingenieurs sind ein guter Taschen-Sextant und ein genaues Mikrometer, (wie von Cavallo), das an ein Teleskop angebracht ist, von großem Nutzen. Zur Messung kleiner Abstände als Grundlinien, sind Ketten von 50 und 100 Fuß und ein tragbarer Compaß mit graduirtem Rande nothwendig.

Es wird hier eine Auswahl solcher Beispiele folgen, die wahrscheinlich am meisten vorkommen dürften.

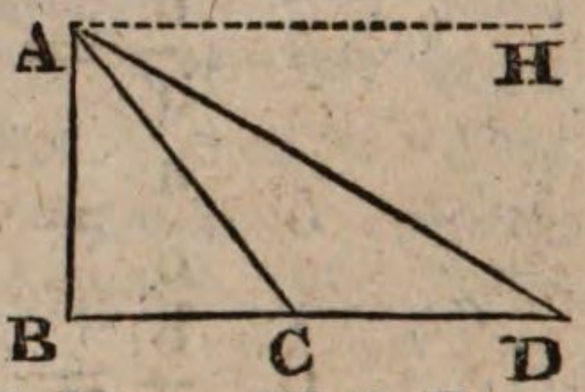
Beispiel 1.

Um den Abstand zweier Bäume A und B zu finden, der wegen eines Teiches, welcher den größten Theil des Raumes zwischen beiden einnahm, direct nicht gemessen werden konnte, maß ich den Abstand eines jeden von einem dritten Gegenstande, C, nämlich $AC = 588$, $BC = 672$, und nahm dann den Winkel ACB zwischen den beiden Bäumen $= 55° 40'$ auf. Es wird ihr Abstand gesucht.

Dies ist ein Beispiel für den zweiten Fall der ebenen Dreiecke, in denen zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind. Der Anfänger kann sich daher in der Berechnung üben; das Resultat ist 593,8.

Beispiel 2.

Ich wollte den Abstand zweier unzugänglichen Gegenstände bestimmen, welche in einer geraden Linie in der Nähe eines Thurms lagen, auf dem ich stand; ich nahm daher die Depressionswinkel der beiden Gegenstände auf, des entferntern nämlich $25\frac{1}{2}°$, und des nähern $57°$. Was ist ihre Entfernung von einander, wenn die Höhe des Thurms 120 Fuß beträgt?



In der Figur ist $AB = 120$ Fuß, die Höhe des Thurms, und AH die horizontale Linie, die durch die Spitze desselben gezogen wird; dann hat man:

$HAD = 25° 30'$; daher $BAD = BAH - HAD = 64° 30'$.

$HAC = 57° 0'$; daher $BAC = BAH - HAC = 33° 0'$.

Daher die folgende Berechnung mit den natürlichen Tangenten. Denn betrachtet man AB als Halbmesser, so sind BD und BC die Tangenten der zugehörigen Winkel BAD, BAC, und CD die Differenz dieser Tangenten. Sie ist daher gleich dem Producte der Differenz der natürlichen Tangenten dieser Winkel in die Höhe AB.

So natürl. tang. $64\frac{1}{2}°$	= 2,0965436
natürl. tang. $33°$	= 0,6494076
Differenz	1,4471360
multiplicirt mit der Höhe . . .	120
giebt den Abstand CD .	173,6563200

Beispiel 3.

Indem ich auf einer horizontalen Ebene in einem meßbaren Abstande von dem Fuße eines Thurmes stand, nahm ich den Höhenwinkel der Spitze auf; hieraus soll die Höhe des Thurms bestimmt werden.

In diesem Fall ist AB, und der Winkel A (man sehe die Figur unter den rechtwinkligen Dreiecken) gegeben, BC = AB × tang. A zu finden.

Sind die Zahlen groß, so wird mit Logarithmen seyn: log. BC = log. AB + log. tang. A.

Anmerkung.

Wenn ∠ A = 11° 19′, so ist BC = $\frac{1}{5}$ AB sehr nahe.
∠ A = 16 42, . . . BC = $\frac{3}{10}$ AB . . . . .
∠ A = 21 48, . . . BC = $\frac{2}{5}$ AB . . . . .
∠ A = 26 34, . . . BC = $\frac{1}{2}$ AB . . . . .
∠ A = 30 58, . . . BC = $\frac{3}{5}$ AB . . . . .
∠ A = 35 0, . . . BC = $\frac{7}{10}$ AB . . . . .
∠ A = 38 40, . . . BC = $\frac{4}{5}$ AB . . . . .
∠ A = 45 0, . . . BC = AB genau.

Um nicht zu viel Zeit mit der Berechnung zu verschwenden, kann der Beobachter das Instrument auf einen dieser Winkel stellen, vor und zurück gehen, bis der Höhenwinkel des Gegenstandes damit übereinstimmt: dann wird die Höhe über der Horizontalebene des Auges des Beobachters sogleich bekannt seyn, wenn man den, dem Abstande AB zugehörigen, Bruch nimmt.

Beispiel 4.

Um die Höhe eines Kirchthurms zu kennen, bis zu dessen Fuße ich, wegen einer hohen Mauer zwischen mir und der Kirche, nicht messen konnte, nahm ich auf zwei Standorten Puncte in dem Abstande von 93 Fuß von einander; auf einer horizontalen Linie von dem Fuße des Thurms an, nahm ich in jedem von ihnen den Höhenwinkel der Thurmspitze auf, nämlich in dem nähern Standpuncte 55° 54′ und 33° 20′ in dem entferntern. Es wird die Höhe des Thurms gesucht.

Geht man auf die Figur des zweiten Beispiels zurück, so sind darin CD, und die Höhenwinkel bei C und D gegeben. Am schnellsten wird die Rechnung mit den natürlichen Tangenten und dem Lehrsatze ausgeführt, daß $AB = \frac{CD}{\cot. D - \cot. C}$.

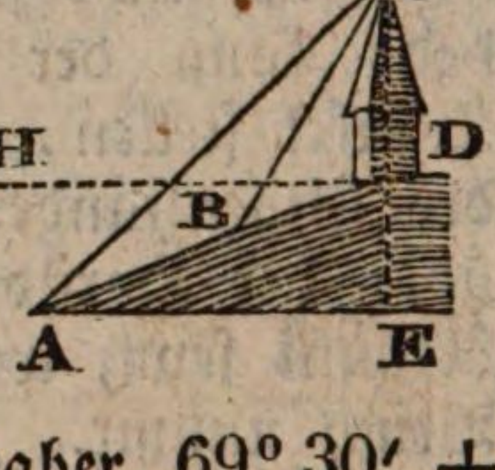
So ist cot. D = cot. 33° 20′ = 1,5204261
cot. C = cot. 55 54 = 0,6770509
Ihre Differenz = 0,8433752

Daher $AB = \frac{93}{0{,}8433752} = 110{,}27$ Fuß.

Beispiel 5.

Um die Höhe eines Obelisken zu kennen, der auf der Spitze eines regelmäßig absteigenden Hügels stand, maß ich zuerst von seinem Fußpuncte eine Entfernung von 36 Fuß, und fand daselbst den Winkel, den die geneigte Ebene und eine Linie von dem Mittelpuncte des Instruments zu der Spitze des Obelisken bildete, 41°; indem ich hierauf niederwärts, in derselben absteigenden Richtung 54 Fuß weiter maß, fand ich den auf gleiche Art gebildeten Winkel nur 23° 45′. Was war die Höhe des Obelisken und welches der Winkel, den der sich abwärts senkende Boden mit dem Horizonte mache?

In der hier gezeichneten Figur sind in dem Dreiecke ACB alle Winkel und die Seite AB gegeben, BC zu finden; diese Seite erhält man durch folgende Proportion: sin. C (= 17° 15′ = B — A) : AB (= 54) = sin. A (= 23° 45′) : BC = 73,3392. Ferner in dem Dreiecke DBC sind bekannt BC wie oben, BD = 36, CBD = 41°; die übrigen Winkel und die Seite CD zu finden; daher erstlich: CB + BD : CB — BD = tang. $\frac{1}{2}$(D + C) (= $\frac{1}{2}$139°) : tang. $\frac{1}{2}$(D — C) = 42° 24½′. Daher 69° 30′ + 42° 24½′ = 112° 54½′ = CDB, und 69° 30′ — 42° 24½′ = 26° 5½′ = BCD. Ferner: sin. BCD : BD = sin. CBD : CD = 51,86, die Höhe des Obelisken.

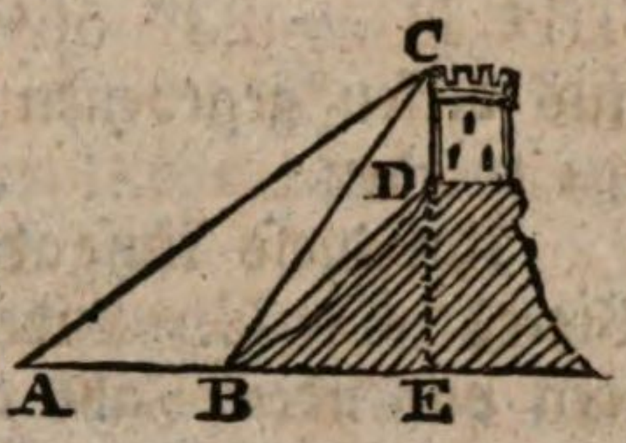


Der Neigungswinkel DAE = HDA = CDB — 90° = 22° 54½′.

Bemerkung. Kann die Linie BD nicht gemessen werden, so muß der Winkel DAE des herabwärts gehenden Bodens eben so wohl, als die Winkel CAB und CBD aufgenommen werden. In diesem Falle wird DAE + 90° = CDB seyn, so daß, wenn CB aus dem Dreiecke ACB gefunden ist, CD in dem Dreiecke CBD, vermittels der Beziehung zwischen den Seiten und den Sinus ihrer entgegenstehenden Winkel, gefunden werden kann.

Beispiel 6.

Um auf einer Horizontalebene die Höhe eines Thurms zu bestimmen, der auf dem Gipfel eines unzugänglichen Hügels stand, maß ich den Höhenwinkel der Spitze des Hügels gleich 40°, und der Thurmspitze 51°; indem ich hierauf in einer geraden Linie von 180 Fuß am Fuße des Hügels, in der nämlichen Verticalebene den Höhenwinkel der Thurmspitze maß, fand ich sie = 33° 45′. Hieraus soll die Höhe des Thurms gesucht werden.

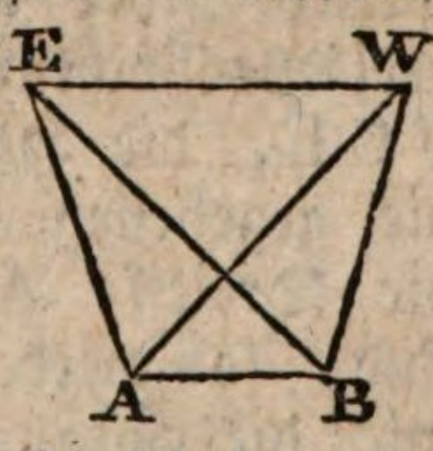


Nach der Figur, wie sie hier gezeichnet ist, ist gegeben AB = 180; CAB = 33° 45′; ACB = CBE — CAE = 17° 15′; CBD = 11°, BDC = 180° — (90° — DBE) = 130°. Und CD kann aus der Gleichung gefunden werden: CD rad.^{4} = AB sin. A sin. CBD cosec. ACB sec. DBE.

Oder gebraucht man die Logarithmen, so wird seyn log. AB + log. sin. A + log. sin. B + log. cosec. ACB + log. sec. DBE — 40 (in der Characteristik) = log. CD; also in dem vorgelegten Falle gleich Logarithmus von 83,9983 Fuß.

Beispiel 7.

Um den Abstand zweier unzugänglichen Gegenstände E und W auf einer Horizontalebene zu bestimmen, maßen wir eine passende Grundlinie AB von 536 Ruthen, und nahmen an den Endpuncten A und B folgende Winkel auf, nämlich BAW = 40° 16′, WAE = 57° 40′, ABE = 42° 22′ EBW = 71° 7′. Es soll der Abstand EW gefunden werden.

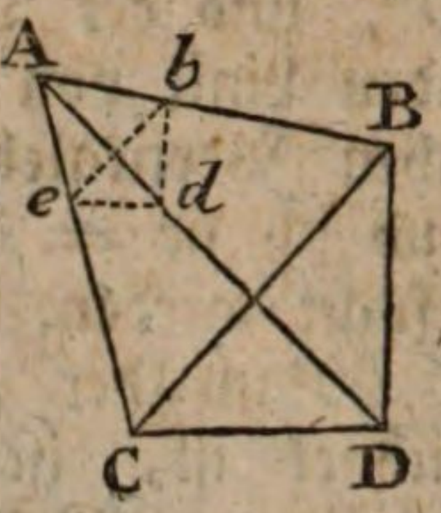


Erstlich, in dem Dreiecke ABE sind alle Winkel und die Seite AB gegeben, BE zu finden; ferner in dem Dreiecke ABW sind alle Winkel und AB gegeben, BW zu bestimmen; endlich in dem Dreiecke BEW sind die beiden Seiten EB und BW, und der eingeschlossene Winkel EBW gegeben; man findet EW = 939,52 Ruthen.

Bemerkung. Auf gleiche Weise können die Abstände einer Anzahl entfernter, und um eine passende Standlinie herum gelegener, Gegenstände, bestimmt werden, wenn man sie je zwei und zwei zusammen nimmt.

Beispiel 8.

Bei einer ausgedehnten Aufnahme möge der Abstand zweier Spitzen A und B von einander gleich 6594 Ruthen gefunden worden seyn; C und D mögen zwei hohe Puncte darstellen, die zur Bildung von Dreiecken zwar passend gelegen sind, aber deren Abstand durch unmittelbare Messung nicht gefunden werden kann; um ihn daher zu bestimmen, nahmen wir bei C und D folgende Winkel auf, nämlich:



$$\begin{cases} ACB = 85^\circ\ 46' \\ BCD = 23^\circ\ 56' \end{cases} \qquad \begin{cases} ADC = 31^\circ\ 48' \\ ADB = 68^\circ\ 2' \end{cases}$$

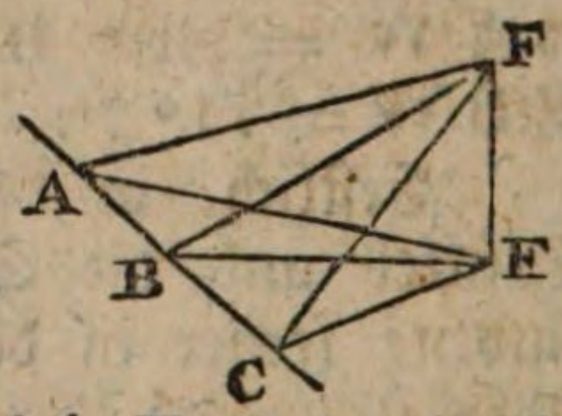
Aus diesen gegebenen Stücken soll CD gefunden werden.

Um diese Aufgabe zu lösen, verzeichne man ein ähnliches Viereck Acdb, indem man CD gleich 1, 10 oder einer andern passenden Zahl annimmt; und berechne Ab aus den gegebenen Winkeln nach Art des vorhergehenden Beispiels. Da nun die Vierecke Acdb und ACDB ähnlich sind, so wird seyn: AB : cd = AB : CD; hieraus wird CD gefunden = 4694 Ruthen.

Beispiel 9.

Von einem entfernten Gegenstande seyen die Höhenwinkel, die auf drei Puncten in einer horizontalen geraden Linie, welche nicht durch den Punct senkrecht unter dem Gegenstande geht, aufgenommen worden, und die gegenseitigen Abstände der Standpuncte gegeben; die Höhe des Gegenstandes und seinen Abstand von jedem Standpuncte zu finden.

Es mögen AEC die horizontale Ebene, FE die perpendiculare Höhe des Gegenstandes über dieser Ebene, A, B, C, die drei Beobachtungspuncte, FAE, FBE, FCE, die Höhenwinkel, und AB, BC, die gegebenen Abstände seyn. Weil nun die Dreiecke AEF, BEF, CEF, alle bei E rechtwinklig sind, so werden sich offenbar die Abstände AE, BE, CE, wie die Cotangenten der Höhenwinkel bei A, B und C verhalten.



Man setze AB = D, BC = d, FF = x, und drücke dann den in der Geometrie, Dreiecke, 25, gegebenen Lehrsatz algebraisch aus, der in diesem Falle wird:

$$AE^2 \,.\, BC + CE^2 \,.\, AB = BE^2 \,.\, AC + AC \,.\, AB \,.\, BC.$$

Die sich ergebende Gleichung ist:

$$dx^2 \cot. A^2 + Dx^2 \cot. C^2 = (D+d)\,x^2 \cot. B^2 + (D+d)Dd.$$

Woraus man sogleich findet:

$$x = \sqrt{\frac{(D+d)\,D\,d}{d.\cot.A^2 + D.\cot.C^2 - (D+d)\cot.B^2}}.$$

Ist auf diese Art EF gefunden, so erhält man die Abstände AE, BE, CE, indem man die Cotangenten von A, B und C nacheinander mit EF multiplicirt.

Bemerkung. Wenn $D = d$ oder $D + d = 2D = 2d$ ist, das heißt, wenn B der Mittelpunct von A und C ist, so wird der algebraische Ausdruck:

$$x = \frac{d}{\sqrt{\frac{1}{2}\cot.A^2 + \frac{1}{2}\cot.C^2 - \cot.B^2}},$$

welches sich so ziemlich zur logarithmischen Behandlung eignet. Die Regel kann in diesem Falle so ausgedrückt werden:

Verdopple die Logarithmen von den Cotangenten der Höhenwinkel der äußersten Standpuncte, suche die natürlichen Zahlen, die hierzu gehören, und halbire die Summe; hiervon ziehe die natürliche Zahl ab, die dem doppelten Logarithmus des mittlern Höhenwinkels angehört; dann wird der halbe Logarithmus dieses Restes, von dem Logarithmus des gemessenen Abstandes des ersten Standpunctes vom zweiten, oder des zweiten vom dritten abgezogen, der Logarithmus der Höhe des Gegenstandes seyn.

Der Abstand von jedem Standpuncte wird wie eben gefunden werden.

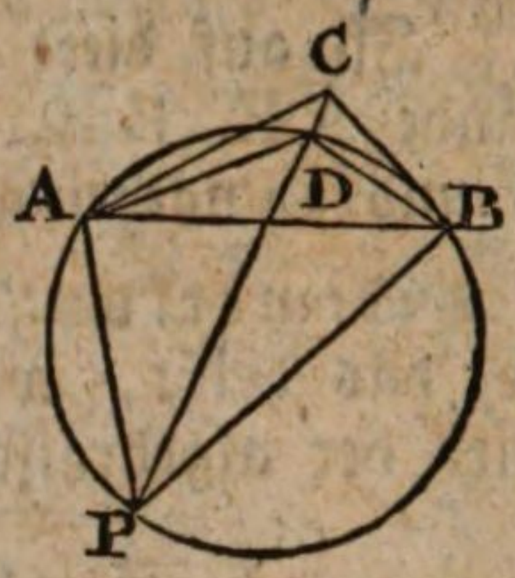
Anmerkung. Der Fall, den dieses Beispiel behandelt, ist sehr nützlich, und kommt häufig vor. Analog ist der Fall, wenn die Höhenwinkel eines entfernten Gegenstandes von den drei Winkeln eines Dreiecks aus, in einer horizontalen Ebene genommen werden, und die drei Seiten dieses Dreiecks bekannt oder meßbar sind; aber obiger Fall gewährt eine einfachere Rechnung, und kann gewöhnlich angewandt werden.

Beispiel 10.

Von einem passenden Standpuncte P, von wo aus drei Gegenstände A, B und C gesehen werden konnten, deren Abstände von einander bekannt waren, (nämlich $AB = 800$, $AC = 600$, $BC = 400$ Ruthen) nahm ich die Horizontalwinkel $APC = 33^\circ\ 45'$, $BPC = 22^\circ\ 30'$ auf. Hieraus sollen die Abstände meines Standpuncts in Beziehung auf jeden dieser Gegenstände gefunden werden.

Hier wird es als Vorbereitung zur Rechnung nöthig seyn, darzustellen die Art und Weise der

Construction. Man zeichne das gegebene Dreieck ABC nach einem passenden Maßstabe. Von dem Puncte A aus ziehe man eine Linie AD, welche mit AB einen Winkel von 22° 30′, und von B aus eine Linie BD, welche einen Winkel DBA von 33° 45′ bildet; durch ihren Durchschnittspunct D, und die Puncte A und B beschreibe man einen Kreis. Durch C und D ziehe man eine gerade Linie, welche den Kreis wieder in P trifft: so wird P der gesuchte Punct seyn. Denn zieht man PA, PB, so ist der Winkel APD offenbar gleich ABD, weil sie über einem und demselben Bogen AD stehen, und aus gleichem Grunde BPD = BAD. So daß P der Punct ist, bei dem die Winkel den bestimmten Werth haben.



Das Resultat einer sorgfältigen Construction wird auf einem gut gezeichneten Maßstabe die Werthe von PA, PC, PB, ziemlich bis auf den zweihundertsten Theil eines jeden genau geben.

Rechnung. In dem Dreiecke ABC, in dem die Seiten bekannt sind, bestimme man die Winkel. In dem Dreiecke ABD, in dem alle Winkel und die Seite AB bekannt sind, suche man eine der übrigen Seiten AD. Von BAC ziehe man BAD ab, der Rest DAC ist der von zwei bekannten Seiten AD und AC eingeschlossene Winkel; hieraus können nach dem zweiten Falle des dritten Capitels die Winkel ADC und ACD gefunden werden. Der Winkel CAP = 180° — (APC + ACD). Also BCP = BCA — ACD; und PBC = ABC + PBA = ABC + Suppl. ADC. Hieraus werden die drei gesuchten Abstände durch folgende Proportionen gefunden: sin. APC : AC = sin. PAC : PC und = sin. PCA : PA; sin. BPC : BC = sin. BCP : BP. Die Resultate der Rechnung sind PA = 709,33, PC = 1042,66, PB = 934 Ruthen.

*** Die Rechnung bei Aufgaben dieser Art kann vermittels analytischer Behandlung etwas abgekürzt werden. Wer diesen Theil der Trigonometrie weiter verfolgen will, kann in den Lehrbüchern von Bornycastle, Gregory und Woodhouse darüber nachlesen *)

---

*) Ein ziemlich reichhaltiges Lehrbuch der Trigonometrie ist das von Wilde, Berlin 1826. Wer auf heuristische Weise mit den hauptsächlichsten Sätzen und Formeln der ebenen und körperlichen Trigonometrie bekannt werden will, den wage ich auf meine „Grundzüge der ebenen und körperlichen Trigonometrie, Leipz. 1825" aufmerksam zu machen. (D.)

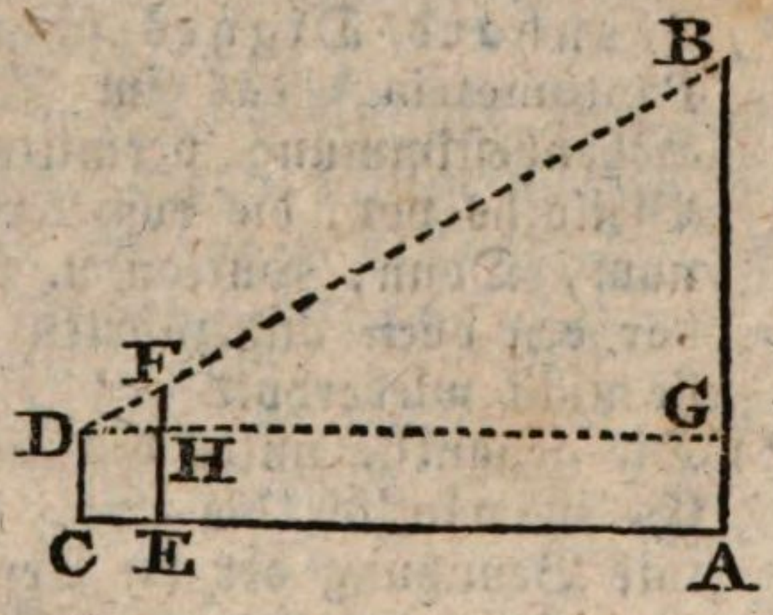
Anmerkung. Wäre C unter AB gewesen, so würden im Allgemeinen die Grundsätze der Construction und der Rechnung dieselben gewesen seyn; die Veränderung in dem Verfahren wäre sehr einleuchtend.

II. Bestimmung von Höhen und Entfernungen durch annähernde mechanische Methoden.

1. Für Höhen.

1. Durch den Schatten, bei Sonnenschein. Man stelle senkrecht einen Stab von bekannter Länge auf, und messe auf einer horizontalen oder andern Ebene die Länge seines Schattens; man messe auch die Länge des Schattens, den der Gegenstand wirft, dessen Höhe gesucht wird, dann wird sich die Länge des Schattens des Stabes zu der Länge des Stabes selbst verhalten, wie die Länge des Schattens des Gegenstandes zu der Höhe des Gegenstandes.

2. Durch zwei senkrecht aufgestellte Stäbe. Zwei Stäbe, den einen von 6, den andern von 4 Fuß stelle auf horizontale kreisförmige oder viereckige Füße, auf denen sie fest stehen müssen. AB mag der Gegenstand z. B. ein Thurm seyn, dessen Höhe gesucht wird, und AC die horizontale Ebene, die durch seinen untersten Punct geht. CD und EF mögen die beiden Stäbe seyn, die mit ihren Enden auf eine und dieselbe Linie CA, die durch den Endpunct des Gegenstandes A geht, gestellt werden; hierauf müssen sie näher an einander oder weiter von einander gerückt werden, bis der äußerste Punct des Gegenstands B in derselben Linie mit D und F, den Spitzen der Stäbe, gesehen wird. Dann wird vermöge der Aehnlichkeit der Dreiecke seyn: DH(=CE):FH=DG(=CA):BG. Hierzu füge man noch AG=CD, um die völlige Höhe AB zu erhalten.



3. Durch Zurückwerfung der Lichtstrahlen. Man setze ein Gefäß mit Wasser auf den Boden und entferne sich davon, bis man die Spitze des Gegenstandes von der glatten Oberfläche des Wassers zurückgeworfen sieht. Hierauf wird, nach einem Gesetze der Optik, daß Einfalls- und Ausfalls-Winkel einander gleich sind, der horizontal gemessene Abstand von dem Puncte, in dem die Zurückwerfung geschieht, zur Höhe des Auges über der zurückwerfenden Ebene sich verhalten, wie

der horizontale Abstand des Fußes des Gegenstandes von dem Gefäße, zu seiner Höhe über der genannten Oberfläche.*)

4. Vermittels eines tragbaren Barometers und Thermometers. Man beobachte die Höhe B der Queckſilberſäule in Zollen, Zehnteln und Hunderteln am Fuße des Berges oder eines andern Gegenſtandes, deſſen Höhe man ſucht; hierauf beobachte man die Höhe b der Queckſilberſäule auf dem höchſten Puncte des Gegenſtandes; man bemerke ferner auf dem Thermometer von Fahrenheit die Temperaturen zur Zeit beider Barometer-Beobachtungen, und nehme zwiſchen beiden das arithmetiſche Mittel. Dann wird $55000 \times \frac{B-b}{B+b}$ = der Höhe des Berges ſeyn, in Fuß ausgedrückt, für die Temperatur 55° Fahrenheit. Hierzu füge man für jeden Grad, um den die mittlere Temperatur 55° übertrifft, $\frac{1}{440}$ des Reſultates hinzu; für jeden Grad aber unter 55° ziehe man eben ſo viel ab. Iſt die Höhe des Berges unter 2000, ſo wird dieſe Methode eine gute Annäherung gewähren; auch vergißt man ſie nicht ſo leicht, da 55° der angenommenen Temperatur, mit 55, der Zahl in dem Coefficient übereinſtimmen, während der Correctionsbruch in dem Nenner zwei Vieren enthält.

*** Wo große Genauigkeit erfordert wird, da werden logarithmiſche Regeln nöthig, wovon verſchiedene in den Lehrbüchern der Pneumatik aufgeführt werden.**)

---

*) Leonhard Digges ſchlug zuerſt in ſeinem merkwürdigen Werke Pantometria, das im Jahre 1571 herauskam, eine Methode für Höhenbeſtimmung vermittels eines geometriſchen Winkelmaßes und Bleiloths vor, die von verſchiedenen ſpätern Schriftſtellern, wie Ozanam, Donn, Hutton u. ſ. w. beſchrieben worden iſt; da ſie aber vor den oben angeführten Methoden keine Vorzüge hat, ſo habe ich ſie nicht wiederholt.

**) Die genaueſte unter den einfachern iſt ohnſtreitig die von De Luc. Es iſt nämlich die Höhe des zweiten Beobachtungsortes in Toiſen, mit Benutzung der im Texte angenommenen Bezeichnung

$$= 10000\ (\log. B - \log. b).$$

Dieſe Formel gilt für die mittlere Lufwärme von $16\frac{3}{4}$° Reaumür. Für jeden Grad über dieſem Puncte hat man noch $\frac{1}{215}$ des Reſultats hinzuzufügen, unter ihm abzuziehen. Heißt daher t die beobachtete mittlere Temperatur, ſo kann man dies gleich in die Formel aufnehmen und die Höhe ſetzen $= 10000 \frac{(t - 16{,}75)}{215} (\log. B - \log. b)$.

Die genaueſte aller Formeln iſt die von Laplace. Nach ihr ſind die Barometertafeln von Oltmanns conſtruirt, die unter andern als Anhang zu Opelt's Ueberſetzung von Francoeur's Mechanik, Dresden 1825, einem empfehlenswerthen Buche, neu abgedruckt erſchienen ſind. (D.)

5. Durch eine Erweiterung des Seite 39 gegebenen Gesetzes. Man stelle den Sextanten oder ein anderes Instrument auf den Winkel von 45°, und bestimme den Punct C (Seite 138) auf der Horizontalebene, indem der Gegenstand AB diese Höhe hat; hierauf stelle man das Instrument auf den Winkel von 26° 34′, und gehe von C, in der Richtung BCD zurück, bis der Gegenstand diese Höhe hat. Der Abstand CD dieser beiden Standpuncte wird = AB seyn.

So ist ferner,

wenn C = 40°, und D = 24° 31½′; CD = AB;
oder wenn C = 35°, und D = 22° 33′; CD = AB;
oder wenn C = 30°, und D = 20° 6′; CD = AB;
oder allgemein, wenn cot. D — cot. C = rad., CD = AB;

6. Für die Abweichung von der horizontalen Ebene. E mag die Höhe der Tangente der Erde über der wahren Horizontalebene eines benachbarten Orts in Fußen und Theilen von Fußen, D den Abstand in Meilen ausdrücken; dann wird seyn $E = \frac{2}{3} D^2$. *)

Dieß giebt 8 Zoll für eine Entfernung von einer Meile, und ist, wenn der Abstand nicht zwei oder drei Meilen überschreitet, eine hinreichende Annäherung.

2. Für Entfernungen.

1. Vermittels eines auf einer Horizontalebene abgesteckten Rhombus.

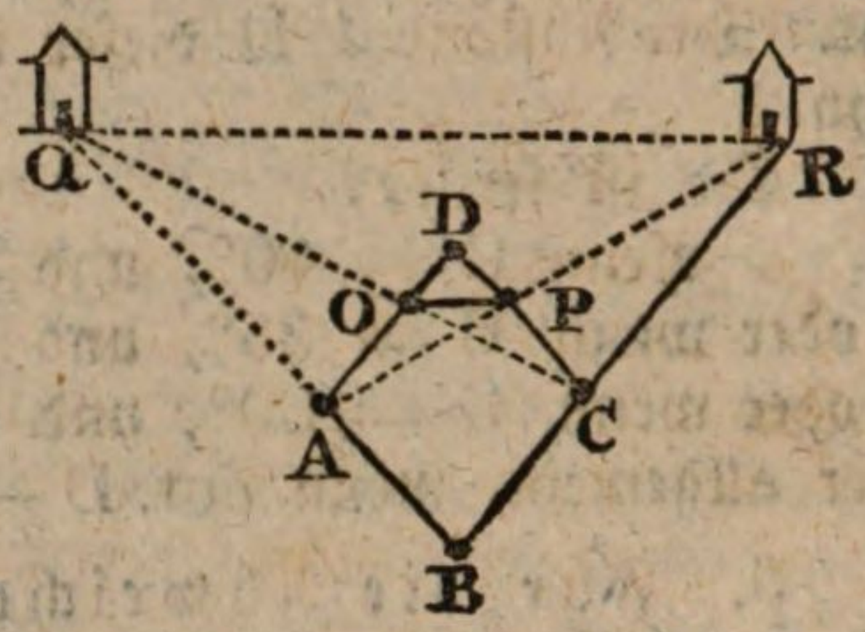
O sey der Gegenstand, und OB der verlangte Abstand. Vermittels einer Linie oder Meßschnure, deren Länge gleich der Seite des erwähnten Rhombus, z. B. 50 oder 100 Fuß, ist, bilde man eine Seite BA in der Richtung BO gegen den Gegenstand, und eine andere Seite BC, in einer passenden Richtung, (denn ob B ein rechter Winkel ist oder nicht, thut nichts zur Sache); und stelle Stäbe in A und C auf. Hierauf befestige man zwei Enden zweier solcher Leinen in A und C, und spanne sie an, bis die beiden andern Enden in D zusammentreffen; läßt man sie so ausgebreitet auf dem Boden liegen, so werden sie die beiden andern Seiten AD und CD des Rhombus bilden. In dem Puncte R, in dem die Richtungslinie CO die Lei-

*) Dies in englischen Fußen und Meilen. Für eine deutsche Wegstunde (½ Meile) und Rheinl. Fuße würde E = 6,86 . D².
(D.)

ne AD trifft, mache man ein Zeichen, und messe RD und RA auf der Leine. Dann wird sich verhalten: RD : DC = CB : BO dem verlangten Abstande.

Anders die Länge der unzugänglichen Linie zu finden.

In einem passenden Puncte B stecke man den Rhombus BADC so ab, daß zwei seiner Seiten BA, BC, nach den Endpuncten der Linie QR gerichtet sind. Die Durchschnitte O und P von AR und CQ mit den Seiten des Rhombus merke man (wie in der vorhergehenden Methode) an; dann wird das Dreieck ODP dem Dreiecke RBQ ähnlich seyn, und der unzugängliche Abstand RQ wird gefunden werden $= \frac{OP \times BA^2}{OD \times DP}$. *)



So, wenn BA = BC u. s. w. = 100 Fuß, OD = 9 Fuß 5 Zoll, DP = 11 Fuß 10 Zoll, OP = 13 Fuß 7 Zoll ist, so wird seyn $QR = \frac{10000 \times 13\frac{7}{12}}{9\frac{5}{12} \times 11\frac{10}{12}} = 1219$ Fuß.

2. Vermittels eines Mikrometers, das an einem Fernrohre angebracht ist.

Tragbare Instrumente zur Messung äußerst kleiner Winkel sind von Martin, Cavallo, Dollond, Brewster und andern erfunden worden. Bei ihrem Gebrauche zur Bestimmung von Abständen ist es nöthig, daß der Winkel, der gemessen werden soll, einem Gegenstande von bekannter Ausdehnung gegenüber liegt, und er entweder vertical oder horizontal auf den entfernten Endpuncten der Linie steht, deren Länge man zu bestimmen weiß. Wenn z. B. ein Haus oder eine andere Erhöhung, mit Ziegelsteinen gebaut, von gewöhnlicher Gestalt gegeben ist; ferner vier Reihen Steine in der Höhe einen Fuß und vier in der Länge 3 Fuß geben, so werden die hierdurch gemessenen Abstände erträglich genau seyn, wenn man mit Berücksichtigung des Winkels, der dem horizontalen Gegenstande gegenüber liegt, Sorge getragen hat, seinen Stand

---

*) Denn $PD : DA = AB : BR = \frac{AB^2}{PD}$;

und $OD : OP = BR : RQ = \frac{AB^2 . OP}{OD . DP}$.

demselben gerade gegenüber zu nehmen. Ein Mensch, ein Wagenrad, ein Fenster, eine Thüre u. s. w. auf dem entfernten Endpuncte des Abstandes, den man bestimmen will, kann zu einer Annäherung dienen. Aber in jedem Falle, wo es möglich ist, stelle man senkrecht aus dem einen Ende der Linie, welche gemessen werden soll, ein Maß von einem, drei oder 6 Fußen auf, während der Beobachter mit seinem Mikrometer an dem andern Ende steht. Dann wird, wenn h die Höhe des Gegenstandes ist,

entweder $\frac{1}{2}$h . cot. $\frac{1}{2}$ des gegenüber liegenden Winkels,
oder h cot. des gegenüber liegenden Winkels

die Entfernung geben, je nachdem das Auge des Beobachters der Mitte oder dem einen Ende des Gegenstandes, dessen Winkel aufgenommen worden ist, horizontal gegenüber liegt.

Wenn man keine Tafel von natürlichen Tangenten bei der Hand hat, so werden folgende Regeln eine sehr große Annäherung für alle Winkel, welche kleiner sind als ein halber Grad, und eine erträgliche bis zu einem Winkel von einem Grade gewähren.

1. Wenn der entfernte Gegenstand, dessen Winkel aufgenommen worden ist, einen Fuß in der Länge hat, dann wird

3437,74 dividirt durch den Winkel in Minuten
oder 206264,8 dividirt durch den Winkel in Secunden

den Abstand in Fußen geben.*)

2. Wenn der entfernte Gegenstand 3, 6, 9 u. s. w. Fuß Länge hat, so multiplicire man das vorhergefundene Resultat mit 3, 6, 9 u. s. w.

Beispiel 1. Welches ist der Abstand eines sechs Fuß hohen Mannes, wenn sein Gesichtswinkel (seine scheinbare Größe) 30 Secunden ist?

$$\frac{206264 \times 6}{30} = \frac{206264}{5} = 41252{,}8 \text{ Fuß} = 3437{,}7 \text{ Ruthen}$$

der verlangte Abstand.

Beispiel 2. Um die Länge einer Straße zu bestimmen, stellte ich an dem einem Ende derselben ein Maß von einem Fuße auf, und an dem andern Ende fand ich den Winkel, unter der mir der Gegenstand erschien, gleich 2 Minuten; man verlangt die Länge der Straße.

$$\frac{3437{,}73}{2} = 1718{,}86 \text{ Fuß} = 143{,}24 \text{ Ruthen.}$$

---

*) Es sind nämlich. 206264,8″ = 3437,74′ = 57° 17′ 44,8″ = rad. (D.)

3. Durch die Schnelligkeit des Schalles.

An dem entfernteren Ende des zu suchenden Abstandes lasse man eine Kanone abschießen, und beobachte auf einem Chronometer, das Zehntel=Secunden anzeigt, das Zeit=Intervall, das zwischen dem Blitze und dem Schlage des Kanonenschusses vergeht; hierauf schätze man den Abstand für eine Secunde nach folgender Regel, und multiplicire diesen Abstand mit dem beobachteten Zeitintervall; das Product wird den ganzen Abstand geben, den man suchte.

Bei der Temperatur von 33° ist die Geschwindigkeit 1100 Fuß in der Secunde.

Für niedrigere Temperaturen ziehe man ab } einen halben
Für höhere Temperaturen füge man hinzu } Fuß
von den 1100 } für jeden Grad der Differenz von 33°
zu den 1100 }

an dem Fahrenheitischen Thermometer; das Resultat wird sehr nahe die Schnelligkeit des Schalles bei allen solchen Temperaturen zeigen. *)

So ist bei der Temperatur von 50° die Schnelligkeit des Schalles $1100 + \frac{1}{2}(50 - 33) = 1108\frac{1}{2}$ Fuß.

Bei der Temperatur von 60° ist sie $1100 + \frac{1}{2}(60 - 33) = 1113\frac{1}{2}$ Fuß.

V. Kapitel.

Kegelschnitte.

1. Kegelschnitte sind die Figuren, welche entstehen, wenn eine Ebene einen Kegel schneidet.

2. Nach den verschiedenen Lagen der schneidenden Ebene entstehen fünf verschiedene Figuren oder Schnitte, nämlich: ein Dreieck, ein Kreis, eine Ellipse, eine Hyperbel und eine Parabel; von denen die drei letzteren vorzugsweise Kegelschnitte genannt werden.

3. Geht die schneidende Ebene durch die Spitze des Kegels und einen Theil der Grundfläche, so wird der Schnitt ein Dreieck seyn.

---

*) Für Reaumürs Scale könnte man nahe so rechnen: für 15° R. 1088 Fß. Rheinl. und auf jeden Grad $1\frac{1}{8}$ Fuß Differenz.
(D.)

4. Schneidet die Ebene den Kegel parallel zur Grundfläche, oder macht er mit ihr keinen Winkel, so wird der Schnitt ein Kreis seyn.

5. Eine Ellipse ist der Schnitt, welcher entsteht, wenn beide Seiten des Kegels schief geschnitten werden, oder wenn die schneidende Ebene gegen die Grundfläche unter einem kleinern Winkel geneigt ist, als die Seite des Kegels.

6. Der Schnitt ist eine Parabel, wenn der Kegel durch eine zur Seite parallele Ebene geschnitten wird, oder wenn die schneidende Ebene und die Seite des Kegels gleiche Winkel mit der Grundfläche machen.

7. Der Schnitt ist eine Hyperbel, wenn die schneidende Ebene einen größeren Winkel mit der Grundfläche macht, als die Seite des Kegels mit eben derselben.

8. Wenn alle Seitenlinien des Kegels durch die Spitze verlängert werden, so bilden sie einen entgegengesetzten gleichen Kegel, und erweitert man die Ebene in Nr. 7. so weit, daß sie den entgegengesetzten Kegel schneidet, so wird dieser letzte Schnitt die der frühern entgegengesetzte Hyperbel seyn.

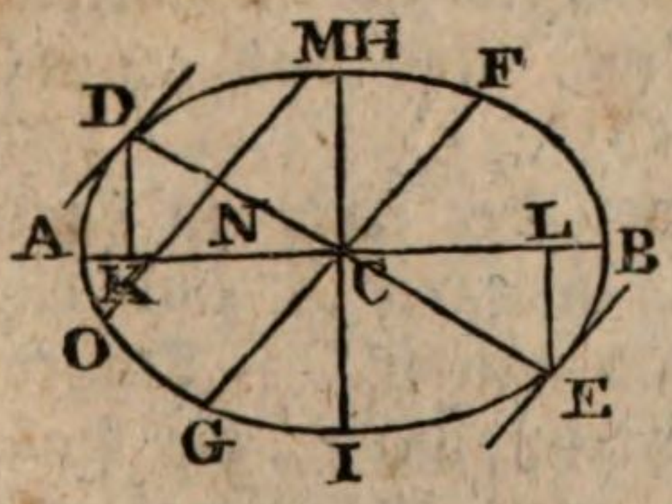
9. Die Scheitel der Schnitts sind die Puncte, wo die schneidende Ebene die entgegengesetzten Seiten des Kegels oder die Seiten des verticalen Dreieck-Schnitts trifft, wie A und B in den (weiter unten stehenden) Figuren.

Daher haben die Ellipse und die entgegengesetzten Hyperbeln zwei Scheitel; die Parabel aber nur einen; es sey denn daß wir den andern als in unendlicher Entfernung betrachten.

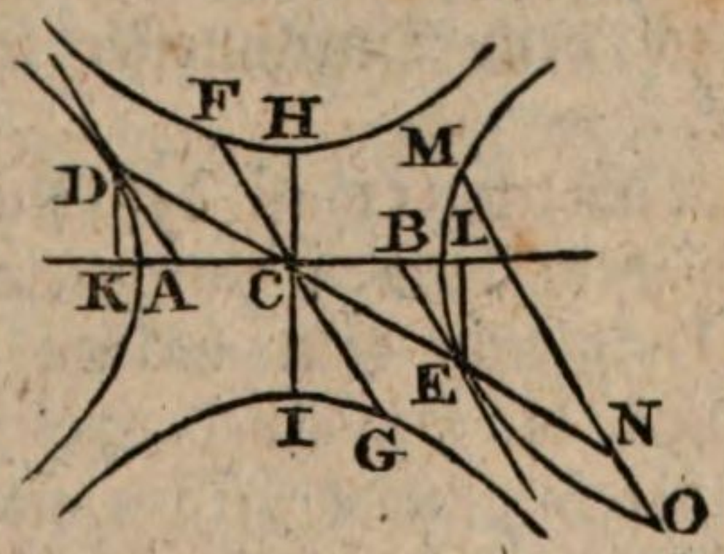
10. Die große Axe oder der transversale Durchmesser eines Kegelschnitts ist die Linie oder der Abstand AB zwischen den Scheiteln.

Daher ist die Axe einer Parabel in ihrer Länge unendlich, und Ab ist nur ein Theil davon.

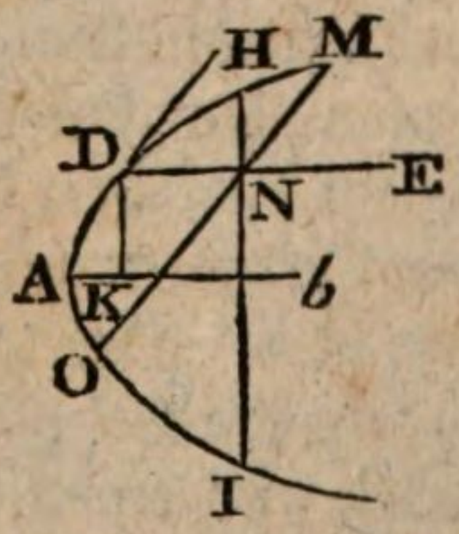
Ellipse.



Hyperbel.



Parabel.



11. Der Mittelpunct C ist der Halbirungspunct der Axe.

Daher ist der Mittelpunct der Parabel unendlich von dem Scheitel entfernt. Bei einer Ellipse liegt die Axe und der

Mittelpunct innerhalb der Curve; außerhalb aber bei der Hyperbel.

12. Ein Durchmesser ist eine gerade Linie, wie AB und DE, die durch den Mittelpunct geht, und sich an beiden Seiten der Curve endigt; die Endpuncte des Durchmessers, oder seine Durchschnittspuncte mit der Curve, sind seine Scheitel.

Daher sind bei der Parabel alle Durchmesser mit der Axe parallel und unendlich in ihrer Länge. Daher hat auch jeder Durchmesser der Ellipse und Hyperbel zwei Scheitel, aber der Parabel nur einen, wenn wir nicht den andern als in unendlicher Entfernung betrachten.

13. Ein conjugirter Durchmesser ist eine durch den Mittelpunct, und der Tangente der Curve in dem Scheitel des Durchmessers parallel, gezogene Linie. So ist die Linie FG, welche der Tangente im Puncte D parallel ist, ein conjugirter Durchmesser von DE; und HI, parallel der Tangente in A, ist der conjugirte Durchmesser zu AB.

Daher ist der conjugirte Durchmesser HI, der Axe AB, senkrecht auf derselben, und wird oft die kleine Axe genannt.

14. Eine Ordinate eines Durchmessers ist eine Linie die dem conjugirten Durchmesser oder der Tangente am Scheitel parallel ist, und sich auf dem Durchmesser und der Curve endigt. So sind DK und EL Ordinaten der Axe AB, und MN und NO Ordinaten des Durchmessers DE. Daher sind die Ordinaten der Axe senkrecht auf ihr; aber auf andern Durchmessern sind die Ordinaten schief.

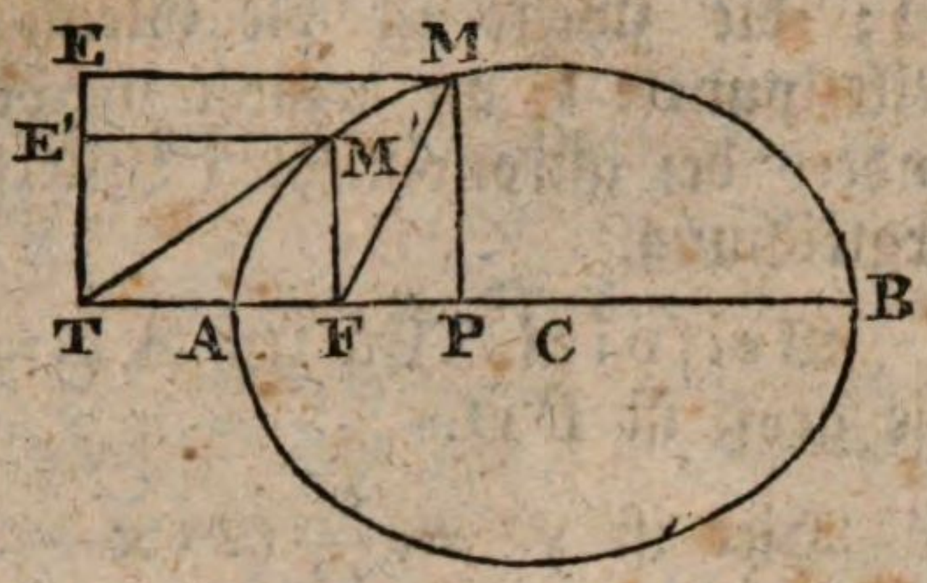
15. Eine Abseisse ist der Theil eines Durchmessers, der zwischen dem Scheitel und der Ordinate desselben enthalten ist; wie AK oder BK, und DN oder EN. Daher hat bei der Ellipse und Hyperbel jede Ordinate zwei Abscissen; aber bei der Parabel nur eine, da der andere Scheitel des Durchmessers in unendlicher Entfernung liegt.

16. Der Parameter eines Durchmessers ist eine dritte Proportionallinie zu dem Durchmesser selbst, und dem conjugirten Durchmesser.

17. Der Brennpunct ist der Punct der Axe, in dem die Ordinate gleich dem halben Parameter ist, wie K und L, wo DK oder EL gleich dem halben Parameter. — Daher haben die Ellipse und die Hyperbel zwei Brennpuncte, die Parabel nnr einen. Brennpuncte heißen sie, weil alle Strahlen, von dem einen Brennpuncte ausgehend, und von der Curve zurückgeworfen, in dem andern Brennpuncte vereinigt werden.

18. Die Directrix ist eine Linie, welche durch einen gewissen Punct der Axe senkrecht darauf gezogen wird, so daß Linien, welche parallel zu der Axe von der Directrix aus ge-

zogen, die Curve treffen, mit den Linien, welche von den Durchschnittspuncten nach dem Brennpnncte gezogen werden, für ein und dieselbe Curve in einem beständigen Verhältnisse stehen. Wenn sich z. B. verhält $EM : MF = E'M' : M'F$, so ist $TE'E$ die Directrix.

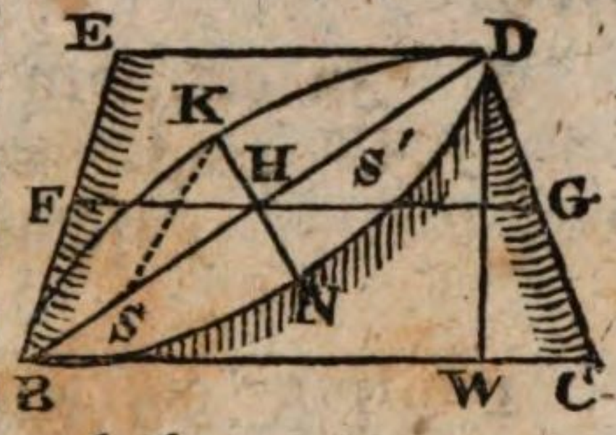


Die Curve aber wird eine Parabel, Ellipse oder Hyperbel seyn, je nachdem FM gleich, kleiner oder größer als ME ist.

19. Die Asymptote ist eine gerade Linie, der sich eine krumme Linie immer mehr annähert, so jedoch, daß sie einander nicht treffen, wenn sie nicht beide unendlich verlängert werden. Die Hyperbel hat zwei Asymptoten.

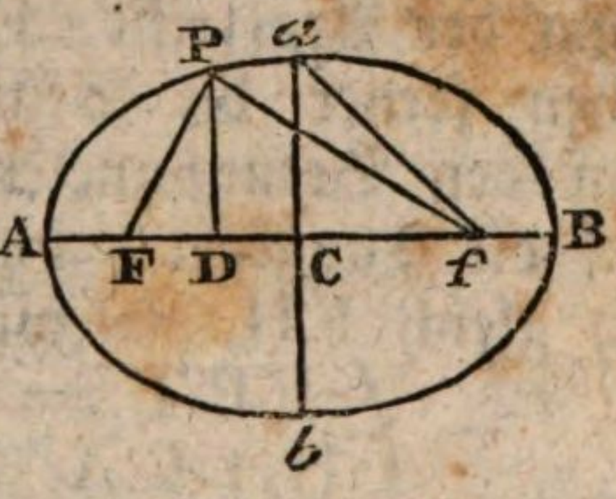
1. Abschnitt. Eigenschaften der Ellipse.

1. Wenn in der beigefügten Figur die Ellipse $BKDN$ aus dem Theile des geraden Kegels geschnitten wird, dessen obere Fläche ED, und dessen untere Fläche BC zum Durchmesser hat; ferner wenn BD die große, KN die kleine Axe, und S, S' die Brennpuncte sind, so wird man haben:



$$BD^2 = DC^2 + ED \,.\, BC \quad \ldots\ldots (1)$$
$$KN^2 = ED \,.\, BC \quad \ldots\ldots (2)$$
$$SS' = EB = DC \quad \ldots\ldots (3)$$

2. Wenn AB, ab, die beiden Axen, C der Mittelpunct, F, f, die Brennpuncte, P ein beliebiger Punct der Curve, PD eine Ordinate; ferner wenn $AB = 2t$, $ab = 2c$, $CD = x'$; $AD = x$, $DP = y$, $FP = z$; Winkel $PFD = \varphi$ $\sqrt{t^2 - c^2} = d$, so wird seyn:



$$y^2 = \frac{c^2}{t^2}(2tx - x^2) \quad \ldots\ldots (I)$$

$$y^2 = \frac{c^2}{t^2}(t^2 - x'^2) \quad \ldots\ldots (II)$$

$$z = \frac{c^2}{t - d\cos.\varphi} \quad \ldots\ldots (III)$$

Die erste Gleichung ist die Gleichung der Curve, wenn die Abscissen vom Endpuncte der großen Axe aus genommen wer-

den; die zweite ist die Gleichung, wenn die Abscissen vom Mittelpuncte C an gezählt werden, und die dritte ist die, besonders bei astronomischen Untersuchungen, gebräuchliche, Polargleichung.

Beispiel. Es sey $AB = 20$, $ab = 12$, $AD = 4$. wie groß ist PD.

Hier ist $y^2 = \frac{c^2}{t^2}(2tx - x^2) = \frac{36}{100}(20 \times 4 - 16)$

$$= \frac{36}{100} \cdot 64 = \frac{6^2 \cdot 8^2}{10^2}.$$

Folglich $y = \frac{6 \times 8}{10} = 4{,}8 = PD$.

Oder nimmt man Gleichung II., in der $CD = x' = 10 - 4 = 6$, t und c aber wie vorher sind, so erhält man:

$y^2 = \frac{c^2}{t^2}(t^2 - x'^2) = \frac{36}{100}(100 - 36) = \frac{6^2 \cdot 8^2}{10^2}$, wie vorher.

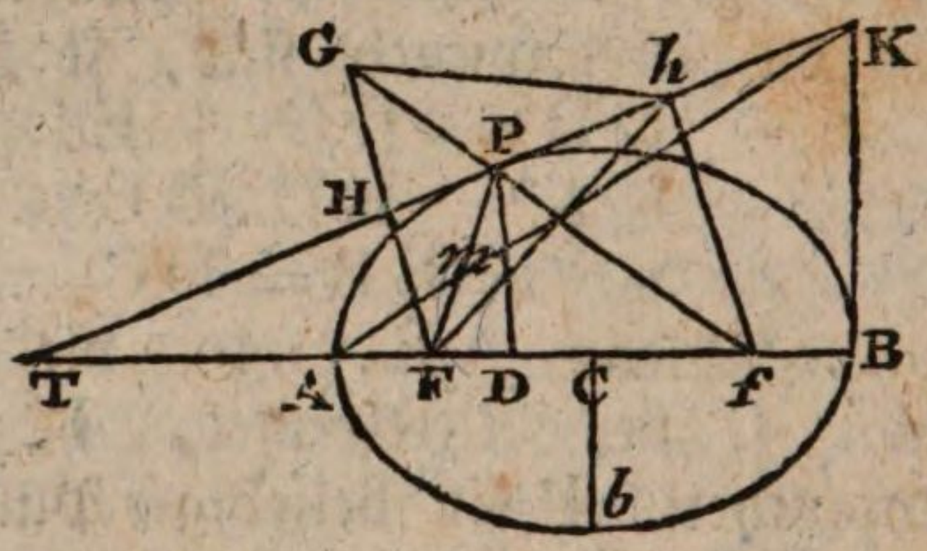
3. In derselben Figur haben wir:

$$AC^2 : aC^2 = AD \cdot DB : DP^2 \ldots . (4)$$

$$\text{ferner } FP + Pf = AB \ldots . (5)$$

$$Ff^2 = AB^2 - ab^2 \ldots (6)$$

4. TK sey eine Tangente an die Ellipse von einem beliebigen Puncte K aus, und T sey der Punct, in dem diese Tangente die Verlängerung der Axe trifft; FH, fh seyen ferner die Senkrechten von den Brennpuncten F, f, auf die Tangente, und GH sey gleich FH, so wird seyn:



$$\angle FPT = \angle fPK \ldots . (7)$$

$$CD : CA = CA : CT \ldots (8)$$

H und h fallen in die Peripherie des Kreises, dessen Durchmesser AB ist . . . . . (9)

Ist m der Mittelpunct von PD, so wird Am verlängert, die beiden Tangenten FK und BK in ihrem Durchschnittspuncte K treffen . . . . . (10)

Wenn D, der unterste Punct der Ordinate, in den Brennpunct F fällt, so wird T, der Durchschnittspunct der Tangente und der verlängerten Axe, der oben erwähnte Punct T der Directrix oder Leitlinie seyn. (Erklärung 18.) . . . (11)

$$FH \cdot fh = Cb^2 \ldots . (12)$$

$$FH^2 = Cb^2 \cdot \frac{FP}{fP} \ldots\ldots (13)$$

5. Wenn auf einen Durchmesser einer Ellipse eine Ordinate gezogen wird, so steht das Rechteck der Abscissen zu dem Quadrate der Ordinate in einem gegebenen Verhältnisse . (14)

6. Alle Parallelogramme, die um die Ellipse beschrieben werden können, sind einander gleich, und jedes solches Parallelogramm ist gleich dem Rechteck der beiden Axen . . (15)

7. Die Summe der Quadrate von je zwei conjugirten Durchmessern ist gleich eben derselben beständigen Größe; nämlich der Summe der Quadrate der beiden Axen. . . . . (16)

8. Erklärung. Der Krümmungshalbmesser eines Kegelschnitts oder andern Curve, ist der Halbmesser desjenigen Kreises, welcher in einem bestimmten Puncte genau eben die Krümmung hat, als die Curve selbst, oder der Halbmesser des Kreises, welcher sich an die Curve anschmiegt, und in einem kleinen Abstande von dem Berührungspuncte auf beiden Seiten mit ihr zusammenfällt. Der Kreis selbst heißt der Krümmungskreis; und wenn die krumme Linie unaufhörlich ihre Krümmnng verändert, so hat jeder Punct einen verschiedenen Krümmungskreis, dessen Halbmesser im Berührungspuncte auf der Tangente senkrecht steht.

9. PC sey der Krümmungshalbmesser an einem Puncte P einer Ellipse oder Hyperbel, deren größere Axe AB, die kleine ab und die Brennpuncte F und f sind, dann wird seyn

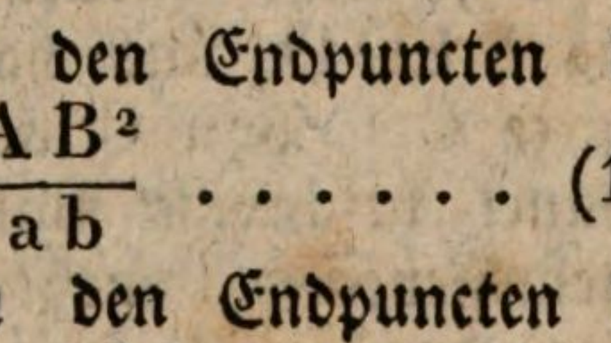
$$PC = \frac{(PF \cdot Pf)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{4}AB \cdot ab} \ldots\ldots (17)$$

Der Krümmungshalbmesser ist an den Endpuncten der kleinen Axe am größten, wo er $= \frac{AB^2}{ab}$ . . . . . (18)

Der Krümmungshalbmesser ist an den Endpuncten der großen Axe am kleinsten, nämlich $= \frac{ab^2}{AB}$ . . . . . (19)

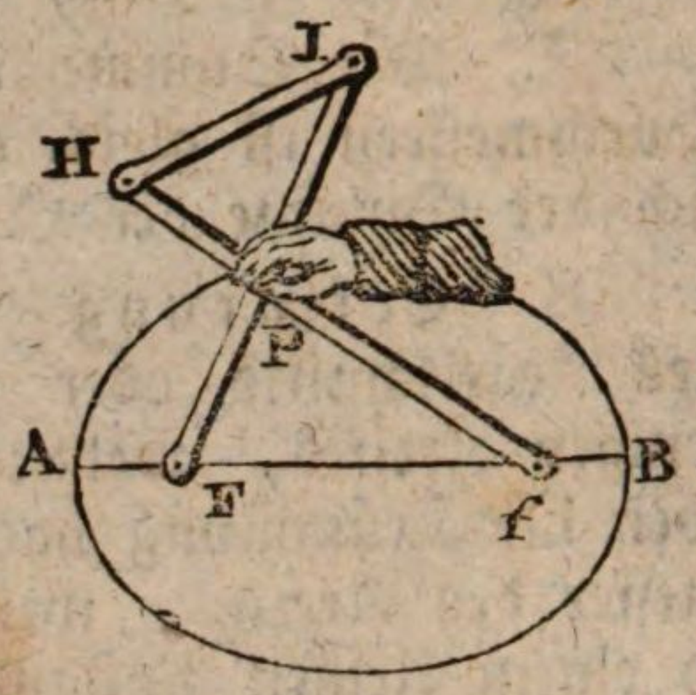
10. Aufgabe. Eine Ellipse zu zeichnen, deren beide Axen gegeben sind.

Man bestimme den Abstand Ff aus dem in Gleichung 6. gegebenen Werthe von Ff^2, oder aus der Gleichung $Ff = \sqrt{AB^2 - ab^2}$. Hierauf lege man einen feinen Faden FPfF in der Länge gleich $Ff + AB$ um zwei Nadeln, die in den Puncten F uud f befestigt sind; innerhalb des Fadens halte man einen Bleistift, spanne den



ganzen Faden an, so daß er drei gerade Linien FP, Pf, fF bildet, so wird, wenn der Punct P herumgeführt wird, der Faden um die festen Nadeln F und f herumgleiten, und die vollkommne Ellipse APpBbA beschrieben werden.

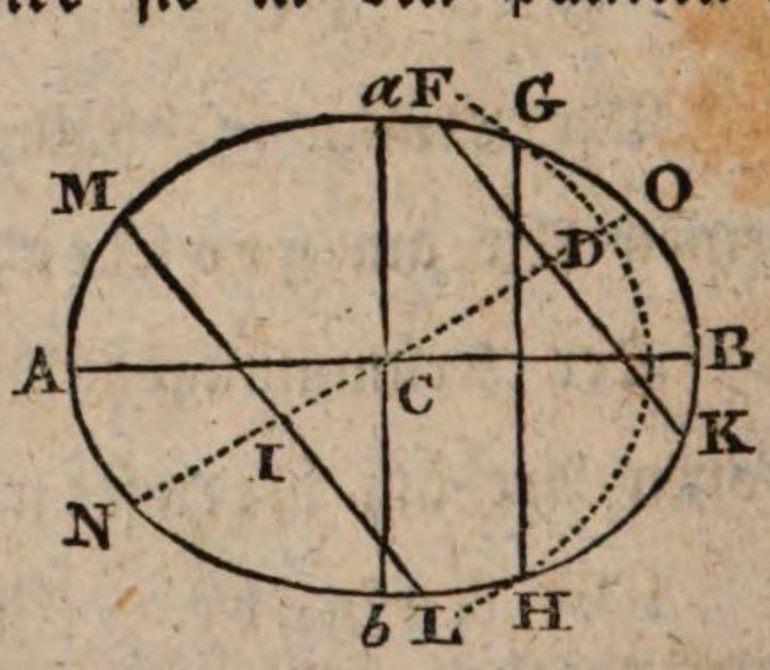
Anders. Man nehme drei Lineale, von denen zwei FI und fH eben so lang als die Hauptaxe AB, und das dritte HI gleich der Focallänge, oder dem Abstande der Brennpuncte von einander, sind. Verbindet man hierauf diese Lineale so, daß sie sich frei um F, f und um HI bewegen, so wird ihr Durchschnittspunct P immer in dem Umkreise der Ellipse liegen, so daß, wenn Spalten längs den beiden Linealen gehen, und der Apparat sich frei um die Brennpuncte bewegt, ein Bleistift, den man in ihren Durchschnittspuncten durch die Spalten steckt, die Curve beschreiben wird.



*** Man hat noch verschiedene andere Methoden, wie mit dem elliptischen Cirkel u. a. Aber die erste der oben angeführten Methoden ist so genau und bequem als man es nur verlangen kann.

11. Aufgabe. Die beiden Axen einer gegebenen Ellipse zu finden.

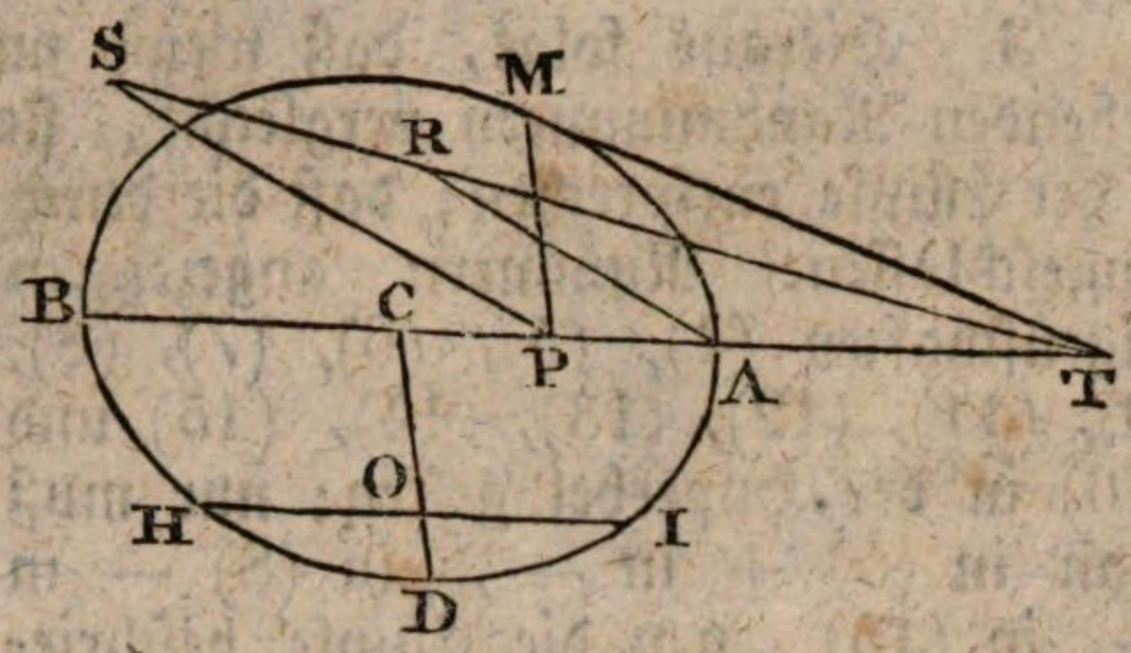
Man ziehe zwei beliebige Parallellinien, die die Ellipse durchschneiden, wie ML, FK, halbire sie in den Puncten I und D, ziehe dadurch die gerade Linie NIDO, und halbire sie im Puncte C. Von C aus als Mittelpunct beschreibe man mit einem angemessenen Halbmesser einen Kreisbogen, der die Ellipse in den Puncten G, H schneidet. G und H verbinde man, und ziehe zu dieser Linie GH parallel durch den Punct C die kleine Axe ab; senkrecht darauf durch C ziehe man AB, so wird dies die große Axe seyn.



12. Aufgabe. Von einem gegebenen Puncte außerhalb einer Ellipse, eine Tangente an dieselbe zu ziehen.

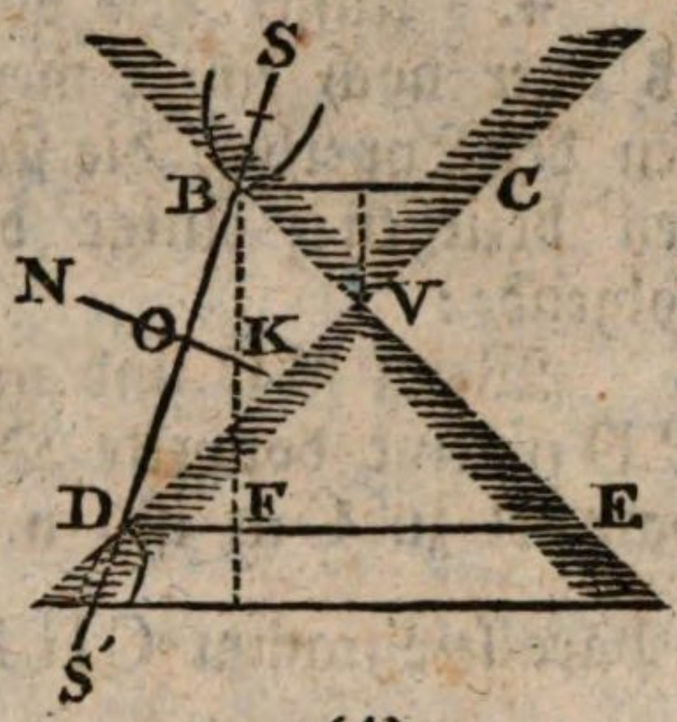
Es sey T der gegebene Punct; hierdurch und durch den Mittelpunct ziehe man den Durchmesser AB, und ihm parallel eine Linie HI, deren Endpuncte in der Curve liegen. HI halbire man in O, und CO verlängert wird der conju-

girte Durchmesser zu AB seyn. Hierauf ziehe man eine Linie TS = TB, und mache TR = TC; ziehe RA, und SP parallel dazu, welche AB in P schneidet. Durch P ziehe man PM, parallel zu CD und verbinde TM, so wird dies die verlangte Tangente seyn.



2. Abschnitt. Eigenschaften der Hyperbel.

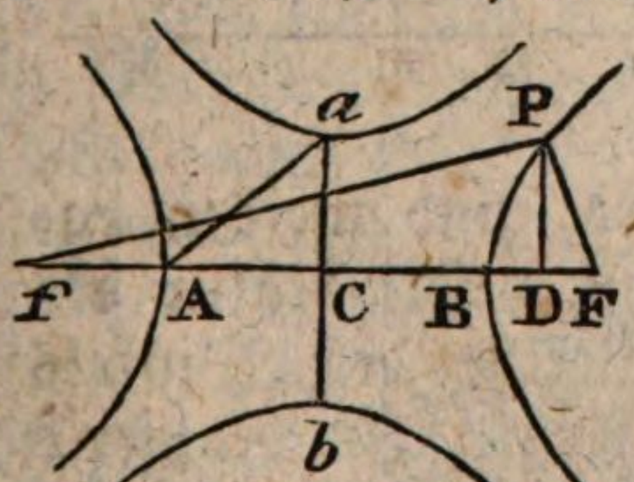
1. Wenn in der beigefügten Figur die zugeordneten Hyperbeln, deren Scheitel in D, B liegen, aus den zwei entgegengesetzten geraden Kegeln, deren gemeinschaftliche Spitze V ist, geschnitten werden, und BC, DE die Durchmesser der zwei Grundflächenkreise der beiden Kegel sind, so wird, wenn DB, KN die Axen und S, S′ die Brennpuncte sind, seyn:



$$DB^2 = DC^2 - DE \,.\, BC \quad \ldots\ldots (1)$$
$$KN^2 = DE \,.\, BC \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$
$$S\,S' = EB = DC \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Vergleicht man diese Eigenschaften mit den entsprechenden bei der Ellipse, so wird man finden, daß sie, bis auf den einzigen Unterschied der Zeichen + und — der in der ersten Eigenschaft verbundnen Größen, übereinstimmen. Dies zeigt mit einrm Male eine allgemeine Analogie zwischen den Eigenschaften der beiden Curven.

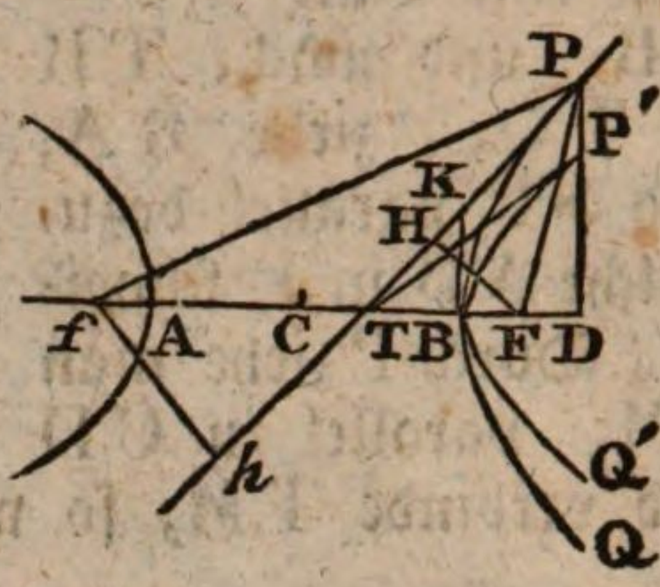
2. Setzt man daher $AC = CB = t$, $aC = Cb = c$, $CF = d$, $AD = x$, $CD = x'$, $DP = y$, Winkel $PFD = \varphi$, $z = FP$, so erhalten wir:



$$y^2 = \frac{c^2}{t^2}(2tx + x^2) \quad \ldots\ldots (I)$$
$$y^2 = \frac{c^2}{t^2}(x'^2 - t^2) \quad \ldots\ldots (II)$$
$$z = \frac{c^2}{t \times d \cos.\ \varphi} \quad \ldots\ldots (III)$$

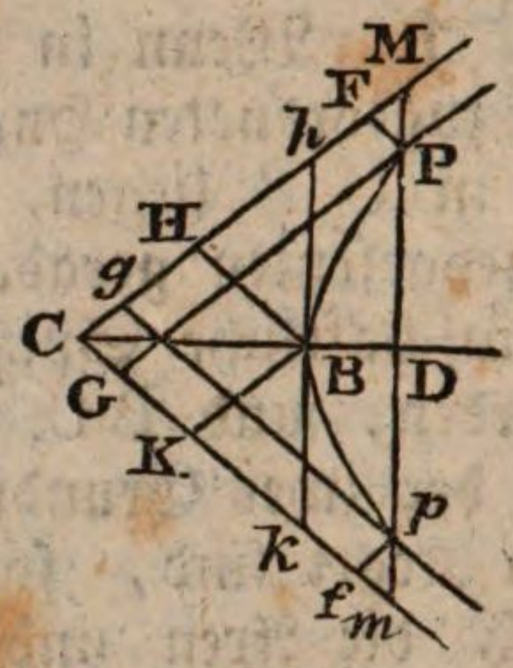
als die drei gewöhnlichsten Gleichungen der Hyperbel, die mit den Gleichungen der Ellipse bis auf die Zeichen übereinstimmen.

3. Hieraus folgt, daß wenn man diese und die vorhergehenden Randnummern vergleicht, sie denen in Artikel 1 und 2 der Ellipse entsprechen; daß die durch eingeschlossene Nummern angezeigten Eigenschaften (4), (5), (6), (7), (8), (9), (11), (12), (13), (14), (15) und (16) in der Hyperbel gelten; nur muß man in (5) + in —, in (8) — in +, in (15) „um die Ellipse beschrieben" in „zwischen die vier Hyperbeln beschrieben" und in (16) Summe in Differenz verändern. Diese Eigenschaften brauchen daher nicht wiederholt zu werden.



4. Außer den oben angeführten giebt es aber noch einige merkwürdige Eigenschaften der Hyperbel, die sich auf ihre Asymptoten beziehen; einige der bekanntesten sind folgende:

Wenn MC und mC Asymptoten sind, PDp eine doppelte Ordinate, BH, PF parallel zu Cm ist, u. s. w. so ist:



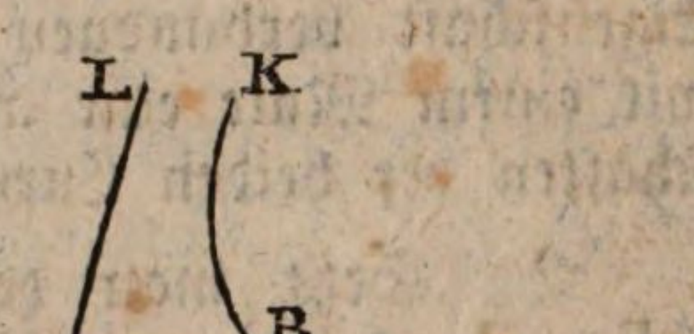
Parallelogramm CHBK = Parallelogramm CFPG
= Parallelogramm Cfpg . .(17)

$MP \cdot Pp = mp \cdot pP = CB^2$ . . . . . (18)

$MP = pm$ . . . . . (19)

Dreieck CPT = Dreieck CBK (vorhergehende Figur) . (20)

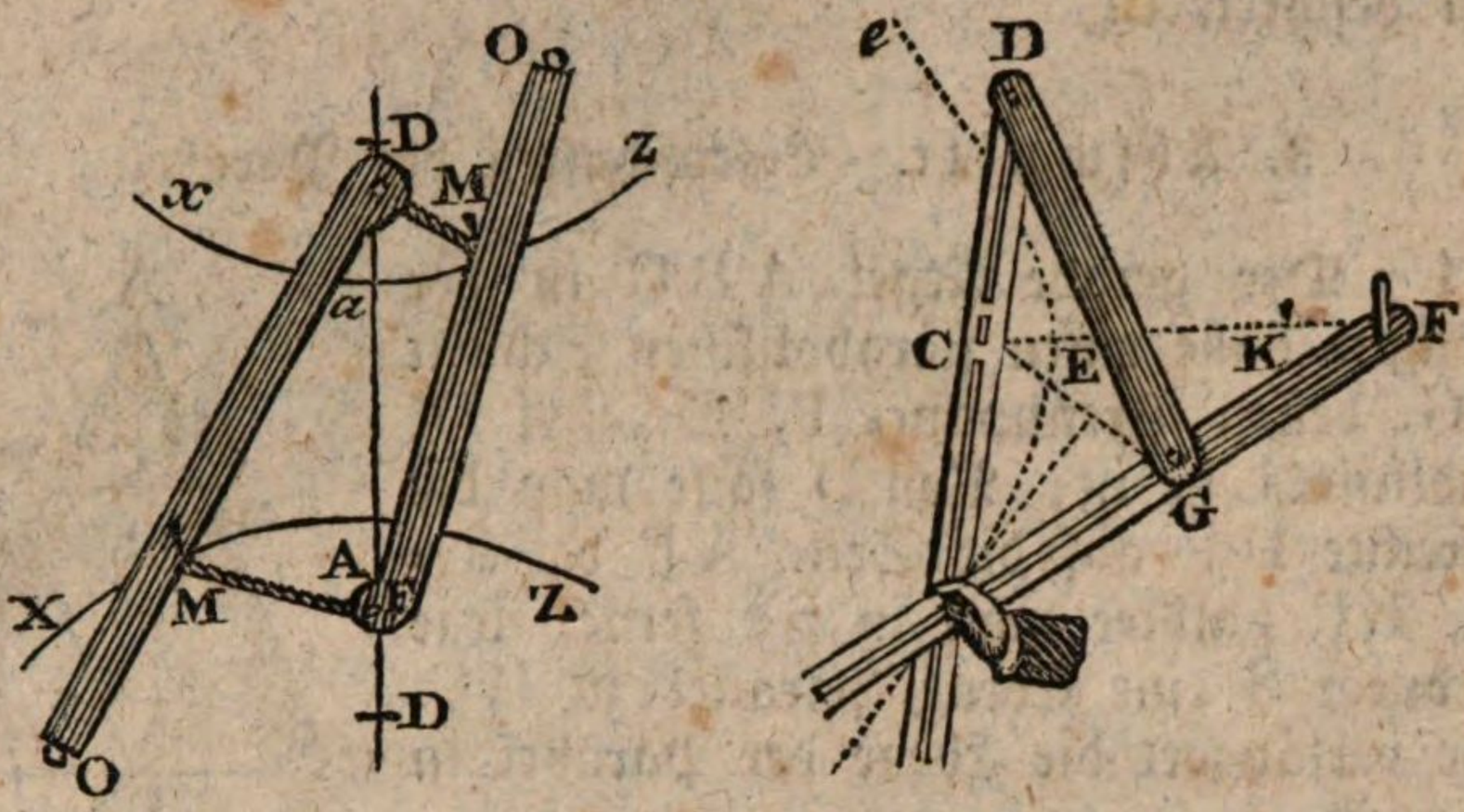
5. Ferner wenn die Abscissen CD, CE, CF u. s. w. einer Hyperbel, auf den Asymptoten in einer steigenden geometrischen Progression genommen werden, so stehen die Ordinaten DB, EG, FH u. s. w. die der andern Asymptote parallel sind, in einer fallenden geometrischen Progression, die denselben Exponenten hat . . . . . (20)



6. Und wenn die Abstände CE, CF u. s. w. in geometrischer Progression sind, so sind die Asymptotenräume DEGB, DFHB u. s. w. in arithmetischer, und werden daher den Logarithmen der erstern analog seyn. Die Natur des Logarithmensystems aber wird von dem Werthe des Winkels abhängen, den die beiden Asymptoten bilden. In Napier's Logarithmen ist LCE ein rechter Winkel; in den gewöhnlichen (künstlichen) ist $LCF = 25^\circ\ 44'\ 27''\frac{1}{4}$. *)

*) Vergl. Seite 91. (D).

7. Hyperbeln zu beschreiben.

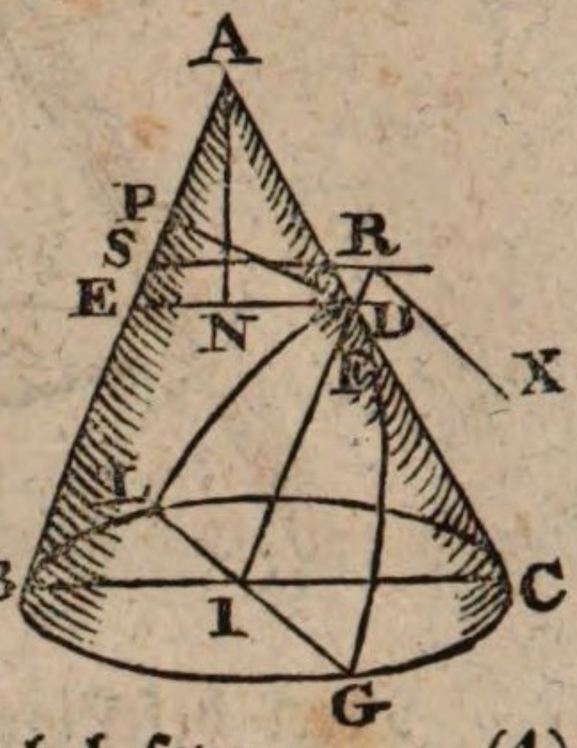


Man befestige das eine Ende eines langen Lineals fMO in dem Puncte f auf einer Ebene vermittels einer Nadel, so daß es sich frei um diesen Punct, wie um einen Mittelpunct, dreht. Hierauf nehme man einen Faden FMO, der kürzer ist als das Lineal, und befestige ein Ende davon in F, das andere an dem Ende O des Lineals. Wenn hierauf das Lineal um den festen Punct f gedreht wird, indem man zugleich den Faden OMF immer straff, und den Theil MO davon, vermittels der Nadel M, dicht an die andere Seite des Lineals hält, so ist die krumme Linie, die durch die Bewegung der Nadel M erzeugt wird, ein Theil einer Hyperbel. Wird nun das Lineal gedreht, und bewegt es sich auf der andern Seite des festen Punctes F, so wird der andere Theil derselben Hyperbel auf dieselbe Art beschrieben werden. Wenn man aber das Ende des Lineals in F befestigt, und das Ende des Fadens in f, so wird die entgegengesetzte Hyperbel xaz beschreiben.

Anders; ebenfalls durch stetige Bewegung. C und F seyen die beiden Brennpuncte, E und K die beiden Scheitel der Hyperbel. (Man sehe oben die letzte Figur.) Man nehme drei Lineale CD, DG, GF, so daß CD = GF = EK und DG = CF sey; die Lineale CD und GF seyen von unbestimmter Länge über C und G hinaus, und es seyen in ihnen Spalten angebracht, in denen sich ein Stift bewegen kann; auch seyen in C und F Löcher in den Linealen, damit sie vermittels Nadeln in den Brennpuncten C und F befestigt werden können; in den Puncten D und G müssen sie mit dem Lineale DG verbunden werden. Wird hierauf ein Stift in die Spalte gesteckt, nämlich in dem gemeinschaftlichen Durchschnitte der Lineale CD und GF, und fortbewegt, indem man die beiden Lineale GF, CD sich um die Brennpuncte C und

F drehen läßt, so wird dieser Stift einen Theil E e der Hyperbel beschreiben.

3. Abschnitt. Eigenschaften der Parabel.



1. Der gerade Kegel A B C in der Randfigur habe einen parabolischen Schnitt L D G, dessen Brennpunct F, Scheitel D, Grundlinie L G ist; Von D fälle man die Senkrechte D P auf die Seite A P des Kegels; E P halbire man in S; ferner lege man durch S eine Ebene, parallel zu B C, welche verlängert die Ebene der Parabel in R X trifft.

Dann wird R X die Directrix der Parabel seyn . . . (1)

$$DF = \frac{ED^2}{4AE} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

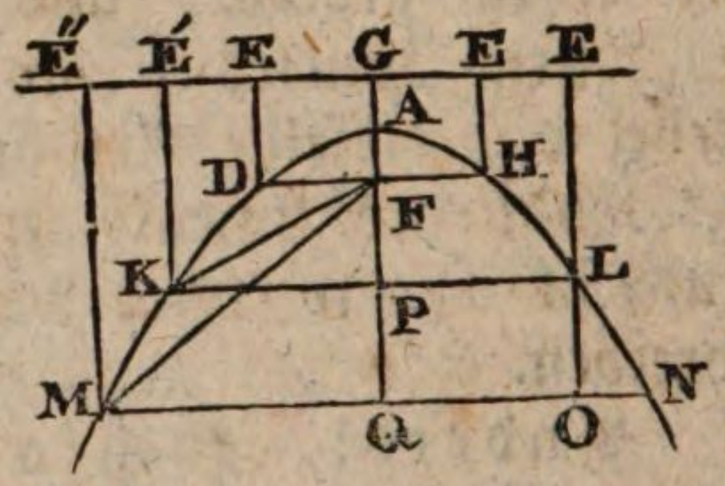
$$DF = \frac{IG^2}{4ED} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$2EP = 4DF = \text{Parameter} \quad \ldots (4)$$

2. p sey der Parameter einer Parabel, $x = AP$ eine Abscisse, $y = PK$ die ihr entsprechende Ordinate, $z = FK$, $d = AF$, φ = Winkel KFP, F der Brennpunct, dann werden:

$$y^2 = px \quad \ldots\ldots\ldots (I)$$

$$z = \frac{2d}{1 \mp \cos.\varphi} \quad \ldots (II)$$



die Gleichungen der Parabel seyn, in deren letzter, oder der Polargleichung, das Zeichen + statt findet, wenn P zwischen A und F, $\frac{1}{4}$ und — wenn P unter F liegt.

$$\text{Der Krümmungshalbmesser in } K = \frac{(4x+p)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{p}} \quad \ldots (III)$$

Da am Scheitel A, x verschwindet, so ist

$$\text{der Krümmungshalbmesser am Scheitel} = \tfrac{1}{2}p \quad \ldots\ldots (IV)$$

3. In derselben Figur, in der E E G E die Leitlinie ist, finden folgende Eigenschaften statt, nämlich:

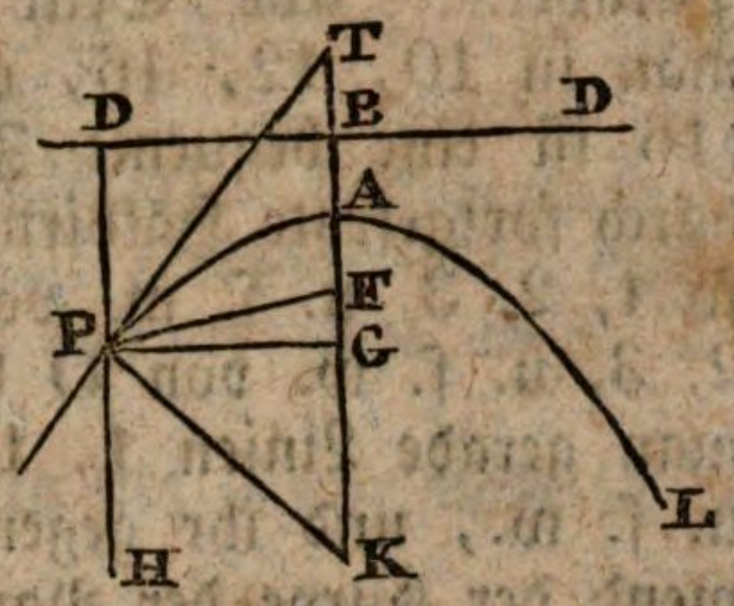
$AF = AG$, $FD = DE$, $EK = KE'$, $FM = ME''$ ꝛc. . . (5)

$$AP : AQ = PL^2 : QN^2 \text{ oder } \frac{AP}{AQ} = \frac{PL^2}{QN^2} \quad \ldots\ldots (6)$$

wo A P und A Q Abscissen, und P L, Q N, die ihnen entsprechenden Ordinaten sind.

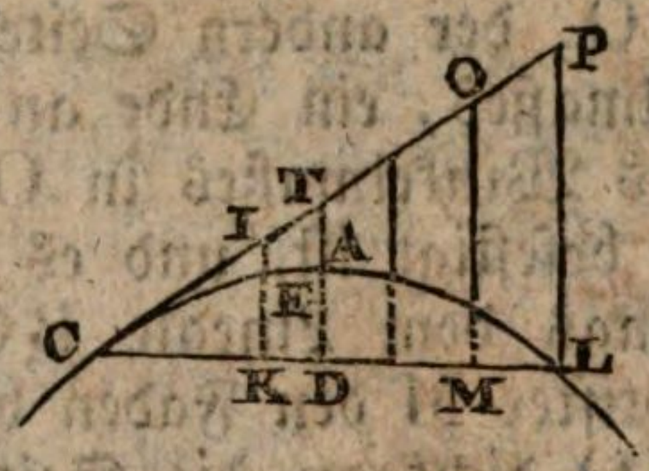
$FK = AP + AF$, $FM = AQ + AF$ .....(7)
$AF = \frac{1}{2} FH = \frac{1}{4} DH$ und $DH =$ Parameter ...(8)
$p : QN + PL = QN - PL : AQ - AP$ } ..(9)
oder $p : MO = ON : OL$ }

4. PT sey ferner die Tangente an eine Parabel im Puncte P und HPD werde parallel zu der Axe AK durch den Punct P gezogen; PK sey senkrecht auf TP, dann ist GT die Subtangente, PK die Normale, GK die Subnormale; und es finden folgende Eigenschaften statt, nämlich:



$\angle FPT = \angle FTP = \angle TPD$ .....(10)
$\angle KPH = \angle KPF$ .....(11)
$FP = FT$ .....(12)
$GA = AT$ .....(13)
Subtangente $GT = 2AG$ .....(14)
Subnormale $GK = 2AF = \frac{1}{2}$ Parameter, eine constante Größe .....(15)

5. Es ist ferner in nebenstehender Figur CP eine Tangente der Parabel im Puncte C, und IK, OM, PL, rc. parallel mit der Axe AD.



Dann ist: $IE : EK = CK : KL$ (16) und eine ähnliche Eigenschaft findet statt, CL mag senkrecht oder nicht auf TD seyn.

Die äußern Theile der Parallelen IE, TA, ON, PL, u. s. w. sind immer den Quadraten der von ihnen abgeschnittenen Theile der Tangente proportional; das ist:

Die äußern Theile: IE, TA, ON, PL,
sind proportional den CI^2, CT^2, CO^2, CP^2, } ....(17)
oder den Quadraten CK^2, CD^2, CM^2, CL^2, }

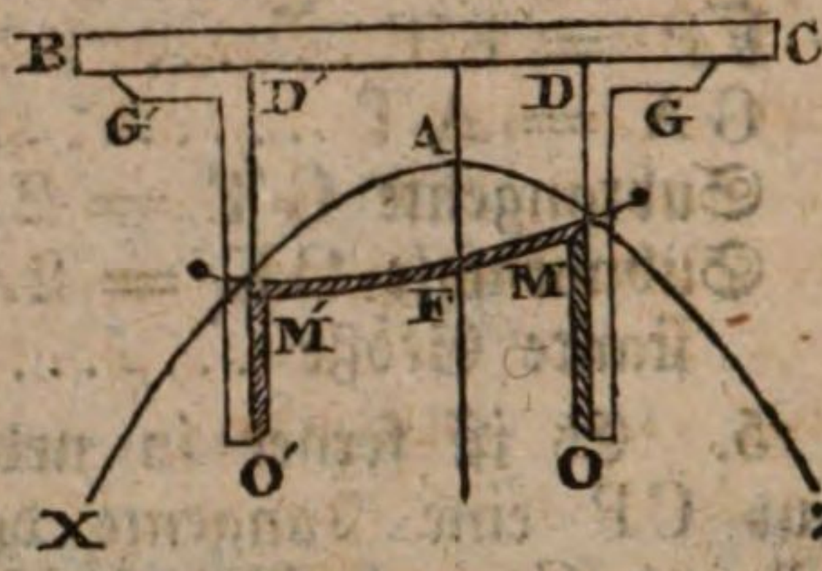
Und da diese Eigenschaft jeder Lage der Tangente eigen ist, so werden die nach den Puncten I, T, O der Tangente gezogenen Linien IE, TA, ON, u. s. w. die beweglich und so lang gedacht werden mögen, daß ihre Endpuncte E, A, N, u. s. w. bei jeder andern Lage der Tangente in der krummen Linie der Parabel liegen, indem man die Tangente um den Punct C dreht, immer eine Parabel beschreiben.

Dieselben Eigenschaften, die von der Axe, ihren Abscissen und Ordinaten u. s. w. gezeigt worden sind, gelten auch von den Abscissen, Ordinaten, u. s. w. jedes andern Durchmessers.

6. Aufgabe. Eine Parabel zu construiren.

Man zeichne ein gleichschenkliches Dreieck ABD, dessen Grundlinie AB dieselbe, als die Grundlinie der vorgelegten Parabel, und dessen Höhe CD doppelt so groß ist, als die Höhe CV der Parabel. Jede Seite AD, DB, theile man in 10, 12, 16, oder 20 gleiche Theile (16 ist eine bequeme Zahl, da man darauf durch fortgesetzte Halbirung kommt), und zähle so 1, 2, 3, u. s. w. von A bis D, und 1, 2, 3, u. s. w. von D bis B. Hierauf ziehe man gerade Linien 1, 1; 2, 2; 3, 3; 4, 4; u. s. w., und ihr gegenseitiger Durchschnitt wird sich ausnehmend der Curve der Parabel AVB annähern.

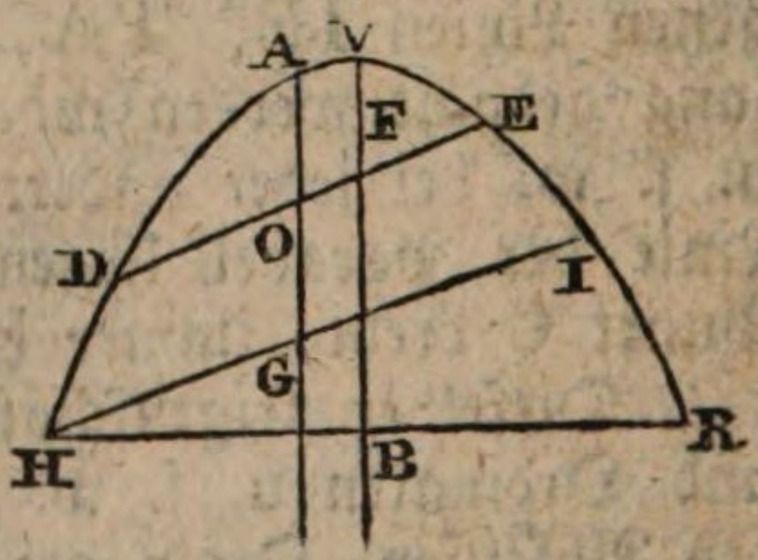
Anders; durch stetige Bewegung. — Das Lineal oder die Leitlinie BC werde mit dem Winkelmaße GDO auf eine Ebene gelegt, so daß eins seiner Seiten längs der Schärfe dieses Lineals liegt; wenn nun von dem Faden FMO, in der Länge gleich DO, der andern Seite des Winkelmaßes, ein Ende an dem Ende des Winkelmaßes in O, und das andre Ende in einem Puncte F befestigt ist, und es gleitet die Seite DG des Winkelmaßes längs dem Lineale BC hin, und man hält vermittels eines Stiftes M den Faden beständig gespannt, und mit seinem Theile MO dicht an die Seite des Winkelmaßes DO an, so wird die Curve AMZ, die der Stift durch diese Bewegung beschreibt, ein Theil einer Parabel seyn.



Wird das Lineal umgedreht, und auf der andern Seite des festen Punctes F bewegt, so wird der andre Theil eben derselben Parabel AMX beschrieben werden.

Aufgabe 7. In einer Parabel ist eine gerade Linie gegeben; den entsprechenden Durchmesser, ferner die Axe, den Parameter und Brennpunct zu finden.

Man ziehe HI zu der gegebenen Linie DE parallel, halbire DE, HI in O und G, und ziehe dadurch AOG als den Durchmesser.



Man ziehe HR senkrecht auf AG, halbire diese Linie in B, und ziehe VB parallel zu AG, so wird dies die Axe seyn.

Der Parameter der Axe ergiebt sich aus der Proportion: VB : HB = HB : Param.

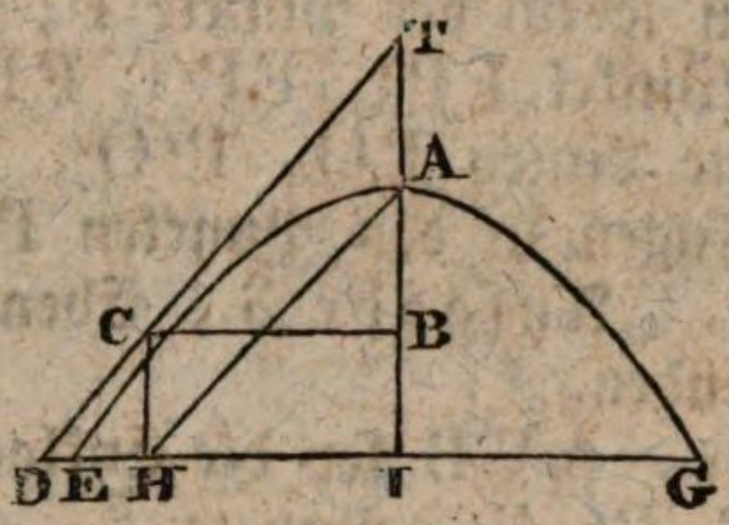
Dann giebt $\frac{1}{4}$ Parameter, von V nach F getragen, den Brennpunct.

Aufgabe 8. Eine Tangente an die Parabel zu ziehen.

Ist der Berührungspunct C gegeben, so ziehe man die Ordinate CB, und verlängere die Axe, bis AT = AB wird, hierauf verbinde man T und C, so wird TC die Tangente seyn.

Oder wenn der Punct in der verlängerten Axe gegeben ist, so mache man AB = AT, und ziehe die Ordinate BC, welche den Berührungspunct C geben wird; hierauf ziehe man TC wie vorher.

Ist D ein andrer Punct, weder in der Curve noch in der verlängerten Axe, durch den aber die Tangente gehen soll, so ziehe man DEG senkrecht auf die Axe, nehme DH als mittlere Proportionale zwischen DE und DG, und ziehe HC parallel der Axe, so wird C der Berührungspunct seyn, welcher nebst dem Puncte D die Lage der Tangente DCT bestimmt.

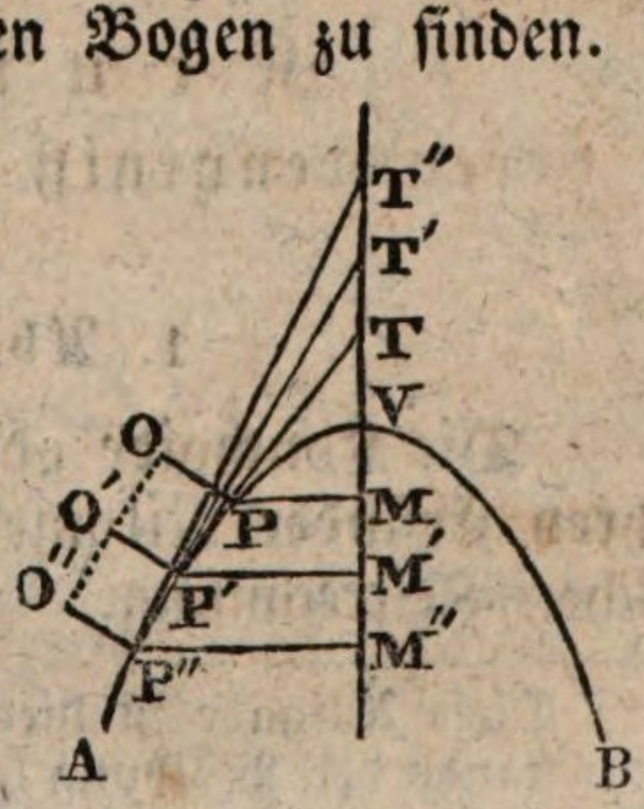


Soll die Tangente einen gegebenen Winkel mit der Ordinate im Berührungspuncte machen, so nehme man die Abscisse AI gleich dem halben Parameter, oder gleich dem doppelten Abstande des Brennpuncts vom Scheitel, und ziehe die Ordinate IE; ferner ziehe man AH, so daß diese Linie mit HI den Winkel AHI, gleich dem gegebenen Winkel, macht; zieht man dann HC parallel zur Axe, so wird diese Linie die Curve im Puncte C, dem Berührungspuncte, schneiden, durch den eine Linie, so gezogen, daß sie mit CB den gegebenen Winkel macht, die verlangte Tangente seyn wird.

4. Abschnitt. Allgemeine Anwendung auf Architectur.

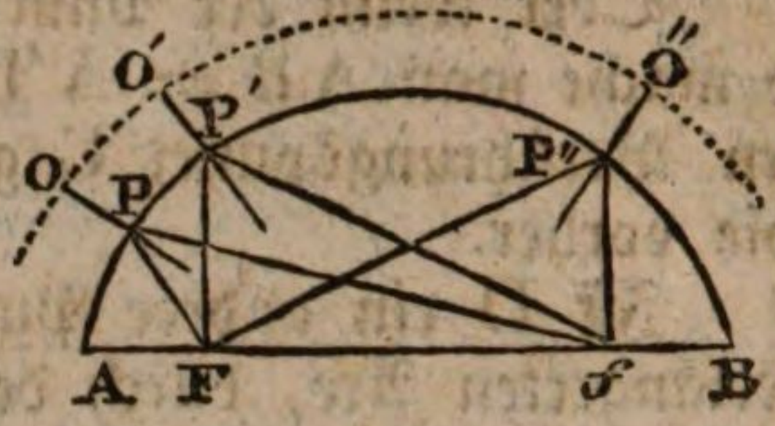
Aufgabe 1. Durch Construction die Lage der Fugen bei den Wölbesteinen von einem parabolischen Bogen zu finden.

Bei der Wölbung werden die Wölbesteine so geschnitten, daß ihre Fugen auf dem Bogen oder seiner Tangente in den Puncten, nach denen sie herabgehen, senkrecht sind. Wenn daher AVB die gegebene Parabel ist, P, P′, P″, u. s. w., die Puncte, in denen die Lagen der Fugen bestimmt werden sollen, so ziehe man die Ordinaten PM, P′M′, P″M″, nehme auf der Verlängerung der Axe



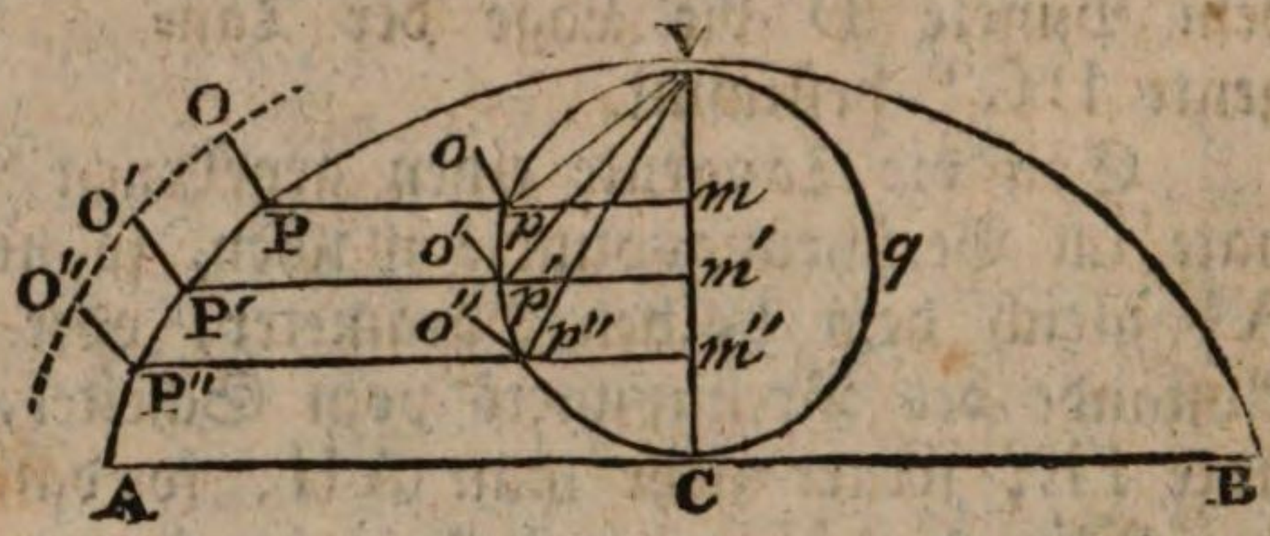
V T = V M, V T′ = V M′, V T″ = V M″, ꝛc. verbinde TP, T′P′, T″P″, u. s. w., und wenn man senkrecht darauf die Linien PO, P′O′, P″O″, u. s. w. zieht, so werden diese die Lagen der verlangten Fugen bestimmen.

Aufgabe 2. Ebendasselbe für einen elliptischen Bogen zu finden.



AB sey die Weite des Bogens, und APP′P″B der Bogen selbst, dessen Brennpuncte F und f sind. Man ziehe diese Linien FP und fP von den Brennpuncten zu jedem der Puncte P; halbire die Winkel FPf, FP′f, FP″f, durch die Linien PO, P′O′, P″O″, so werden sie die Lagen der Fugen in den Puncten P, P′, P″, darstellen.

Aufgabe 3. Ebendasselbe für einen Cykloiden-Bogen zu finden. *)



AVB sey die Cykloide, CpVq ihr erzeugender Kreis, und P, P′, P″, Puncte, in welche Fugen kommen sollen. Man ziehe die Ordinaten Pm, P′m′, P″m″, welche alle der Grundlinie AB der Cykloide parallel sind, und den Kreis in den Puncten p, p′, p″, schneiden. Man verbinde ferner Vp, Vp′, Vp″, und ziehe senkrecht darauf die Linien po, p′o′, p″o″, und jeder derselben parallel PO, P′O′, P″O″, so werden sie die Lagen der Fugen in den verschiedenen bestimmten Puncten bezeichnen.

VI. Kapitel.

Krumme Linien,

deren Kenntniß von Architekten und Ingenieurs verlangt wird.

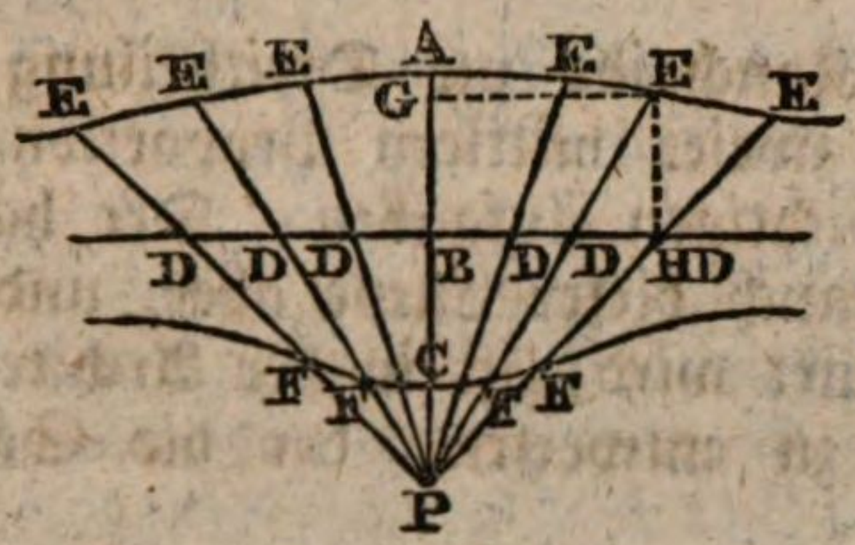
1. Abschnitt. Die Konchoide.

Die Konchoide oder Muschellinie erhielt diesen Namen durch ihren Erfinder Nikomedes, ungefähr 200 Jahre vor der christlichen Zeitrechnung.

---

*) Diese Aufgabe ist hier aufgenommen worden, da sie zu dem Gegenstande der Wölbung gehört, ob sie gleich von einer Eigenschaft der

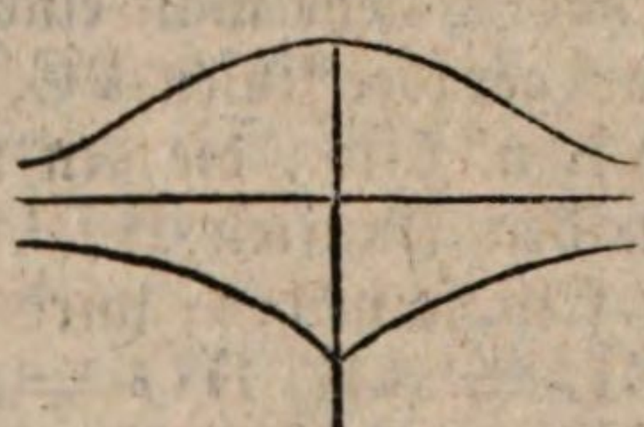
Ihre Construction ist folgende: AP und BD seyen zwei Linien, die sich unter rechten Winkeln schneiden; von P aus ziehe man eine Anzahl andrer Linien PFDE u. s. w., auf denen man immer DE = DF = AB oder BC nehme, dann wird die durch alle Puncte E gezogene krumme Linie, die erste Konchoide oder die des Nikomedes seyn, und die durch alle anderen Puncte F gezogene Curve heißt die zweite Konchoide; obgleich beide in der That nur Theile einer und derselben Curve sind, die einen gemeinschaftlichen Pol P und vier unendliche Aeste haben, deren gemeinschaftliche Asymptote die Linie DBD ist.



Der Erfinder Nikomedes erdachte auch ein Instrument, seine Konchoide durch eine mechanische Bewegung zu beschreiben. In dem Lineale DD ist nämlich eine Rinne geschnitten, so daß ein feiner Stift, der auf dem beweglichen Lineale CA im Punete D befestigt ist, frei darin gleiten kann; in dem beweglichen Lineale AP ist ein anderer Stift in P befestigt, so daß sich darin das Lineal AP bewegt. Wenn nun das Lineal AP sich so bewegt, daß der Stift D längs der Rinne DD gleitet, so wird der Punct A die erste Konchoide beschreiben.

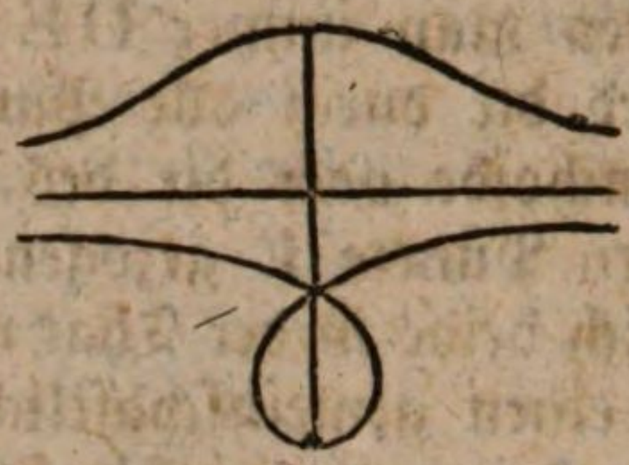
Konchoiden aller Art können auch sehr leicht, mit dem jetzt wohl bekannten Apparate für Curven von Herrn Jopling, construirt werden.

Es sey $AB = BC = DE$, $DF = a$; $PB = b$; $BG = EH = x$; und $GE = BH = y$; so wird die Gleichung der ersten Konchoide seyn: $x^2 (b + x)^2 + x^2 y^2 = a^2 (b + x)^2$ oder $x^4 + 2bx^3 + b^2 x^2 + x^2 y^2 = a^2 b^2 + 2a^2 bx + a^2 x^2$, und indem man nur das Zeichen von x verändert, indem es in der andern Curve negativ ist, so wird die Gleichung der zweiten Konchoide seyn: $x^2 (b - x)^2 + x^2 y^2 = a^2 (b - x)^2$, oder $x^4 - 2bx^3 + b^2 x^2 + x^2 y^2 = a^2 b^2 - 2a^2 bx + a^2 x^2$.



Cykloide, die sogleich behandelt werden wird, abhängt, nämlich daß die Tangente an einem Puncte P eines Cykloiden-Bogens der entsprechenden Sehne des erzeugenden Kreises parallel ist.

Von der ganzen Konchoide, die durch diese beiden Gleichungen, oder vielmehr durch eine mit verschiedenen Zeichen, ausgedrückt wird, giebt es drei Arten oder Classen; erstlich, wenn BC kleiner als BP ist, so wird die Konchoide wie oben die zweite Figur seyn; zweitens, wenn BC gleich BP ist, so ist die Konchoide die in Figur 3; und drittens, wenn BC größer ist, als BP, so wird die Konchoide die vierte oder letzte Figur seyn.



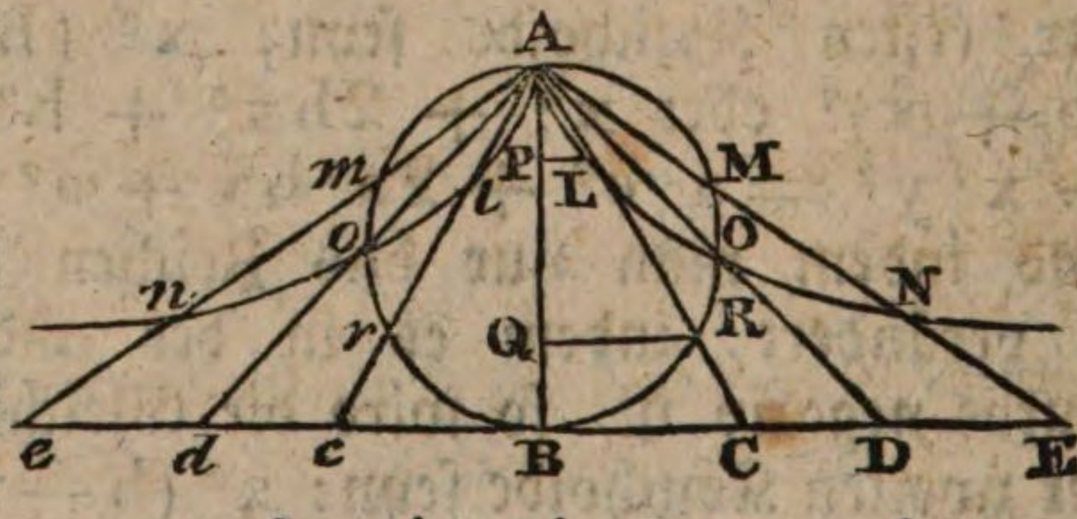
Neuton bedient sich der Konchoide zur Dreitheilung der Winkel, oder zur Auffindung zweier mittlern Proportionalen, oder zur Construction anderer wichtigen Aufgaben. Der hauptsächliche, jetzt gewöhnliche Gebrauch dieser Curve aber, und des Apparats, mit dem sie construirt wird, ist in der Architektur, den Umriß des Durchschnitts zu entwerfen, der die Säulen verkleinert darstellen soll.

Der feste Punct P heißt der Pol der Konchoide; DDDD die Directrix; sie ist zugleich der obern und untern Konchoide eine Asymptote. In der letzten Figur hat die untere Konchoide einen Knoten.

2. Abschnitt. Die Cissoide.

Die Cissoide ist eine Curve, die ein alter griechischer Geometer Diokles fand, indem er zwei mittlere Proportionalen zwischen zwei gegebenen Linien suchte. Diese Curve läßte eine bequeme mechanische Construction zu, und wird durch den Apparat des Herrn Jopling sehr schön beschrieben.

An dem Ende B des Durchmessers AB eines gegebenen Kreises AOBO errichte man die unbestimmt lange Senkrechte eBE, und von dem andern Ende A ziehe man eine Anzahl gerader Linien AC, AD, AE u. s. w., die den Kreis in den Puncten R, O, M u. s. w. schneiden; wird dann CL = AR, DO = AO, EN = AM u. s. w. genommen, so wird die Curve, die durch die Puncte A, L, O, N geht, die Cissoide seyn.



1. Hier wird der Kreis AOBO der erzeugende Kreis genannt; AB heißt die Axe der Curven ALON und Alon u. s. w., welche in einer Spitze in A zusammentreffen, durch die Halbirungspuncte Oo der Halbkreise gehen, und beständig

gegen die Leitlinie eBE, die ihre gemeinschaftliche Asymtote ist, gerichtet sind.

2. Sind AO und Ao Quadranten, so geht die Curve durch o und O, oder halbirt jeden Halbkreis.

3. Fällt man Senkrechten LP, RQ, von entsprechenden Puncten L, R, so ist AP = BQ, und AL = CR.

4. AP : PB = PL² : AP²; so daß, wenn der Durchmesser AB des Kreises = a, die Abscisse AP = x, die Ordinate PL = y ist, folgende Proportion stattfindet: x : a — x = y² : x², oder x³ = (a — x) y², welches die Gleichung der Curve ist.

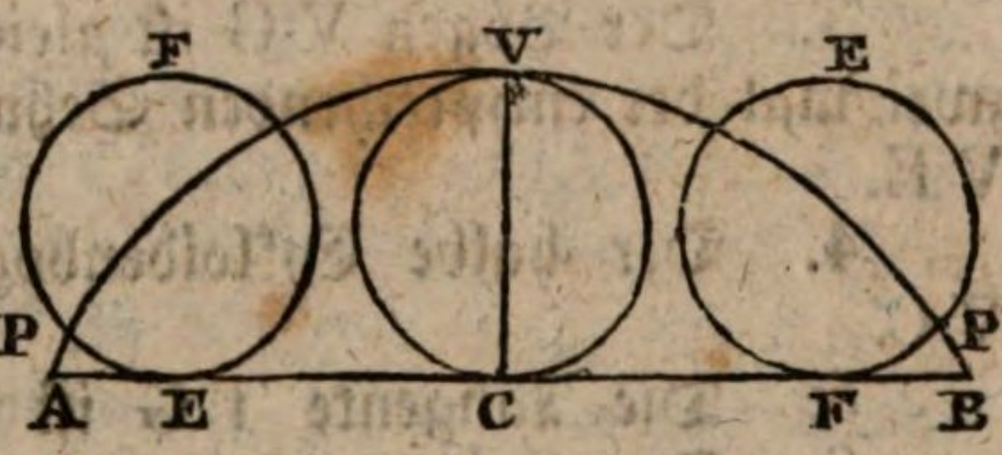
5. Die gerade Linie eBE ist eine Asymptote der Curve.

6. Bogen AM des Kreises ist gleich Bogen BR, und Bogen Am = Br.

7. Der ganze unendlich lange Cissoiden-Raum, der zwischen der Asymptote eBE und den Curven NOLA u. s. w. ALon u. s. w. enthalten ist, ist gleich drei mal der Fläche des erzeugenden Kreises AOBo.

3. Abschnitt. Die Cykloide.

Die Cykloide oder Radlinie (Trochoide) ist eine interessante Curve, zuerst durch Descartes bekannt, von der Mersenne im Jahre 1615 einige Nachricht gab. Es ist dies nämlich eine Curve, die durch einen Nagel auf dem Rande eines Wagenrades, während es auf einer platten Horizontalebene eine Umwälzung macht, beschrieben wird.

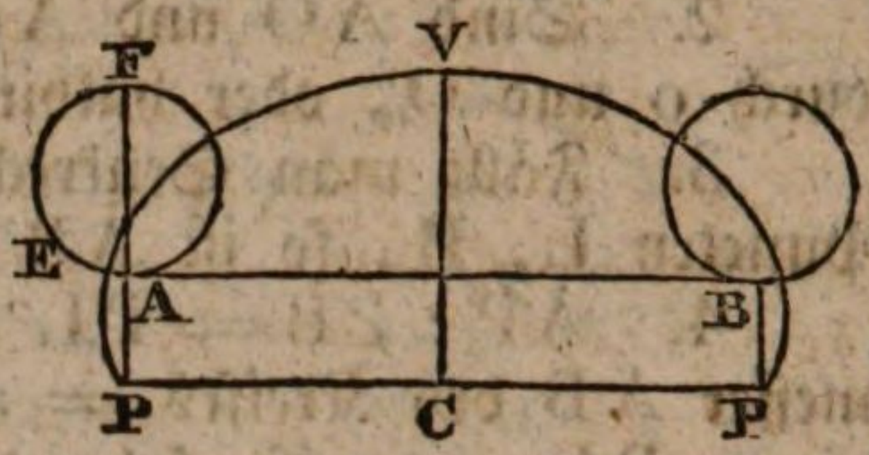


1. Wenn ein Kreis sich immer auf einer und derselben Horizontalebene längs der geraden Linie AB bewegt, bis ein fester Punct P in seinem Umkreise, der zuerst die Linie in A berührte, sie nach einer vollen Umwälzung in B wieder berührt, so heißt die Curve, die durch die Bewegung des Punctes P beschrieben wird, eine Cykloide.

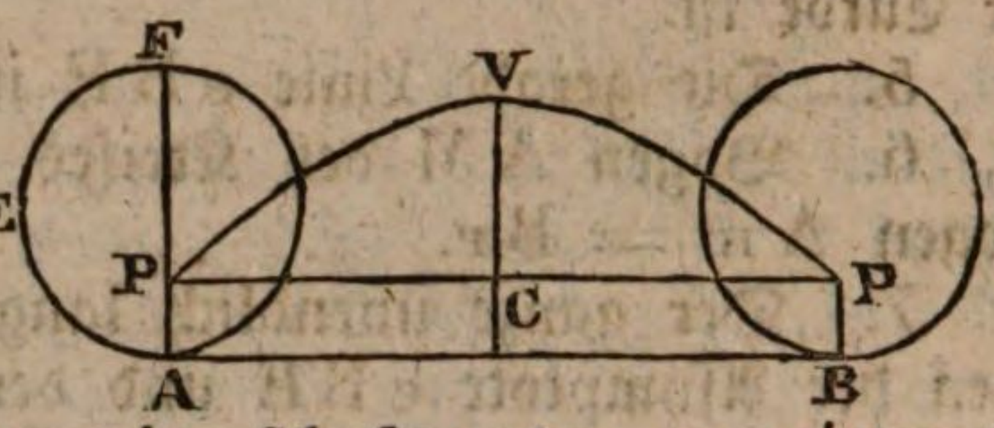
2. Der Kreis EPF heißt der erzeugende Kreis; und die gerade Linie AB, auf welcher er gewälzt wird, ist die Grundlinie der Cykloide.

Ferner die gerade Linie oder der Durchmesser CV des Kreises, welcher die Grundlinie unter rechten Winkeln halbirt, heißt die Axe der Cykloide, und der Punct V, wo er die Curve trifft, ist der Scheitel der Cykloide.

3 Wenn P ein Punct in dem verlängerten festen Durchmesser AF ist, und man den Kreis AEF längs der Linie AB, wie vorher, rollt, so daß der Punct A, welcher sie erst an dem einen Ende berührte, sie wiederum in B berührt, so heißt die Curve, die der Punct P beschreibt, die verkürzte oder verschlungene Cykloide.



4. Ist aber der Punct P irgendwo in dem nicht verlängerten Durchmesser AP, und der Kreis rollt längs AB von A nach B, so heißt die Curve in diesem Falle die verlängerte oder gestreckte Cykloide.

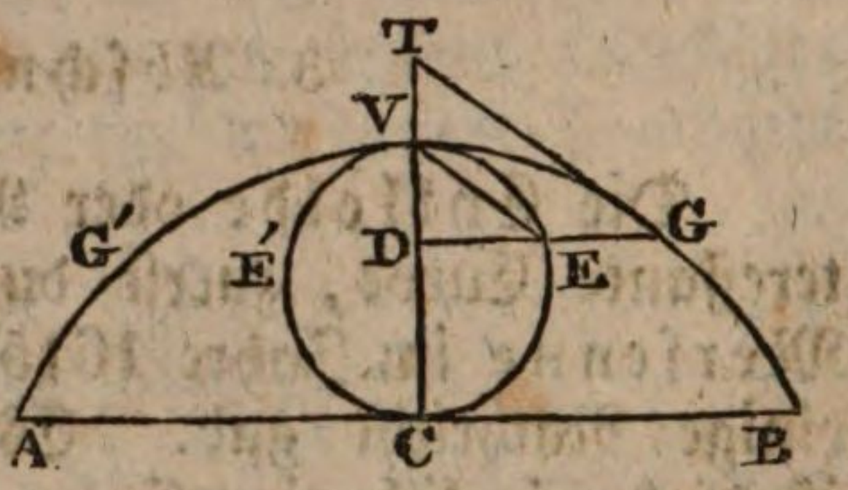


Folgende sind die Haupteigenschaften der gemeinen Cykloide.

1. Der Kreisbogen VE ist gleich der Linie EG, zwischen dem Kreise und der Cykloide, parallel zu AB.

2. Der Halbkreis VEC ist gleich der halben Grundlinie CB.

3. Der Bogen VG ist gleich zwei mal der entsprechenden Sehne VE.



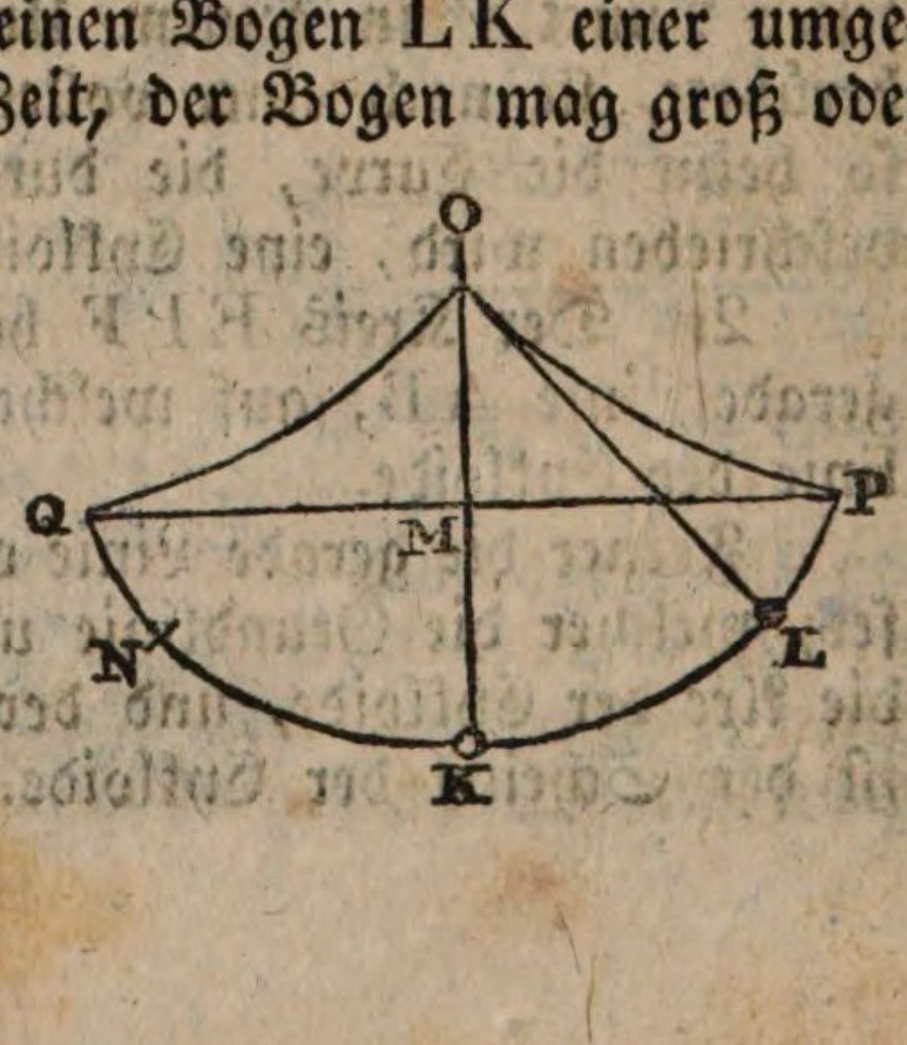
4. Der halbe Cykloidenbogen VGB = 2 Durchmesser VC.

5. Die Tangente TG ist der Sehne VE parallel.

6. Der Krümmungshalbmesser in V = 2CV.

7. Die Fläche der Cykloide AVBCA ist gleich dem dreifachen Kreise CEV; folglich sind dieser Kreis und die Flächenräume VECBG, VE'CAG' einander gleich.

8. Ein Körper fällt durch einen Bogen LK einer umgekehrten Cykloide in derselben Zeit, der Bogen mag groß oder klein seyn; nämlich von einem Puncte L zu dem tiefsten K, welcher der umgekehrte Scheitel ist; und diese Zeit verhält sich zur Zeit des senkrechten Falles durch die Axe MK, wie der halbe Umkreis sich zum Durchmesser, oder wie sich 3,141592 zu 2 verhält. Hieraus folgt, daß, wenn ein



Pendel in einem Cykloiden-Bogen LKN Schwingungen macht, so werden alle Schwingungen in derselben Zeit vollzogen werden.

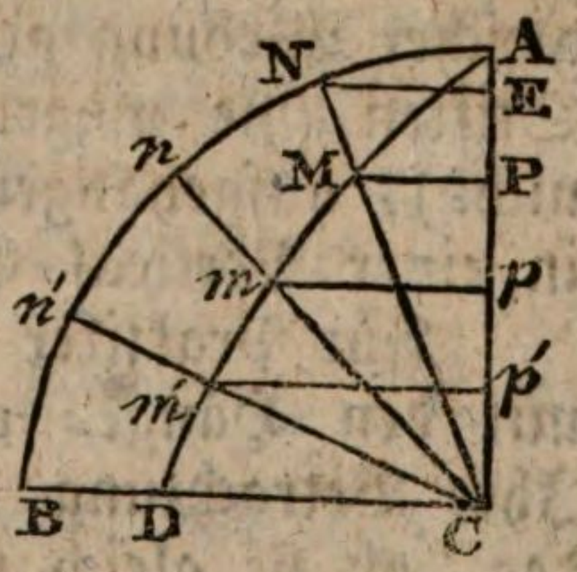
9. Die Evolute einer Cykloide ist eine andere gleiche Cykloide, so daß, wenn zwei gleiche halbe Cykloiden OP, OQ, im Puncte O so verbunden sind, daß OM = MK dem Durchmesser des erzeugenden Kreises ist, und die Pendelstange, deren Länge = OK oder gleich der Curve OP, im Puncte O hängt, die Linse des Pendels, wenn man es los läßt, nachdem man es nach der Curve OP, der es gleich ist, gebogen hat, die andere Cykloide PKQ beschreiben und in ihr schwingen wird; es ist daselbst auch OP = QK und OQ = PK.

10. Die Cykloide ist die Curve des schnellsten Falles; oder ein schwerer Körper wird von einem gegebenen Puncte zu einem andern auf einem Cykloiden-Bogen, der durch diese beiden Puncte geht, in weniger Zeit fallen, als auf einem andern Wege. Daher ist diese Curve sowohl wissenschaftlichen Männern als praktischen Mechanikern interessant.

4. Abschnitt. Die Quadratrix.

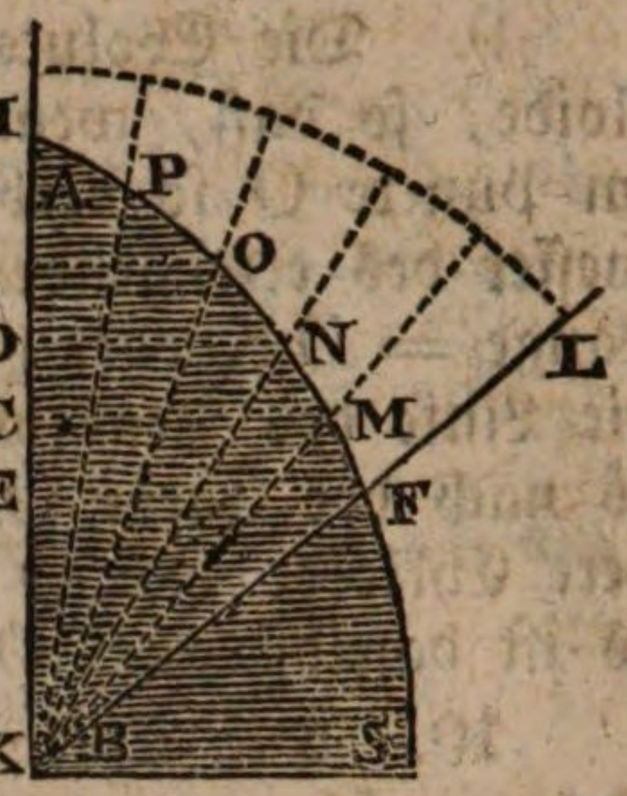
Die Quadratrix ist eine Art von Curven, die durch die Quadratur des Kreises und anderer Curven mechanisch bestimmt wurde. Für die Quadratur des Kreises wurden von Dinostrates und Tschirnhausen, und für die Quadratur der Hyperbel von Perks Curven dieser Art gefunden. Wir wollen hier nur die Quadratrix von Tschirnhausen beschreiben, und dies in der Absicht, um ihre Brauchbarkeit bei der Theilung eines Bogens oder Winkels zu zeigen.

Um diese Quadratrix zu construiren, theile man den Quadrantenbogen AB in eine Anzahl gleicher Theile AN, Nn, nn', n'B, und den Halbmesser AC in dieselbe Anzahl gleicher Theile AP, Pp, pp', p'C. Hierauf ziehe man die Halbmesser CN, Cn u. s. w. nach den Theilungspuncten auf dem Bogen, und ziehe die Linien PM, pm u. s. w. senkrecht auf AC durch die Theilungspuncte dieser Linie, so daß sie die Halbmesser wechselsweise in M, m, m' treffen. Die krumme Linie AMmm'D, die durch durch die Durchschnittspuncte M, m u. s. w. geht, ist die Quadratrix des Tschirnhausen.



Die so construirte Figur ACDm'mMA kann in einer dünnen Platte Messing, Horn, oder Pappe ausgeschnitten, und bei der Theilung eines Kreisbogens angewendet werden.

Es sey nämlich der Bogen IL oder der Winkel IKL in fünf gleiche Theile zu theilen. Man lege die Seite AB der Quadratrix auf IK, so daß der Punct B an dem Winkel K zu liegen kommt, ziehe eine Linie längs der Curve AS, die KL in F schneidet, entferne das Instrument, und fälle von F die Senkrechte FE auf IK. Hierauf theile man nach einer Aufgabe der praktischen Geometrie EI in fünf gleiche Theile, und ziehe durch die Theilungspuncte die zu EF parallelen Linien CM, DN u. s. w. Endlich ziehe man von ihren Durchschnittspuncten M, N, O, P, aus die Linien KM, KN, KO, KP, so werden sie den Winkel IKL in fünf gleiche Theile theilen, wie verlangt wurde.



Anmerkung 1. Wenn anstatt den Bogen in gleiche Theile zu theilen, er in eine gewisse Anzahl von Theilen getheilt werden sollte, die ein gegebenes Verhältniß unter einander haben, so würde es nur nöthig seyn, EI in Theile zu theilen, die das gegebene Verhältniß haben, im Uebrigen verfahre man wie oben.

Anmerkung 2. Wenn der Bogen oder Winkel, welcher getheilt werden soll, 90° übertrifft, so halbire man ihn, theile diesen halbirten Bogen oder Winkel in die gegebene Anzahl von Theilen, und nehme zwei von ihnen für einen der gesuchten Theile des ganzen Bogens.

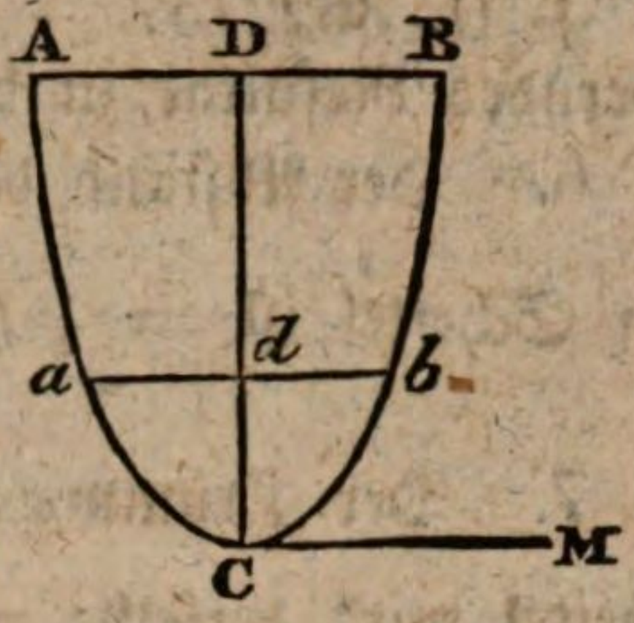
5. Abschnitt. Die Kettenlinie nebst ihrer Anwendung.

Die Kettenlinie ist eine mechanische Curve, die von einer Kette oder einem Seile von gleichartigen Bestandtheilen und gleicher Webung gebildet wird, wenn sie an zwei Puncten oder Stiften (sie mögen nun in einer Horizontalebene seyn, oder nicht), aufgehangen und sich selbst überlassen werden, um sich in einer Vertical-Ebene in Gleichgewicht zu setzen.

Für Praktiker ist diese Curve wegen ihres Zusammenhangs mit den Hänge- oder Ketten-Brücken von großem Interesse. Ihre Betrachtung kann daher nicht schicklich übergangen werden, ob sie gleich mechanische Sätze in sich schließt, welche sogleich angezeigt werden sollen.

A, B seyen die beiden Aufhängepuncte eines solchen Seiles, AaCbB das Seil selbst, das übrigens in einer verticalen Lage hängt; dann werden die beiden gleichen und symmetrischen Theile AaC, CbC, welche alle zwei in jedem Theil-

chen der Schwerkraft ausgesetzt sind, einander in C genau das Gleichgewicht halten; und würde die eine Hälfte, zum Beispiel CbB hinweggenommen, so würde die andere Hälfte AaC, wenn man es nicht verhinderte, sich in die verticale Lage unter dem Punct A setzen. Es werde dies durch eine Kraft verhindert, die horizontal in C wirkt, und dem Gewichte eines Theiles des Seiles oder der Kette, so lang als CM, gleich ist; dann ist CM das Maß der Spannung am Scheitel der Curve; auch wird diese Linie als Parameter der Kettenlinie betrachtet. Es mag nun der Theil AaC in A, oder ein kürzerer Theil aC in a aufgehängt seyn, die Spannung ist offenbar dieselbe; denn im letztern Falle leistet der Widerstand des Stiftes in a dasselbe, als die Spannung der Linie in a, wenn das ganze Seil AaC in A aufgehängt ist. *)



Die Linie CM, die die Spannung im Scheitel mißt, sey $= p$, $Cd = x$, $ad = db = y$, $Ca = Cb = z$, $CD = h$, $AB = d$, $CaA = CbB = \frac{1}{2}l$, dann ist:

1. $y = p \times \text{log. nat.} \frac{p + x + \sqrt{2px + x^2}}{p} =$

$p \times \text{log. nat.} \frac{p + x + z}{p} = p \times \text{log. nat.} \frac{z + p}{z - p} =$

$p \,.\, M \,.\, \text{log. tang.} (45^\circ + \frac{1}{2}S)$.

2. Wenn der Aufhängewinkel S, zwischen der Tangente der Curve in A oder B und dem Horizonte, $= 45^\circ$ ist, so wird sich verhalten $d : l = 1 : 1{,}1346$.

3. Ist $l = 2d$, so wird h seyn $= 0{,}7966\,d$ und $S = 77^\circ\ 3'$.

4. Ist der Aufhängewinkel $S = 56^\circ\ 28'$, dann verhalten sich p, x, y und z beziehungsweise wie 1; 0,81; 1,1995 und 1,5089. In diesem Falle hat t, die Spannung im Aufhängepuncte, in Rücksicht auf y seinen kleinsten Werth.

5. Allgemein ist $\frac{d}{l} = -\text{tang. S} \,.\, M \,.\, \text{log. tang.} \frac{1}{2}S$, wo $M = 2{,}3025851$, der Napier'sche Logarithmus von 10.

---

*) Dieß kann durch Versuche leicht bestätigt werden, indem man das Seil frei über einer Rolle in C aufhängt, und den daselbst aufgehängten Theil verlängert oder verkürzt, bis er in seiner gehörigen Lage AaC befaßt; dann ist der so hängende Theil unter der Rolle in der Länge gleich CM.

Oder $\log. \frac{d}{l} = \log. \text{tang. } S + \log. (\log. \text{cot. } \frac{1}{2} S - 10) + 0,3622157 - 10$. Diese letzte Formel dient ein annäherndes Resultat zu berechnen.

6. Der Abstand des Schwerpuncts der ganzen Curve $2z$ vom Scheitel ist $= \frac{1}{2} (x + \frac{py}{z} - p.)$

7. Der Krümmungshalbmesser $\frac{(p + x)^2}{p} = \frac{t^2}{p}$, am Scheitel wird derselbe $= p$.

8. Wenn S und p gegeben sind, so ist:

$z = p \text{ tang. } S$ . . . . $t = p \text{ sec. } S.$

$$x = p \,.\, (\text{sec. } S - 1) = \frac{p \,.\, \text{sin. vers. } S.}{\text{cos. } S.}$$

und $y = p \,.\, M \,.\, \log. \text{tang. } (45^\circ + \frac{1}{2} S)$.

9. Wenn S und z, oder $\frac{1}{2}$ l, gegeben sind, so ist:

$p = z \,.\, \text{cot. } S$ . . . . $t = z \,.\, \text{cosec. } S.$

$x = z \,.\, \text{cosec. } S \,.\, \text{sin. vers. } S.$

$y = M \,.\, z \,.\, \text{cot. } S \,.\, \log. \text{tang. } (45^\circ + \frac{1}{2} S)$.

10. Wenn S und y gegeben sind, so ist:

$$p = \frac{y}{M \,.\, \log. \text{tang. } (45^\circ + \frac{1}{2} S).}$$

$$t = \frac{y}{M \,.\, \cos \,.\, S. \log. \text{tang. } (45^\circ + \frac{1}{2} S.)}$$

$$z = \frac{y \,.\, \text{tang. } S.}{M \,.\, \log. \text{tang. } (45^\circ + \frac{1}{2} S).}$$

$$x = \frac{y \,.\, \text{sin. vers. } S.}{M \,.\, \cos. S \,.\, \log. \text{tang. } (45^\circ + \frac{1}{2} S).}$$

11. Ist x und y gegeben, so ist:

$$\frac{\log. \text{tang. } (45^\circ + \frac{1}{2} S)}{\text{sec. } S \,.\, \text{sin. vers. } S} = \frac{y}{Mx};$$

woraus S annäherungsweise gefunden werden kann; auch ist

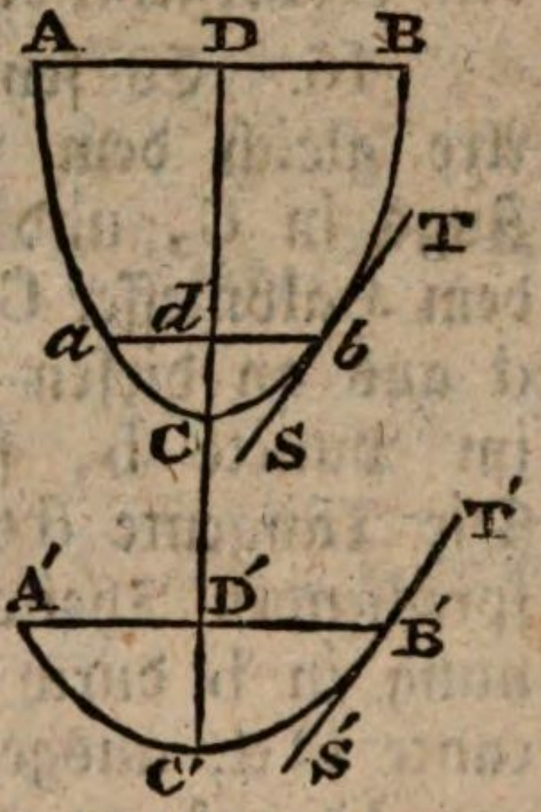
$$p = \frac{x}{\text{sec. } S - 1} \ldots . t = \frac{x}{\text{sin. vers. } S} \ldots . z = \frac{x \sin. S.}{\text{sin. vers. } S.}$$

wo überall t sich auf die Länge der Kette oder des Seiles, woraus die Kettenlinie gebildet ist, bezieht.

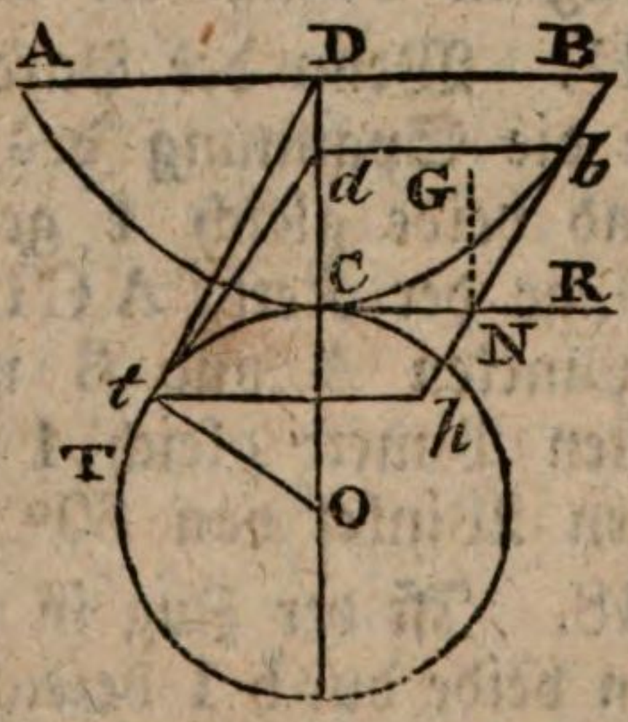
12. Die Kettenlinie mechanisch zu ziehen. — Wenn der Abstand AB zwischen den Aufhängepuncten, und die Tiefe DC des niedrigsten Punctes gegeben sind (vergl. die vorher-

gehende Figur), so hänge man ein Ende einer feinen gleichartigen Kette oder eines Seiles in einem der Puncte A auf, und indem man die Kette oder das Seil, wie ein Blumengehänge in einer verticalen Ebene, seine Lage nehmen läßt, verlängere oder verkürze man es, nahe am andern Ende über einem Stifte in B, bis es, wenn es zu Ende ist, eben den Punct C erreicht, dann wird das Seil eine Kettenlinie bilden; und ein Bleistift, der von A durch a, C, b bis zu B geht, wird auf einem verticalen Brette, das damit in Berührung gebracht wird, die Curve bezeichnen.

13. Alle Kettenlinien, die in ihren Aufhängepuncten mit ihren Ordinaten gleiche Winkel machen, sind ähnlich, und in ihnen stehen x und y in einem beständigen Verhältnisse; und wenn in zwei Kettenlinien, welche nicht gleiche Winkel bilden, x und y in verschiedenen Verhältnissen stehen, so kann ein Theil aus der einen Curve geschnitten werden, der der andern ähnlich ist. So seyen ACB und A′C′B′ die beiden Curven, von der A′C′B′ flacher ist. Man lege sie auf eine Axe DCC′, und ziehe im Puncte B′, dem Aufhängepuncte der tieferen Curve die Tangente T′S′, und ihr parallel ziehe man eine andere Linie TS, die die andere Curve in b berührt. Durch b ziehe man ba parallel zu B′A′, so wird der Theil aCb der obern Kettenlinie der untern A′C′B′ ähnlich seyn.



14. In Rücksicht auf den praktischen Gebrauch der Kettenlinie können wir nun die geometrische und mechanische Betrachtung ihrer Eigenschaften vereinigen. Nimmt man einen Theil Cb der Kettenlinie, von dem niedrigsten Puncte C an, so kann ihre Schwere als durch die nach der Richtung der Tangenten CN, bN wirkenden Spannungen unterstützt, betrachtet werden. Den Zug in C und b kann man, als vom Durchschnittspuncte N ausgehend, annehmen; über dem man sich daher, in der verticalen Richtung NG, die Schwere des Theiles Cb in seinem Schwerpuncte G wirkend vorstellen kann. Daher hat man folgende Proportionen:



Zug in C : Schwere von Cb = sin. GNb : sin. bNC
= cos. bNR : sin. bNR
= rad. : tang. bNR
= rad. : tang. dbN.

Da nun die horizontale Spannung in C constant ist, so muß die Schwere, und folglich auch die Länge eines Theiles cb der einförmigen Kette der Tangente der Neigung der Kettenlinie gegen den Horizont an dem Ende b des gesagten Theiles proportional seyn. Dies kann als eine Haupteigenschaft der Kettenlinie betrachtet werden.

15. Eben so hat man:

Horizontaler Zug in C : schiefem Zug in b = sin. bNG : sin. CNG
= cos. bNR : rad.
= rad. : sec. bNR

Daher ist der in der Richtung der Tangente in einem Puncte b ausgeübte Zug der Secante der Neigung in diesem Puncte proportional. Diese Eigenschaften stimmen offenbar mit den vorhergehenden Gleichungen überein.

16. Es sey ferner CO, in der niederwärts verlängerten Axe gleich dem Parameter oder dem Maße des horizontalen Zugs in C, und um O, als Mittelpunct, beschreibe man mit dem Halbmesser CO einen Kreis, so wird eine Tangente dt, von d aus an diesen Kreis gezogen, der Tangente bNh der Curve im Puncte b, für den db die Ordinate ist, parallel seyn. Die Tangente dt (des Kreises) wird an Länge auch dem entsprechenden Theile bc der Curve gleich seyn, weil die Spannung in b durch die Länge einer Kette, so lang als die Secante Od, ausgedrückt werden kann. Ferner, wenn DT eine von D aus an den Kreis gezogene Tangente ist, so wird sie an Länge gleich Bbc, und der Tangente der Kettenlinie in B parallel seyn, da die Secante OD die schiefe Spannung in B mißt, die offenbar die beständige horizontale Spannung oder den Zug in C, um die Abscisse CD übertrifft.

17. Wenn der Parameter der Kettenlinie, oder die Linie, welche die Spannung des untersten Punctes mißt, gleich DC ist, und beide gleich 1 gesetzt werden, so ist AB = 2,6339, die Länge der Kette ACB = 3,4641; der Zug in den Aufhängepuncten A und B wird = 2 seyn, indem derselbe im untersten Puncte gleich 1 ist; die Kette wird dannn in A und B einen Winkel von 60° mit dem Horizonte machen.

18. Ist der Zug in C dem Gewicht der Kette gleich, und werden beide durch 1 bezeichnet; so ist AB = 0,96242, DC = 0,1180340, die Spannung in A oder B = 1,118, der Aufhängewinkel in diesen Puncten nahe an 26° 34′; die Breite der Curve ist 8,1536 . DC und die Länge 8,4719 . DC.

19. Wenn der Zug oder die Spanung im untersten Puncte doppelt so groß ist, als die Schwere der Kette, und der Parameter gleich 1 gesetzt wird, so wird AB = 0,49493, CD

= 0,03078, der Aufhängewinkel ungefähr 14° 2′, die Breite 16,0816 . DC und die Länge der Kette 16,2462 . DC seyn.

Die Größe der Linien, Winkel und Kräfte in manchen andern Fällen, kann man aus der nachfolgenden Tafel sehen. Die ganze Theorie kann durch Versuche vermittels Schnellwagen mit Federkräften, die an eine Kette, von gegebener Länge und Schwere und in verschiedenen Lagen, angelegt werden, nach der Methode, die weiter unten bei dem Parallelogramm der der Kräfte in der Mechanik angeführt wird, dargethan werden.

20. Nimmt man AB = d, CD = h, Länge ACB = l, den Zug in C oder den Parameter = p, so ist in allen Fällen, wo CD in Vergleichung mit der Länge des Seiles sehr klein ist, wie Professor Leslie zeigt. *)

$$p = \frac{d^2}{8h} + \frac{1}{6}h \ldots \text{Zug in A oder B} = \frac{d^2}{8h} + \frac{7}{6}h$$

$$\text{oder } p = \frac{l^2}{8h} - \frac{1}{2}h \ldots \text{Zug in A oder B} = \frac{l^2}{8h} + \frac{1}{2}h$$

$$l = d + \frac{8h^2}{3d}$$

In diesem Falle sind auch die Kräfte in C und A oder B beinahe im umgekehrten Verhältnisse von CD.

---

*) Elements of Natural Philosophy, p. 63.

Verhältnißtafel der Kettenlinien, den Parameter = 1 gesetzt.

Aufhängewinkel	DC	DB	CB	Spannung in A oder B	DB : DC
1° 0′	0,00015	0,01745	0,01745	1,0001	114,586
2 0	0,00061	0,03491	0,03492	1,0006	57,279
3 0	0,00137	0,05238	0,05241	1,0014	38,171
4 0	0,00244	0,06987	0,06993	1,0024	28,613
5 0	0,00382	0,08738	0,08749	1,0038	22,874
6 0	0,00551	0,10491	0,10510	1,0055	19,046
7 0	0,00751	0,12248	0,12278	1,0075	16,309
8 0	0,00983	0,14008	0,14054	1,0098	14,254
9 0	0,01247	0,15773	0,15838	1,0125	12,654
10 0	0,01543	0,17542	0,17633	1,0154	11,372
11 0	0,01872	0,19318	0,19438	1,0187	10,820
12 0	0,02234	0,21099	0,21256	1,0223	9,444
13 0	0,02630	0,22887	0,23087	1,0263	8,701
14 0	0,03061	0,24681	0,24933	1,0306	8,062
15 0	0,03528	0,26484	0,26795	1,0353	7,508
16 0	0,04030	0,28296	0,28675	1,0403	7,021
17 0	0,04569	0,30116	0,30573	1,0457	6,591
18 0	0,05146	0,31946	0,32492	1,0515	6,208
19 0	0,05762	0,33786	0,34433	1,0576	5,863
20 0	0,06418	0,35637	0,36397	1,0642	5,553
21 0	0,07114	0,37502	0,38386	1,0711	5,271
22 0	0,07853	0,39376	0,40403	1,0786	5,014
23 0	0,08636	0,41267	0,42447	1,0864	4,778
24 0	0,09484	0,43169	0,44523	1,0946	4,562
25 0	0,10338	0,45087	0,46631	1,1034	4,361
26 0	0,11260	0,47021	0,48773	1,1126	4,176
28 0	0,13257	0,50940	0,53171	1,1326	3,843
30 0	0,15470	0,54930	0,57735	1,1547	3,551
32 4	0,18004	0,5912	0,62649	1,1800	3,284
34 16	0,21003	0,6371	0,68130	1,2100	3,034
36 52	0,24995	0,6932	0,74991	1,2499	2,773
39 11	0,29011	0,7443	0,81510	1,2901	2,567
41 44	0,34004	0,8029	0,89201	1,3400	2,362
44 0	0,39016	0,8566	0,96569	1,3902	2,196
46 1	0,43999	0,9066	1,0361	1,4400	2,060
48 11	0,49981	0,9623	1,1178	1,4998	1,925
50 8	0,56005	1,0142	1,1974	1,5800	1,811
52 9	0,62973	1,0706	1,2869	1,6297	1,699
54 13	0,71021	1,1304	1,3874	1,7102	1,592
56 28	0,81021	1,1995	1,5089	1,8102	1,481
58 3	0,88972	1,2510	1,6034	1,8897	1,416
60 0	1,0000	1,3169	1,7321	2,0000	1,317
64 6	1,2894	1,4702	2,0594	2,2894	1,140
67 28	1,6095	1,6135	2,4102	2,6095	1,002
67 32	1,6168	1,6164	2,4182	2,6168	0,9998

21. Die vorliegende Tafel ist ein Auszug aus einer sehr großen von Ware in seinen „Abhandlungen über Brückenbogen" gegebnen Tafel. Zwei Beispiele werden dazu dienen, ihren Gebrauch zu erläutern.

Beispiel 1. Es sey die Breite einer vorgelegten Hängebrücke 560 Fuß, und die Vertiefung (Depression) in der Mitte $25\frac{7}{8}$ Fuß; wie groß ist die Länge der Kette, der Aufhängewinkel an den Enden, und das Verhältniß des horizontalen Drucks an dem tiefsten Puncte und der schiefen Druckkräfte an den Aufhängepunkten zu der ganzen Last der Kette?

Hier verhält sich: DB : DC = 280 : 25,875 = 10,82, eine Zahl, die in der Tafel gefunden werden kann.

Dieser Zahl gegenüber findet man 11° für den Aufhängewinkel, DB = 0,19318, CB = 0,19438; Spannung in A und B = 1,0187, indem die unveränderliche Spannung an dem Scheitel 1 ist. (Figur Seite 173.)

Folglich 0,19318 : 0,19438 = 560 : 563,48, der Länge der Kette.

Ferner, horizontaler Druck in C 1,0000
giebt schiefen Druck in A oder B . . . 1,0187
ganze Last der Kette . . . . . 0,39876.

Beispiel 2. Während die Breite noch 560 bleibt, wachse die Vertiefung bis auf 51.

Hier verhält sich DB : DC = 280 : 51 = 5,49. Diese Zahl findet sich nicht genau in der Tafel. Am nächsteu kommt 5,553 in der letzten Colonne, die zu einem Aufhängewinkel von 20° gehört.

Nun ist 5,55 — 5,49 = 0,06, und 5,55 — 5,27 = 0,28, also die erste Differenz beinahe $\frac{1}{5}$ der letztern. Fügt man daher zu jeder Zahl in der Reihe, die zu 20° gehört, $\frac{1}{5}$ der Differenz zwischen dieser und der entsprechenden Zahl in der nächsten Linie hinzu, so erhält man:

Aufhängewinkel = 20° 12′, DC = 0,06556,
DB = 0,36010, CD = 0,36797, Spannung in A = 1,10656.

Daher verhält sich: 0,36010 : 0,36797 = 560 : 572,24, der Länge der Kette.

Ferner, horizontaler Druck in C 1,0000
giebt schiefen Druck in A oder B . . . 1,10656
ganze Schwere der Kette . . . . 0,73594.

Vergleicht man dies mit dem vorigen Falle, so sieht man, daß die Spannungen in C und A, in Rücksicht auf die Last der Kette, beinahe in dem umgekehrten Verhältnisse der beiden Werthe von DC vermindert werden, was auf diese Art die Bemerkung in Artikel 20 bestätigt.

In praktischen Fällen wird es in Bezug auf Hängebrükken leicht seyn, wenn die Schwere des Materials und seine Cohärenzkraft bekannt sind, die relative Festigkeit einer vorgelegten Fügung zu finden.

VII. Kapitel.

Die isometrische Perspective des Professor Farish.

In den Vorlesungen, die ich an der Universität Cambridge halte, zeige ich Modelle von fast allen wichtigeren Maschinen vor, welche in den Manufacturen Britanniens gebräuchlich sind. *)

Ihre Anzahl ist so groß, daß, wären sie jede einzeln und vollständig und nach einem solchen verjüngten Maaßstabe, wie er erforderlich ist, um sie wirken zu lassen und sie meinen Zuhörern zu erklären, verfertigt, ich schwerlich für diese Gegenstände ein besonderes Magazin gefunden hätte, was groß genug gewesen wäre, sie aufzunehmen. Ich verschaffte mir daher einen Apparat, der eine Sammlung des Besten von den Elementen der Maschinen, nämlich alle die gesonderten Theile enthielt, aus denen Maschinen bestehen. Diese sind vorzüglich von Metall und so stark gearbeitet, daß sie hinreichen, selbst schwere Arbeiten zu verrichten, und so an einander gepaßt, daß sie nach Gefallen in jede Gestalt zusammengesetzt werden können, welche die besondere Gelegenheit erfordert.

Diese Theile sind verschieden; dergleichen sind: einzelne metallene Räder, deren Zähne alle in einander passen; Axen von verschiedener Länge, an deren einem Theile das verlangte Rad befestigt werden kann; Stangen, Klammern und Gestelle, und was außerdem noch nöthig seyn kann, die besondern Maschinen aufzubauen, die in einer Vorlesung gebraucht werden. Diese Modelle können aus einander genommen, und die Theile in einer andern Gestalt bei der Vorlesung des folgenden Tags wieder aufgebaut werden. Da diese, auf diese Art für einzelne Zwecke zusammengesetzten Maschinen immer wieder aus einander genommen werden, so war es nöthig, sie genau auf dem Papiere darzustellen, damit meine Gehülfen sie leicht auch ohne meine beständige Aufsicht zusammenlegen lernten. Dies kann

---

*) Wie wenige unserer deutschen Universitäten sind mit solchen nützlichen Modellsammlungen versehen! (D.)

leicht geschehen, indem man drei orthographische Pläne von jedem giebt; einen in horizontaler Ebene, und zwei in verticalen Ebenen, die senkrecht auf einander sind. Aber so eine Methode würde, ob sie gleich einigermaßen unter Künstlern in Gebrauch ist, mit großen Hindernissen verbunden seyn. Für ein unerfahrnes Auge ist sie unverständlich, und selbst einem Künstler zeigt sie nur sehr unvollkommen das Wesentlichste, das ist, die Verbindung der einzelnen Theile der Maschine unter einander an, obgleich sie den Vortheil hat, die Linien den Ebenen, auf denen die orthographischen Projectionen nach einem gewissen Maßstabe genommen sind, parallel darzustellen.

Dies begreift man leicht, wenn man einen Würfel als den Gegenstand annimmt, der dargestellt werden soll. Die Grundebene würde ein Quadrat seyn, das sowohl die obere als untere Fläche darstellt; und zwei an einander liegende Seitenflächen würden auf zwei verticalen Ebenen ebenfalls Quadrate seyn, die den andern beiden Seitenflächen des Würfels parallel wären. Der Künstler hätte sich also drei Quadrate bestimmt, und er muß nun noch ausfindig machen, wie sie nach der Bedingung, daß sie zwei Seiten- und eine Grundfläche bilden sollen, in die Gestalt eines Würfels zusammen zu fügen wären. Da also diese Methode bei einem so wesentlichen Puncte so wenig leistet, so hielt ich sie für ungenügend.

Eine Zeichnung nach den Regeln der gewöhnlichen Perspective aufzunehmen, war der nächste Ausweg, der sich darbot. Dies kann auf die Darstellung eines Modells angewendet werden, wenn man von dem Gegenstande eine Art Prospect in Vogelperspective aufnimmt und die Ebene des Gemäldes nicht, wie es bei der Zeichnung am gewöhnlichsten ist, als auf dem Horizonte, sondern als auf einer Linie senkrecht betrachtet, die von dem Auge nach einem hauptsächlichen Theile des Gegenstandes gezogen wird. Nimmt man z. B. die Zeichnung eines Würfels auf, so kann das Auge sich in einem entfernten Puncte auf der Linie befindend gedacht werden, die durch die Verlängerung der Diagonale des Würfels erhalten wird. Aber dieser gewöhnlichen Perspective stehen große Hindernisse entgegen. Die Linien, welche an dem Würfel selbst alle gleich sind, werden in der Darstellung ungleich, so daß die Zeichnung keinen Maaßstab gewährt. Auch würde die Berechnung der Verhältnisse nach der Zeichnung ausnehmend schwierig, ja für manchen nützlichen Zweck unausführbar seyn; eine gleiche Schwierigkeit ist ferner die Berechnung der Winkel, welche die rechten Winkel des Würfels darstellen. Die Darstellung scheint durchaus nicht genau, obgleich das Auge der Person, die darauf sieht, genau auf den richtigen Gesichtspunct gestellt ist. Es ist wahr,

daß, wenn wir immer solche perspectivische Zeichnungen betrachten, wir uns daran gewöhnen, die augenscheinlichen Fehler, welche daraus entspringen, daß das Auge sich außer dem wahren Gesichtspuncte befindet, zu verbessern, oder vielmehr zu übersehen, und daß wir daher die Unrichtigkeit nicht so lebhaft fühlen, als es geschehen würde, wenn wir nicht daran gewöhnt wären.

Die Art der Perspective, die der Gegenstand dieser Blätter ist, fand ich zur Darstellung von Maschinen weit geeigneter, obgleich sie einigermaaßen der letzterwähnten Unvollkommenheit unterworfen ist, so lange das Auge nicht damit vertraut wird. Ich bestimmte mich daher, sie zu gebrauchen, ihre Grundregeln auszuforschen und zu überlegen, wie sie am passendsten in Anwendung gebracht werden könnte.

Sie hat in mancher Beziehung vor der gewöhnlichen Perspective Vorzüge; denn sie ist in ihren Grundregeln weit leichter und einfacher. Auch ist sie, vermittels eines Reißbrettes *)

---

*) Es ist nicht sowohl nöthig, das Reißbrett näher zu beschreiben, als vielmehr zu bemerken, daß seine Bestimmung ist, das Papier festzuhalten, auf dem die Zeichnung gemacht werden soll.

Hier muß sich an der einen Seite des Reißbrettes (s. Fig. 1. Tafel I.) ein Lineal von der Gestalt des Buchstabens T hin und her schieben lassen. Das Lineal muß durch kleine Leisten an der untern Seite verhindert werden, mit dem Papiere in unmittelbare Berührung zu kommen, damit es die frisch gezogenen Linien, wenn es sich über ihnen hinbewegt, nicht verlöschen kann. Ein zweites Lineal muß sich, vermittels einer nahe an dem einen Ende an seiner untern Seite eingeschnittenen Fuge, auf dem ersten verschieben lassen. Die Fuge muß weiter, als die Breite des ersten Lineals und so eingeschnitten seyn, daß das zweite nach Gefallen in jede der beiden Lagen, wie sie die erste Figur der Tafel darstellt, gebracht werden kann, so daß es in jeder Lage mit dem ersten Lineale einen Winkel von 60° bildet. Die Fuge muß also die Beschaffenheit haben, daß, wenn ihre Seitenwände a und d mit den Kanten des ersten Lineals in Berührung sind und sich an dieselben andrücken, die Kante des zweiten Lineals mit de, der Seite eines gleichseitigen Dreiecks, das über dg, einem Theile der Kante des ersten Lineals, beschrieben ist, zusammenfällt; und wenn die Seitenwände b und c sich an den Kanten des ersten Lineals andrücken, die Kante des zweiten längs ge der andern Seite des gleichseitigen Dreiecks liegt. Das zweite Lineal muß in k aus eben dem Grunde, aus welchem die Leisten am ersten Lineale angebracht wurden, einen kleinen Fuß haben, und beider Kanten müssen in Zolle und Zehntel oder Achtelzolle getheilt seyn.

Es ist passend, wenn das zweite Lineal noch eine andere Fuge rs hat, die so gestellet ist, daß, wenn die Seitenwände r und s mit den Kanten des ersten Lineals in Berührung sind, das zweite Lineal darauf senkrecht steht. Um Kreise in ihren eigenthümlichen Lagen darzustellen, bediente sich der Verfasser des innern Randes von Patronen aus Kartenblättern, in Form isometrischer Ellipsen geschnitten,

und zweier Lineale in ihrer Anwendung unvergleichlich leichter, und folglich genauer, so daß es nicht schwer ist, von einem Gegenstande, auf den diese Perspective angewendet wird, und zu dem der Künstler Zutritt hat, eine beinahe vollkommen richtige Darstellung zu geben, wenn der letztere nur einigermaaßen die Grundlehren dieser Perspective kennt und ein wenig Uebung besitzt.

Sie stellt ferner die geraden Linien, welche in den drei Hauptlagen liegen, alle nach einem und demselben Maßstabe dar. Die von solchen Linien eingeschlossenen Winkel werden immer entweder durch Winkel von 60° oder des Supplements von 60 Grad dargestellt. Und ob dies gleich als ein Vorwurf erscheinen mag, so wird es dies doch bei dem ersten Anblicke einer nach diesen Grundsätzen entworfenen Zeichnung für niemand seyn, der jemals ein Gemälde batrachtet hat. Denn man kann bei dem Anblicke nicht einen Augenblick zweifeln, daß der dargestellte Winkel ein rechter sey.

Auch können wir ferner bemerken, daß unter allen ein Winkel von 60 Grad am leichtesten gezeichnet werden kann. Hat man einen Cirkel und versteht den ersten Satz des Euklid, so kann man ihn leicht finden. Auch ist die Darstellung der Kreise und Räder, und der Art, wie sie in einander eingreifen, sehr einfach und einleuchtend. Die Grundlehren dieser Perspective, die ich von dem besondern Umstande, daß sie die Linien in den drei Hauptdimensionen nach einem und demselben Maßstabe darstellt, „isometrische“ nenne, wird man aus folgendem Beispiele einsehen.

Man denke sich einen Würfel als darzustellenden Gegenstand. Das Auge wird in die verlängernde Diagonale des Würfels versetzt. Das Papier, auf dem die Zeichnung so gemacht werden soll, daß sie auf dieser Diagonale senkrecht ist, sey zwischen dem Auge und dem Gegenstande in einer gehörigen

---

wie Figur 5 es zeigt; hiervon hatte er eine Folge von verschiedener Größe, die seinen Rädern entsprechen. So eine Reihe kann vermittels der concentrischen Ellipsen in Fig. 5. geschnitten werden, aber vielleicht ist es leichter, sich diese Folge concentrischer Ellipsen in der Figur so zu bedienen, daß man sie, wenn das Papier so dünn ist, daß die Linien durchgezeichnet werden können, an die gehörige Stelle unter das Papier legt, und nun mit ihrer Hülfe eine von den Darstellungen der verschiedenen concentrischen Kreise auf einmal durchzuzeichnen. Es ist schwierig, diese Ellipsen mit gehöriger Genauigkeit zu zeichnen, so daß sie sich gehörig entsprechen. Zu diesem Endzwecke muß man eine besondere Zeichnung von Figur 5 haben, und eine Kante des Papieres muß auf dem Reißbrette unbefestigt bleiben, so, daß man nicht verhindert ist, die concentrischen Ellipsen an die gehörige Stelle zu schieben, wie es Seite 185 beschrieben wird.

Entfernung von jedem nach dem Verhältnisse des Maßstabes, den man zum Grunde legt, den Abstand des Auges und folglich des Papiers denke man sich unendlich groß, so daß in Beziehung darauf die Größe des Gegenstandes unbeträchtlich ist.

Es ist offenbar, daß alle Linien, welche von Puncten des Gegenstandes nach dem Auge gezogen werden, als auf der Zeichnung senkrecht betrachtet werden können, was daher eine Art orthographischer Projection wird; auch leuchtet es ein, daß die Projection zum Umriß ein gleichwinkliges und gleichseitiges Sechseck mit zwei verticalen Seiten hat. Die andern drei Linien werden Halbmesser seyn, die von dem Mittelpuncte nach dem zu unterst liegenden Winkel und den beiden entgegengesetzten Winkeln gezogen sind, und alle diese Linien und Seiten werden einander, sowohl in dem Gegenstande, als in der Darstellung, gleich seyn, und wenn irgend andere Linien in dem Gegenstande einem der drei Halbmesser parallel seyn und in der Zeichnung dargestellt werden sollten, so werden ihre Darstellungen zu einander und zu den übrigen Seiten des Würfels dasselbe Verhältniß haben, welches die dargestellten Linien in dem Gegenstande zu einander haben.

Wenn daher eine von ihnen so genommen worden ist, daß sie ein gegebenes Verhältniß zu der analogen im Gegenstande hat, z. B. 1 zu 8, wie in meinen Darstellungen von meinen Modellen, so werden die übrigen ebenfalls dasselbe Verhältniß zu ihren analogen im Gegenstande haben, das heißt, die den drei Halbmessern parallelen Linien werden auf eine Scale reducirt werden können.

Ich übergehe den Beweis davon und einige andere Gegenstände, theils der Kürze wegen, theils weil ein Geometer keine Schwierigkeit finden wird, sie aus der Natur der orthographischen Projection selbst zu beweisen; wer aber nicht Geometrie verstände, würde kein Interesse dabei haben, einen Beweis zu lesen.

Aus ebendemselben Grunde ist es unnöthig zu zeigen, daß die drei Winkel am Mittelpuncte unter einander gleich sind, und jeder derselben 120°, den doppelten Winkel eines gleichseitigen Dreiecks, enthält; der Winkel aber zwischen einem Halbmesser und einer Seite = 60°, dem Supplement des obigen, und gleich dem Winkel eines gleichseitigen Dreiecks ist. Alles dies folgt unmittelbar aus Euklid Buch 4. Satz 15, wo von der Einschreibung eines Rechtecks in einen Kreis die Rede ist.

In Modellen und Maschinen liegt der größte Theil der Linien wirklich in den drei Richtungen, die den Seitenkanten eines Würfels parallel sind. Das Auge des Zeichners muß

in eine unendliche Entfernung, wie vorher gesagt wurde, in eine verlängerte Diagonale des Würfels, verlegt gedacht werden.

Definitionen.

Die zuletzt erwähnte Linie mag die Gesichtslinie genannt werden.

Man nehme einen gewissen Punct, z. B. c, Fig. 2. Tafel I. an und stelle ihn in der Zeichnung dar; er heißt der regulirende Punct. Durch diesen Punct ziehe man auf der Zeichnung eine verticale Linie CE, Fig. 2., und zwei andere CB, CG, die mit einander einen Winkel von 120° einschließen; sie sollen die isometrischen Linien genannt und von einander durch die Namen der verticalen, der rechten und linken Linie unterschieden werden. Die beiden letztern aber mögen mit einem gemeinschaftlichen Namen — horizontale isometrische Linien — benannt werden. Andere, ihnen parallele Linien sollen beziehungsweise mit denselben Namen belegt werden. Die Ebne, die durch die rechten und verticalen Linien geht, heiße die rechte isometrische Ebene, und die durch die verticalen und linken Linien geht, die linke Ebene, die aber durch die rechten und linken Linien, die horizontale Ebene.

Vermittels des einfachen Apparats, der oben in der Anmerkung beschrieben worden ist, können die Linien im Gegenstande, wenn nur erst ein Grenzpunct gefunden oder angenommen worden ist, mit äußerster Leichtigkeit auf der Zeichnung dargestellt und nach einem Maßstabe gemessen werden. Die Lage irgend eines Punctes in der Zeichnung kann leicht dadurch gefunden werden, daß man seine drei Abstände mißt, nämlich erstlich seinen Abstand von der regulirenden Horizontal-Ebene (das ist die Horizontalebene, die durch den regulirenden Punct geht); zweitens den senkrechten Abstand des Punctes, wo die Senkrechte die Horizontalebene trifft, von der reguliren-den rechten Linie; und drittens des Punctes, wo diese Senkrechte die rechte Linie trifft, von dem regulirenden Puncte; hierauf nimmt man auf der Zeichnung diese Abstände, auf einen Maaßstab reducirt, erstlich längs der rechten, zweitens längs der linken, drittens längs der verticalen Linie. Diese drei können der rechte Abstand, der linke Abstand und die Höhe des Punctes genannt werden. Auch ist es augenscheinlich, daß sie nicht in dieser Ordnung genommen zu werden brauchen, sondern in irgend einer andern, wenn sie dem Künstler passender zu seyn scheint. Es giebt hier sechs Wege, auf denen die Operation abgeändert werden kann.

Wenn irgend ein Punct in derselben isometrischen Fläche, welche den zu suchenden Punct enthält, in der Zeichnung schon dargestellt ist, so kann dieser Punct als ein neuer regulirender Punct angenommen und der verlangte Punct dadurch gefunden werden, daß man zwei Abstände nimmt; und ist der neue angenommene regulirende Punct in derselben isometrischen Linie mit dem Puncte, so findet man ihn, indem man nur einen Abstand nimmt; und vermittels dieser letzten einfachen Operation wird man in der Praxis alles finden, was zur Bestimmung der meisten verlangten Puncte nöthig seyn wird. Auf diese Art kann ein Parallelepipedum, oder ein Gebäude, oder ein anderer Gegenstand mit Sparren, oder Linien, die in den isometrischen Richtungen liegen, sehr leicht und ganz genau nach einem verlangten Maßstabe dargestellt werden. Ist es aber nöthig, Linien in andern Richtungen darzustellen, so kann dies nicht nach demselben Maßstabe geschehen, sondern, wenn es gerade Linien sind, dadurch, daß man die Endpuncte, wie oben, sucht und den einen mit dem andern durch eine gerade verbindet, oder in der Praxis bisweilen leichter vermittels einer Ellipse, wie weiter unten beschrieben werden wird.

Soll aber eine krumme Linie gefunden werden, so können mehrere Puncte gefunden werden, welche hinreichend sind, den Künstler bis auf den Grad von Genauigkeit zu bringen, welcher erfordert wird.

Die Methode, Maschinen oder Gegenstände darzustellen, deren Umriß, wie es gewöhnlich der Fall ist, in den isometrischen Richtungen, das heißt den Richtungen der drei Axen des Würfels, parallel liegen, ist schon gezeigt worden; eben so die Art und Weise, gerade Linien dadurch darzustellen, daß man ihre Endpuncte, oder krumme Linien dadurch, daß man eine Anzahl von Puncten aufsucht.

Bei Darstellung von Maschinen und Modellen sollen aber nicht nur isometrische Linien, sondern auch in einander greifende Räder dargestellt werden. Diese liegen größtentheils in den isometrischen Ebenen. Und glücklicher Weise ist die Zeichnung eines Kreises in einer dieser Ebenen immer eine Ellipse von derselben Gestalt, die Ebene mag horizontal, rechts oder links seyn; sie können jedoch leicht durch die Lage von einander unterschieden werden, in der sie auf ihre Axe gelegt sind, welche eine, immer mit der kleinen Axe der Ellipse zusammenfallende, isometrische Linie ist.

Dies wird sogleich einleuchten, wenn man die Zeichnung eines Würfels betrachtet, wo in jeder Ebene ein Kreis eingeschrieben ist (Fig. 3.), und diese Kreise als Räder einer Axe ansieht. Die zwei andern Linien (oder Speichen des Rades)

in der Ellipse, welche beziehungsweise durch die entgegengesetzten Berührungspuncte des Kreises mit der umschriebenen Figur gezogen sind, sind ebenfalls isometrische Linien; denn die Berührungspuncte halbiren die Seiten des umschriebenen Parallelogramms, und die Linien sind daher den andern Seiten parallel. Eben so geben sie den wahren, auf den verlangten Maßstab reducirten Durchmesser. Aus der Natur der orthographischen Projection ergiebt sich ferner, daß die große Axe der Ellipse sich zu der kleinen verhält wie die längere Diagonale des umschriebenen Parallelogramms zu der kürzern, das heißt (da die kürzere Diagonale das Parallelogramm in zwei gleichseitige Dreiecke theilt) wie die Quadratwurzel aus drei zu eins, wie es sich aus dem 47sten Satze des ersten Buchs des Euklid ergiebt; und da die Summe der Quadrate der conjugirten Durchmesser in einer Ellipse immer dieselbe ist, so erhält man, wenn man $\sqrt{1}$ für die kleine Axe, $\sqrt{3}$ für die große und i für den isometrischen Durchmesser setzt, $2\,i^2 = 1 + 3 = 4$ und $i = \sqrt{2}$.

Daher können die kleine Axe, der isometrische Durchmesser und die große Axe durch $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$, oder annäherungsweise durch 1, 1,4142, 1,7321, oder noch einfacher, obgleich nicht so nahe durch 28, 40, 49, ausgedrückt werden.

Diese Linien können geometrisch durch folgende Construction dargestellt werden:

AB (Fig. 4.) sey = BD, und der Winkel bei B ein rechter. Auf der verlängerten BA nehme man Ba = AD, ziehe aD, und verlängere dies sowohl, als aB, dann werden sich BD, Ba und aD beziehungsweise wie $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, nach Euklid I. 47. zu einander verhalten. Wird daher aB gleich dem isometrischen Durchmesser der verlangten Ellipse genommen, so wird BD, senkrecht darauf gezogen, die kleine und aD die große Axe seyn. Die Ellipse selbst kann daher mit einem elliptischen Cirkel dargestellt werden, da dieses Instrument so eingerichtet werden kann, daß die große und kleine Axe beliebig gewählt werden mögen. Soll ein Rad auf einer Axe dargestellt werden, so muß man dafür Sorge tragen, daß die kleine Axe der Ellipse längs dieser Axe liegt. In Ermangelung des Instruments kann sie nach concentrischen Ellipsen, Fig. 5, gezeichnet werden, welche in der oben beschriebenen Lage unter das Papier gelegt und durchgezeichnet werden; ist das Papier nicht zu dick, so können die kleinern concentrischen Kreise des Rades ebenfalls sogleich mit auf dieselbe Weise durch das Papier gezeichnet werden; oder wenn sie nicht genau von der rechten Gestalt seyn sollten, so wird es passend seyn, sie aus freier Hand zwischen den beiden nächsten concentrischen

Ellipsen zu beschreiben, und so kann auch die Höhe der Zähne eines Rades in den verschiedenen Theilen desselben dargestellt werden. Ihre Breite kann aus der Eintheilung der Ellipse bestimmt werden. In den meisten Fällen kann dies mit hinreichender Genauigkeit durch den Umkreis der Ellipse geschehen, die durch die beiden Axen und die beiden isometrischen Durchmesser in vier gleiche Theile getheilt ist, deren jeder durch die Geschicklichkeit des Künstlers beliebige Unterabtheilungen haben mag; so kann nicht nur die Ansicht des Rades von der vordern Seite dargestellt werden, sondern auch die Theile der hintern Kreise, welche im Gesichte sind, können so weit, als sie sichtbar sind, dadurch verzeichnet werden, daß man das System concentrischer Ellipsen auf der kleinen Axe durch einen Abstand zurückschiebt, der der Breite des Rades entspricht und dann sowohl die äußern als die innern Kreise des Rades und der Axe, auf der es befestigt ist, zeichnet. Auch muß man dafür sorgen, den obersten Theil der Zähne durch isometrische Linien darzustellen, die in einem Rade, das in der Ebene der Zeichnung liegt, der Axe parallel, oder nach einem gewissen Puncte der Axe in einem Rade gerichtet sind, das gegen die Ebene der Zeichnung eine schiefe Lage hat. Fast eben so können die Schaufeln eines Wasserrades correct dargestellt werden. Ist eine Reihe concentrischer Ellipsen, wie sie in Fig. 5. gegeben sind, nicht bei der Hand, so wird es für einen Künstler leicht seyn, in den meisten Fällen die Ellipsen mit hinlänglicher Genauigkeit zu verzeichnen, indem man durch den gehörigen Punct in der Axe die große und kleine Axe und die beiden isometrischen Durchmesser zieht, und auf diese Art acht Puncte auf dem Umkreise bestimmt, durch die man die Ellipse zieht.

Sollte es in dem einen und dem andern Falle nöthig seyn, einen Kreis darzustellen, der nicht in einer isometrischen Ebene liegt, so muß man darauf Acht haben, daß die große Axe, in welcher Ebene sie auch liegen mag, immer dieselbe ist; sie wird nämlich die Darstellung des Diameters seyn, welcher der Durchschnitt des Kreises mit der der Zeichnung parallelen Ebene, die durch seinen Mittelpunct geht, ist. Die große Axe wird zu der kleinen das Verhältniß des Halbmessers zu dem Sinus der Neigung der Gesichtslinie gegen die Ebene des Kreises haben. Wir können ferner bemerken, daß die Durchmesser der Ellipse, welche sich zu der großen Axe wie $\sqrt{2}$ zu $\sqrt{3}$ verhalten, isometrische Linien sind, wenn dergleichen existiren. *)

---

*) Man wird bemerken, daß, wenn ein Kegel beschrieben wird, der seine Spitze in C hat, die in der Gesichtslinie, Fig. 2., liegt und durch die drei Halbmesser CB, CE, CG geht, alle geraden Linien in der

Jede andere Linie, die dem Durchmesser des Kreises gleich und parallel ist, kann dargestellt werden, indem man sie dem entsprechenden Durchmesser in der Ellipse gleich und parallel macht. Sollte dabei verlangt werden, den Umkreis einer Ellipse in Grade, oder in eine Anzahl von Theilen zu theilen, die gegebene Theile des Kreises darstellen, so kann dies durch folgende Methode leicht geschehen:

Man zeichne eine Ellipse, Fig. 6, und beschreibe über der großen Axe A G einen Kreis, dessen Umkreis in Grade oder in Theile nach einem verlangten Verhältnisse, in B, C, D, E, F u. s. w. getheilt ist, und fälle von diesen Puncten Senkrechten auf die große Axe; diese werden den Umkreis der Ellipse in entsprechenden Puncten schneiden. Es würde jedoch auf diesem Wege schwer seyn, mit hinlänglicher Genauigkeit die Grade zu bezeichnen, welche nahe an den Endpuncten der großen Axe liegen. Diesem Fehler kann man jedoch dadurch abhelfen, daß man auf eine ähnliche Art von einem über der kleinen Axe beschriebenen eingetheilten Kreis diese Grade überträgt. Auf diese Art kann eine isometrische Ellipse in ein isometrisches Kreisinstrument oder isometrischen Cirkel umgeändert werden, der auf der Zeichnung die Lagen zeigt, oder Winkel mißt, und zwar auf eben dieselbe Art, als ein wirklicher Cirkel oder ein wirkliches Kreisinstrument es in der Natur thun würde.

Es kann oft nützlich seyn, einen Maßstab zu haben, mit dem man nicht nur in isometrischen, sondern auch in andern Richtungen Abstände messen kann; dies geschieht durch eine Reihe ähnlicher concentrischer Ellipsen, wie in Fig. 7, indem man die isometrischen Durchmesser in gleiche Theile theilt. Die andern Durchmesser werden dann so getheilt, daß sie allen Linien, die ihnen beziehungsweise parallel sind, zu Maßstäben dienen können.

Auf diese Art würden in den isometrischen Quadraten, wie

Oberfläche dieses Kegels durch den Punkt C gehen, und daß eben sowohl alle andern Linien, die einigen derselben parallel sind, isometrisch sind, als die Parallelen der drei ersten isometrischen Linien: G B, C E, C G, und keine andern als diese können nach demselben Maßstabe genommen seyn. Obgleich aber diese die Anzahl der isometrischen Linien unendlich vermehren, so hat dies doch nur wenig praktischen Nutzen, weil man nur bei den Parallelen der drei Hauptlinien leicht bei dem Anblicke erkennen kann, daß sie isometrisch sind.

Ferner eine andere Bemerkung ist, daß, wenn eine Linie durch den Punkt C einer beliebig gegebenen Linie parallel gezogen wird, und diese Linie sich unter demselben Winkel um die Gesichtslinie herum bewegt, so daß die Oberfläche eines Kegels beschrieben wird, alle andern, in irgend einer Lage ihr parallel gezogenen Linien, isometrisch seyn werden, da sie sich auf einander beziehen.

Fig. 2. sie darstellt, Abstände mit der längern Diagonale oder ihren Parallelen gemessen, in den Theilen der großen Axe, als Maße, bestimmt werden, dagegen diejenigen auf der kürzeren Diagonale von den Theilen auf der kleinen Axe abhängen.

Um einen Cylinder zu beschreiben, der in einer isometrischen Richtung liegt, müssen die Kreise an den Enden desselben durch passende isometrische Ellipsen dargestellt, und zwei Linien, welche beide berühren, gezogen werden, und auf ähnliche Art kann ein Kegel, oder ein Stück eines Kegels beschrieben werden. Eine Kugel wird durch einen Kreis dargestellt, dessen Halbmesser die habe große Axe der Ellipse ist, welche einem größten Kreise zugehört.

Es würde nicht schwer seyn, Regeln für die Zeichnung anderer Formen aufzufinden, welche bei zu zeichnenden Gegenständen etwa vorkommen. Aber die oben angeführten Fälle reichen hin, fast alles darzustellen, was bei der Zeichnung von Modellen, Maschinen, physikalischen Instrumenten und sogar fast bei jedem regelmäßigen Kunsterzeugnisse vorkommt.

Gebäude können durch diese Perspective, in Rücksicht auf Maße, eben so richtig dargestellt werden, als durch Grund- nnd Aufrisse, indem man dabei noch den Vortheil der vollen Wirkung der Zeichnung hat.

Eine Brücke oder einen Kreis- oder gothischen Bogen, der aus Theilen von Kreisen besteht, die in isometrischen Ebenen liegen, wird man durch Theile isometrischer Ellipsen, welche man durch die schon angeführten Grundlehren, nach denen Räder an ihren Axen applicirt werden, leicht anpassen und zeichnen kann, darstellen. Man muß die Mittelpuncte dieser Kreise suchen, mit ihnen die Mittelpuncte der Ellipsen zusammenfallen lassen und ihre kleinen Axen längs den Linien legen, die von diesen Mittelpuncten senkrecht auf die Ebenen der Kreise gezogen werden. Der Schaft einer Säule besteht aus einem Stück eines Kegels, mit einem Cylinder in Verbindung gebracht, oder vielleicht aus einem Cylinder allein oder aus einer Anzahl Cylinder. Diese sowohl, als ihre Füße zu verzeichnen, ist schon dargestellt worden. Auch können auf dieselbe Art die Lage und Gestalt der Schnörkel und Verzierungen der obern Theile derselben gefunden werden, indem man Puncte bestimmt, durch die man leicht ihre Gestalt verzeichnen kann. So können die verschiedenen Plätze und Gebäude einer Domkirche, eines Collegiums oder eines Palastes richtig abgezeichnet werden; selbst die Zimmer und innere Bauart können, obgleich weniger in Form eines Gemäldes, so dargestellt werden, daß sie einen Architekten, oder wer sie sonst braucht, in den Stand setzt, ihre Lage, Zierrathen, Geräth oder einen andern Zustand, der sich

auf ihre Ansicht bezieht, zu erwägen und einen aufmerksamen Geschäftsträger selbst in der Ferne auf das Ganze, woran besonders gelegen ist, so genau aufmerksam zu machen, daß er es schwerlich mißverstehen kann.

Bei dieser Art aber, Gebäude als durchsichtig und offen darzustellen, hat man die Gefahr zu fürchten, daß die große Menge von Linien verwirre, eine Schwierigkeit, die bei einem Gebäude mit vielen Zimmern begegnet, und die, um vermieden zu werden, einige Geschicklichkeit erfordert. Besser bedient man sich dieser Methode, um das Innere eines einzelnen Raumes, z. B. einer Domkirche, darzustellen, deren Chorgänge und Abtheilungen keine große Verwirrung verursachen können.

Auf eben dieselbe Art könnte auch ein Plan einer Stadt gegeben werden, der eben so wohl nicht nur ihre Straßen und Plätze (mit Hülfe des oben beschriebenen Maßstabes, Fig. 7), wie ein gewöhnlicher Plan, darstellen könnte, sondern auch eine Zeichnung ihrer Kirchen und öffentlichen Gebäude und selbst ihrer Privathäuser gäbe, wenn es die Absicht des Künstlers wäre, daß sie alle sichtbar würden, wenn man von der erforderlichen Höhe, die diese Perspective voraussetzt, darauf sieht. Solch eine einzelne Zeichnung kann, wenn sie gut ausgeführt ist, einen bessern Begriff einer entfernten Hauptstadt geben, als ein ganzer Band von einer Beschreibung.

In den gegebenen Beispielen ist der größte Theil der Linien isometrisch. Aber auch wo weniger oder gar keine es sind, ist die Kunst anwendbar. Bei manchen derselben kann es nöthig seyn, isometrische Linien oder isometrische Ellipsen zu ziehen, und durch die Bestimmung der Lage gewisser Linien und Puncte den Künstler in den Stand zu setzen, mit Genauigkeit das, was er vor Augen hat, zu zeichnen. Nicht leicht wird sich ein so unregelmäßiger Körper finden, daß der Künstler verhindert würde, aus diesen Methoden der Bestimmung solcher Linien und Puncte in dem Körper, die eine genaue Darstellung desselben unterstützen, Vortheil zu ziehen. Wäre blos die Absicht, eine Zeichnung zu verfertigen, so könnten die Hülfslinien, sobald sie ihren Zweck erfüllt haben, vernichtet, in manchen Fällen auch beibehalten und ihre Längen oder Durchmesser in Figuren verzeichnet werden, wenn man etwa schnell eine Belehrung darüber verlangen sollte. Oft kann, wenn der Künstler sich Materialien verschaffen will, um sich in den Stand zu setzen, in seinen Mußestunden genaue Beschreibungen und Zeichnungen zu geben, die rohste Darstellung solcher Linien vollkommen ihren Zweck erfüllen, vorausgesetzt, daß er sich an den Rand mit Genauigkeit die Maße anmerkt, nach denen die Linien, wenn auch nicht genau, bestimmt

werden sollen. In manchen Fällen kann es nützlich seyn, sich Freiheiten zu erlauben, welche dem Zwecke entsprechen. Dies wird keine Verwirrung verursachen, wenn nur die Freiheiten, die man sich nimmt, angezeigt werden. So kann es z. B. oft vortheilhaft seyn, die Scale in der verticalen Richtung im größern, und zwar bisweilen beträchtlich größern Maßstabe zu nehmen, als in der horizontalen. In manchen Fällen ist es nothwendig, auf dem Papiere darzustellen, was in der Natur verborgen ist. Das über die innere Einrichtung von Gebäuden Gesagte ist hierzu eben sowohl ein Beispiel, als das, was über die Darstellung unterirdischer Gegenstände gesagt werden wird. Wir wollen zu diesen Bemerkungen einige Beispiele geben.

Es würde äußerst leicht seyn, solch eine Darstellung einer etrurischen Vase zu geben, daß ein Künstler dadurch in den Stand gesetzt würde, ein Modell darnach zu verfertigen. Man ziehe eine verticale Linie, die die Axe des Gefäßes, Fig. 8., darstellen soll; auf dieser Axe nehme man Puncte, die den Mittelpuncten der Hauptkreise des Gefäßes entsprechen; durch diese können die horizontalen isometrischen Linien gezogen werden, die die Halbmesser derjenigen Kreise darstellen, mit deren Hülfe die isometrischen Ellipsen, die ihre Stelle vertreten, leicht gezogen werden. Dies wird den Künstler vollkommen leiten können. Er kann sich die Arbeit dadurch erleichtern, daß er längs der Gesichtslinie auf den Gegenstand blickt, und wird dann, wenn er einige Geschicklichkeit im Zeichnen hat, ohne Schwierigkeit mit hinreichender Genauigkeit den Umriß zeichnen. Ist er in der Kunst unerfahren, so wird er sich bemühen müssen, eine größere Anzahl Ellipsen, die ihn leiten können, zu finden. Auf eine ähnliche Art kann ein Körper dargestellt werden, der durch die Umdrehung einer ebenen Figur um eine ihrer Seiten erzeugt ist.

Ein anderes Beispiel wird die Zeichnung der Masten eines Schiffes, oder eines Schiffes selbst, seyn.

Man denke sich eine verticale isometrische Ebene, die durch den Kiel desselben geht und von senkrechten Ebenen durch die Rippen und Parallelen zu den Verdecken, geschnitten wird. Die isometrischen Linien, die ihre Durchschnitte sind, können auf dem Schiffe gemessen und mit ihren besonderen, auf der Zeichnung bemerkten Maßen dargestellt werden, wodurch man die Mittel erhält, die Rippen darzustellen und sie in der Zeichnung an ihre gehörigen Stellen zu bringen.

Sollte dies in der Absicht gezeichnet werden, um ein Schiff nach einem gegebenen Modell zu bauen, so könnte es hinreichen, die Rippen nur auf einer Seite darzustellen, da sie auf der andern genau das Gegentheil sind. Hätte man aber die

Absicht, sich dieser Linien zu einer Zeichnung zu bedienen, so müßten sie nur sehr schwach gezeichnet werden, und von ihnen geleitet, wird der Künstler ohne große Schwierigkeit die Darstellung mit freier Hand ausfüllen.

Eine regelmäßige Festung, welche acht Bollwerke haben mag, wird ein anderes Beispiel gewähren.

Wer in solch einem Gegenstande nicht bewandert ist, wird im Allgemeinen durch Pläne und Durchschnitte in Verlegenheit gesetzt und fast keine Idee davon haben, was dadurch ausgedrückt werden soll.

Aber er würde es leicht verstehen, wenn er alles, in einer correcten Zeichnung dargestellt, sehen kann, vorzüglich wenn er die Ansicht dieses Gegenstandes von verschiedenen Seiten hat, wie es bei einer Festung, wie ich sie angeführt habe, der Fall ist. Es werde eine isometrische Ellipse gezogen, die den innern Umfang des Platzes darstellt, eine andere concentrische, die die hervorspringenden Winkel nach den schon dargestellten Grundsätzen bezeichnet. Nach jedem Hauptpuncte ziehe man andere leitende Linien; die Linien der Festung können leicht von einem gewöhnlichen Plane auf einen isometrischen, mit Hülfe der Scale oben beschriebener concentrischer Ellipsen, Fig. 7, übergetragen werden, welche auch dazu dienen können, die Länge der Bollwerke, Mittelwälle u. s. w., in welcher Richtung sie auch liegen mögen, zu bestimmen. Man suche die Höhen jedes Theils nach der isometrischen Scale; auf diese Art werden die Haupttheile des Platzes, die Gräben, Böschung, bedeckte Wege, Feldbrustwehren, Vorschanzen und alle Außenwerke dem Auge so dargestellt werden, als sie in der Wirklichkeit erscheinen, und in jeder beliebigen Lage, wobei noch der Vortheil ist, daß alle Maße mit geometrischer Präcision bemerkt sind.

Sollte der Künstler die verticalen Linien in einer solchen Darstellung für zu klein halten, um einen richtigen Begriff von allen den kleinen Erhöhungen zu geben, so würde er keinen Fehler begehen, wenn er in dieser Ausdehnung den Maßstab nach gewünschtem Verhältnisse vergrößerte.

Der Anblick eines Landes mit Hügeln oder Bergen, wie die Schweiz oder das Seegebiet in dem nördlichen Theile von England kann ebenfalls als Beispiel dienen.

Isometrische horizontale Linien können so gezogen werden, daß sie Linien in der Horizontalebene darstellen, von denen aus die Höhe der Berge gerechnet werden soll, so daß auf verticalen Linien, die von den Gipfeln der Berge gezogen, sie treffen, die Höhe bemerkt wird (wie es auch in Figuren gezeichnet werden kann, wenn man es verlangt). Die Berge selbst aber könnnen in ihrer topographischen Lage gezeichnet werden. Ihre

äußere Beschaffenheit kann man mit Hülfe des oben (Seite 187) beschriebenen isometrischen Cirkels andeuten. Es würde leicht seyn, sie von einer gewöhnlichen Charte auf einen isometrischen Plan überzutragen, und auf diese Art könnte der Anblick des Landes genau so dargestellt werden, als es von der passenden Höhe, die die isometrische Perspective voraussetzt, erscheint.

Da jedoch die Abhänge der Hügel und Berge selten so steil, als die Gesichtslinien sind, so möchte es bisweilen nicht unzweckmäßig seyn, Erhöhungen zwei- oder dreimal so hoch, als es in der Wirklichkeit ist, darzustellen, damit man die Berge im Abriß auf der Ebene dahinter projiciren könne; sonst möchte der Gipfel auf den Berg selbst projicirt werden, was die Wirkung der Zeichnung einigermaßen zerstören würde.

Auch kann diese Kunst vortheilhaft zur Zeichnung dessen, was unter der Erde ist, eben so gut angewendet werden, als es bei Gegenständen über derselben geschieht. Sie kann zu geologischen Zwecken angewendet werden, und giebt nicht nur die Ordnung der Schichten, sondern auch ihre Verschiedenheiten und geographischen Lagen an. Für diesen Zweck möchte es dienlich seyn, die verticale Scale in einem großen Verhältnisse gegen die horizontale zu vergrößern. Es würde leicht seyn, die Tiefe oder die Erhöhung der Schichten eben so wohl, als die Erde über ihnen, zu bezeichnen, ihre verschiedenen Brüche darzustellen, die Lage und Ausdehnung von Spalten und metallischen Adern zu zeigen, die Grenzen zu bemerken, wo die obern Schichten verschlungen worden sind, oder aufhören, sich zu zeigen, oder wo die untern Schichten hervor zu Tage kommen. Es würde leicht seyn, die Dicke der Schichten auf verschiedenen Puncten zu bemerken und die Resultate von Experimenten zu bezeichnen, die an einigen Puncten gemacht sind, indem man Schachte abteuft oder absenkt; dies geschieht, indem man eine verticale Linie niederwärts zieht, so daß sie die Dicke der Schichten darstellt, die durch verschiedene Farben bezeichnet werden können. Durch solch eine Methode könnte der Geolog eine Landcharte erhalten, die in einem Anblicke die allgemeinen Resultate aller Versuche und Untersuchungen darstellt, die in Beziehung auf diese Wissenschaft gemacht worden sind, und der Eigenthümer eines Landgebiets auf einen kleinen Raum alles verzeichnen, was in Rücksicht der Mineralien desselben bekannt ist, und durch den Ueberblick aller dieser über die Wahrscheinlichkeit des Erfolges urtheilen, wenn man einen Schacht absenken oder einen Stollen treiben wollte. Auch kann er aus dieser Perspective bei dem Treiben der Schachten Strecken in allen ihren Windungen, Streichen und Neigen, ferner bei ihrer Vergleichung mit der Oberfläche und bei der Bezeichnung der Gänge

und Lager, in denen sie gehen, großen Nutzen ziehen. Denn weiß der Künstler, was unter der Oberfläche ist, so findet er keine Schwierigkeit darin, sie als durchsichtig darzustellen. Er muß jedoch Sorge dafür tragen, daß er sich nicht durch allzu vielfache Linien verwirrt und sich des Vortheils bedienen, die Linien zur Unterscheidung mit verschiedenen Farben zu malen; auch muß er sich eine bedeutende Geschicklichkeit zu erwerben suchen, solche Linien, deren Nutzen gering ist, zu verwerfen, diejenigen aber beizubehalten, die den Effect des Bildes heben, worauf vorzüglich Rücksicht genommen werden muß, um die Darstellung leicht verständlich zu machen.

Sollte er eine Zeichnung von Mineralien oder Krystallen liefern wollen, so würde diese Perspective ebenfalls der Absicht entsprechen.

Die Hauptsache aber, worüber der Verfasser mit der größten Gewißheit sprechen kann, ist die Darstellung von Maschinen und physikalischen Instrumenten, da er selbst sehr oft auf sie die aufgestellten Grundsätze angewendet hat; hiervon sind in den Kupfern Beispiele gegeben.

Die richtige Darstellung von Gegenständen würde durch den Gebrauch dieser Perspective, selbst in den Händen von Leuten, die nur wenig in der Zeichenkunst bewandert sind, sehr erleichtert werden; und die Belehrung, die solch eine Zeichnung giebt, ist bei weitem bestimmter und genauer, als diejenigen, die die gewöhnlichen Methoden gewähren, auch ist sie geeigneter, bei der Ausführung einen Künstler zu leiten. *)

VIII. Kapitel.

Ausmessung von Flächen und Körpern.

1. Abschnitt. Ausmessung von Oberflächen.

Die folgenden Regeln werden dazu dienen, die Flächeninhalte der Figuren zu finden, deren Namen ihnen vorstehen.

1. Rechteck, Quadrat, Rhombus und Rhomboid. Um den Flächeninhalt zu finden, multiplicire man die Grundlinie in die Höhe.

---

*) Der Verfasser hat diesen interessanten Aufsatz aus dem ersten Theile der „Cambridge Philosophical Society" entlehnt. Die Methode verdient eine ganz besondere Aufmerksamkeit der Mechaniker und Ingenieurs.

2. Dreieck. Die halbe Grundlinie in die Höhe. Oder das Product je zweier Seiten und des halben natürlichen Sinus des eingeschlossenen Winkels.

Oder wenn drei Seiten, wie AB, AC, BC, gegeben sind und ihre halbe Summe S ist, so wird seyn

$$\text{Flächeninhalt} = \sqrt{S \times (S-AB) \times (S-AC) \times (S-BC)}.$$

3. Trapez. Man multiplicire die halbe Summe der parallelen Seiten in ihren senkrechten Abstand.

4. Trapezoid. Die Diagonale in die halbe Summe der darauf Senkrechten.

5. Unregelmäßiges Polygon. Man theile es in Trapeze oder Trapezoide und Dreiecke, und suche den Flächeninhalt jedes derselben; ihre Summe ist der Flächeninhalt des Polygons.

6. Regelmäßiges Polygon. Man multiplicire das Quadrat der gegebenen Seite in den ihr zugehörigen „Factor für Flächeninhalte," der in der Tafel bei der 15. Aufgabe der praktischen Geometrie gegeben ist, das Product wird der Flächeninhalt seyn.

7. Kreis. Durchmesser : Umkreis = 113 : 355.
oder: Durchmesser : Umkreis = 1 : 3,141593.
Umkreis : Durchmesser = 1 : 0,318309.
Flächeninhalt = Quadrat des Durchmessers × 0,785398
Flächeninhalt = Quadrat des Umkreises × 0,079577.
Flächeninhalt = $\frac{1}{2}$ Durchmesser × $\frac{1}{2}$ Umkreis.

8. Kreisbogen. Halbmesser des Kreises × 0,017453 × Grade im Bogen = seiner Länge.

9. Kreisausschnitt. $\frac{1}{2}$ Bogen × Halbmesser = Flächeninhalt.

10. Kreisabschnitt. Man multiplicire das Quadrat des Halbmessers in die halbe Differenz des Bogens (des Abschnitts) und seines Sinus oder in ihre halbe Summe, je nachdem der Abschnitt kleiner oder größer als ein Halbkreis ist; das Product wird den Flächeninhalt geben.

11. Parabel. $\frac{2}{3}$ des Products der Grundlinie und Höhe = Flächeninhalt.

12. Ellipse. Transversalaxe × conjugirte Axe × 0,785398 = Flächeninhalt.

2. Abschnitt. Ausmessung von Körpern.

1. Prisma. 1) Oberfläche. Man multiplicire den Umfang der Grundfläche in die Länge oder Höhe des Prisma; das Product wird die Oberfläche der Seitenflächen seyn. Hierz

füge man die Flächeninhalte der beiden Grundflächen, so ist die Summe die ganze Oberfläche. 2) Inhalt = Flächeninhalt der Grundfläche × Höhe.

Anmerkung. Dieselben Regeln dienen für die Oberfläche und den Inhalt eines Cylinders.

2. Pyramide oder Kegel. 1) Oberfläche = $\frac{1}{2}$ Umfang der Grundfläche × schräge Höhe (oder Seitenlinie).

2) Inhalt = Flächeninhalt der Grundfläche × $\frac{1}{3}$ Höhe.

3. Ein Stück einer Pyramide. 1) Oberfläche = $\frac{1}{2}$ Summe der Umfänge der beiden Grundflächen in die schräge Höhe. 2) Inhalt. Man addire einen Durchmesser oder eine Seite der größern Grundfläche zu einer der kleinern; von dem Quadrate der Summe ziehe man das Product der genannten beiden Durchmesser oder Seiten ab, multiplicire den Rest mit $\frac{1}{3}$ Höhe, und dieses letzte Product mit 0,785398 für Kreise, oder mit dem eigenthümlichen Factor für Polygone; das letzte Product wird der Inhalt seyn.

Das ist: Inhalt = $[(D + d)^2 - Dd)\ \frac{1}{3}\ m\ h$.

4. Kugel. 1) Oberfläche = Quadrat des Durchmessers × 3,141593. 2) Inhalt = Cubus des Durchmessers × 0,5236 oder = Cubus des Umkreises × 0,016887.

5. Kugelabschnitt. 1) Oberfäche = Umfang der Kugel × Höhe des Abschnitts. 2) Inhalt = $0{,}5236\ h^2\ (3d - 2h)$; wo d = Durchmesser, h = Höhe.

= $0{,}5236\ h^2\ (3r^2 + h^2)$, wo r = Radius der Grundfläche des Abschnitts.

6. Paraboloid. Inhalt = halbe Grundfläche × Höhe. Dieser Körper wird durch die Umdrehung einer Parabel um ihre Axe erzeugt.

7. Sphäroid. Dies ist ein Körper, der durch die Umdrehung einer Ellipse um eine ihrer Axen erzeugt wird. Um seinen Inhalt zu finden, multiplicire man das Quadrat der umgedrehten Axe in die feste, dann dieses Product mit 0,5236.

8. Reguläre oder platonische Körper sind solche, die von congruenten regelmäßigen ebenen Figuren eingeschlossen werden, und deren körperliche Winkel alle gleich sind.

Es giebt blos fünf regelmäßige Körper, nämlich:

Tetraeder, oder reguläre dreieckige Pyramide, die vier Dreiecke zu Oberflächen hat.

Hexaeder oder Würfel, dessen Oberfläche sechs Quadrate sind.

Oktaeder, das acht Dreiecke zu Oberflächen hat.

Dodekaeder, das zwölf Fünfecke zu Oberflächen hat.

Ikosaeder, dessen Oberfläche zwanzig Dreiecke sind.

Aufgabe 1. Die Oberfläche und den körperlichen Inhalt dieser regulären Körper zu finden. — Man multiplicire die eigenthümliche Oberfläche in der folgenden Tafel mit dem Quadrate der Seitenkante des Körpers für die Oberfläche.

Ebenso multiplicire man den körperlichen Inhalt in der letzten Colonne der Tafel mit dem Würfel der Seitenkante für den körperlichen Inhalt.

Oberflächen und körperliche Inhalte regulärer Körper, die Seite = 1 gesetzt.

Zahl der Seiten.	Name.	Oberfläche.	Körperlicher Inhalt.
4	Tetraeder	1,7320508	0,1178513
6	Hexaeder	6,0000000	1,0000000
8	Oktaeder	3,4641016	0,4714045
12	Dodekaeder	20,6457288	7,6631189
20	Ikosaeder	8,6602540	2,1816950

2. Der Durchmesser einer Kugel ist gegeben, es soll die Seite eines der regulären Körper gefunden werden, der entweder in die Kugel ein- oder um sie herumbeschrieben werden kann, oder ihr gleich ist.

Man multiplicire den gegebenen Kugeldurchmesser mit der entsprechenden Zahl in der folgenden Tafel für den gesuchten Gegenstand, das Product wird die Seite des verlangten regelmäßigen Körpers geben.

Der Duchmesser einer Kugel = 1 gesetzt, die Seite eines	Das in die Kugel eingeschrieben werden kann, ist	Das um die Kugel beschrieben werden kann, ist	Das gleich der Kugel ist, ist
Tetraeder	0,816497	2,44948	1,64417
Hexaeder	0,577350	1,00000	0,88610
Oktaeder	0,707107	1,22474	1,03576
Dodekaeder	0,525731	0,66158	0,62153
Ikosaeder	0,356822	0,44903	0,40883

3. Es ist die Seite eines der fünf regulären Körper gegeben, den Durchmesser einer Kugel zu finden, die in diesen Körper oder um ihn beschrieben werden kann, oder ihm gleich ist. Wie die zugehörige Zahl oben in der Tafel unter dem Titel eingeschrieben, umschrieben oder gleich sich zu 1

verhält, so verhält sich die Seite des gegebenen regulären Körpers zu dem Durchmesser seiner eingeschriebenen, umschriebenen oder gleichen Kugel.

4. Die Seite eines der fünf regulären Körper ist gegeben, es soll die Seite der andern vier Körper gefunden werden, die im körperlichen Inhalte dem gegebnen Körper gleich sind. — Wie sich die Zahl unter dem Titel gleich in der letzten Colonne der obigen Tafel in der Reihe des gegebenen regelmäßigen Körpers, zu der Zahl unter dem nämlichen Titel in der Reihe des Körpers, dessen Seite gesucht wird, verhält, so verhält sich die Seite des gegebenen regelmäßigen Körpers zu der Seite des gesuchten Körpers.

Außer diesen giebt es noch 13 halb reguläre Körper, die sogenannten Archimedischen Körper. Sie sind in dem Supplement zu Lidonne's Werk: „Tables de tous les Diviseurs des Nombres. Paris, 1808," beschrieben.

3. Abschnitt. Approximations-Regeln.

1. Für regelmäßige Vielecke. Ist s die Seite, so ist Flächeninhalt des Dreiecks $= \frac{1}{3} s^2 + \frac{1}{10} s^2$

Fünfecks $= s^2 + \frac{8}{10} s^2 - \frac{8}{100} s^2$

Sechsecks $= 2 s^2 + \frac{6}{10} s^2$

Siebenecks $= \frac{3}{100}$ des Quadrats von 11 s

Achtecks $= \frac{1}{10}$ des Quadrats von $7s - \frac{7s}{5}$

Neunecks $= 6 s^2 + \frac{2}{10} s^2 - \frac{2}{100} s^2$

Zehnecks $= 7 s^2 + \frac{7}{10} s^2$

Elfecks $= 9 s^2 + \frac{4}{100}$ von $9 s^2$

Zwölfecks $= 11 s^2 + \frac{1}{5} s^2$.

Hat man eine Polygonentafel bei der Hand, so ist es am besten, sich derselben zu bedienen. In andern Fällen kann eine oder die andere dieser Approximationen einem gut geübten Gedächtnisse einfallen.

Beispiele.

1. Die Seite eines Fünfecks ist 20. Es wird der Flächeninhalt gesucht.

$s^2 = 400$

$\frac{8}{10} s^2 = 320$ . . . . . 8mal $\frac{1}{10} s^2$

Von ihrer Summe 720

nehme man $\frac{8}{100} s^2 = 32$ . . . . . $\frac{1}{10}$ von $\frac{8}{10} s^2$

Verlangter Flächeninhalt = 688; der wahre Flächeninhalt ist 688,19.

2. Die Seite eines Achtecks ist 20; es wird der Flächeninhalt gesucht.

Quadrat von 7 s = 19600 = Quadrat von 140
Von $\frac{1}{10}$ desselben = 1960
nehme man $\frac{7\,s}{5}$ = 28
Flächeninhalt des Achtecks = 1932; der wahre Flächeninhalt ist 1931,37.

3. Die Seite eines Neunecks ist 20. Es wird der Flächeninhalt gesucht.

$s^2 = 400{,}6\,s^2 = 2400$
Hierzu füge man $\frac{2}{10}\,s^2$ = 80
Von der Summe . . . 2480
nehme man $\frac{2}{100}\,s^2$ = 8 = $\frac{1}{10}$ von $\frac{2}{10}\,s^2$
Flächeninhalt des Neunecks = 2472; der wahre Flächeninhalt ist 2472,72.

4. Die Seite eines Zwölfecks ist 20. Es wird der Flächeninhalt gesucht.

$s^2 = 400{,}11\,s^2 = 4400$
Hierzu füge man $\frac{1}{5}\,s^2$ = 80
Flächeninhalt des Zwölfecks = 4480; der wahre Flächeninhalt ist 4478,46.

2. Länge des Kreisbogens. Von der achtfachen Sehne des halben Bogens ziehe man die Sehne des ganzen Bogens ab und $\frac{1}{3}$ des Restes wird nahe die Länge des Bogens seyn.

Anmerkung. Die Sehne des halben Bogens ist der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate des sin. vers. oder der Höhe und der halben Sehne des ganzen Bogens gleich.

Oder man lege einen feinen beweglichen Faden an den Bogen, spanne ihn dann gerade aus und messe ihn.

3. Der Bogen eines Quadranten ist ziemlich gleich $1\frac{1}{5}$ mal der Sehne des Quadranten.

Dies ist bis auf den viertausendsten Theil richtig.

4. Umfang einer Ellipse. Man multiplicire die Quadratwurzel der halben Summe der Quadrate der beiden Axen mit 3,141593; das Product wird nahe der Umfang seyn.

Vermindert man dies um seinen zweihundertsten Theil, so wird das Resultat noch richtiger.

5. Flächeninhalt eines Kreises ist nahe gleich $\frac{11}{14}$ des Quadrats des Durchmessers. Oder man multiplicire D^2 mit 11, und dividire es mit 2 und mit 7.

Dies ist bis auf den 2500sten Theil richtig; oder fügt man

zu $\frac{7}{9}$ D^2, $\frac{1}{100}$ von $\frac{7}{9}$ D^2, so wird die Summe bis auf den 5000sten Theil den Flächeninhalt richtig geben.

Der Flächeninhalt eines Kreises ist nahe gleich $\frac{7}{8\,8}$ des Quadrats des Umkreises; oder man multiplicire c^2 mit 7 und dividire mit 8 und 11.

Es kommt der Wahrheit bis auf den 2600sten Theil nahe.

6. Kreisabschnitt. Zu der Sehne des ganzen Bogens addire man $\frac{4}{3}$ der Sehne des halben Bogens, multiplicire die Summe mit dem sin. vers. oder der Höhe des Segments; und $\frac{4}{10}$ des Products wird nahe den Flächeninhalt geben.

Oder $(c + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{4}c^2 + v^2})\,\frac{4}{10}\,v$ = Flächeninhalt.

7. Den Inhalt irregulärer ebener Figuren nach einem genauen Plane zu finden.

Ist der Plan nicht auf Papier oder feiner Zeichenpappe von gleichförmiger Textur, so bringe man ihn auf eine solche. Hierauf schneide man die Figur dicht an ihren Grenzen aus, und aus demselben Papiere schneide man ein Quadrat von bekannten Abmessungen, dem Maßstabe angemessen, der bei der Zeichnung des Plans angewendet worden ist. Wäge beide besonders in einer genauen Waage, und das Verhältniß der Gewichte wird das nämliche, als das des Flächeninhaltes, seyn.

Ist große Genauigkeit nöthig, so schneide man den Plan in vier Theile, 1, 2, 3, 4 genannt, wäge zuerst 1 und 2 zusammen, dann 3 und 4, und nehme ihre Summe. Hierauf wäge man 1 und 3 zusammen, 2 und 4, und nehme wiederum ihre Summe. Zuletzt wäge man 1 und 4, 2 und 3 zusammen und nehme die Summe. Das Mittel der vier zusammengefügten so erhaltenen Gewichte mit dem Gewichte des Musterquadrats verglichen, wird sehr nahe das Verhältniß ihrer Oberflächen geben.

*** Bei dieser Operation habe ich mich einer Waage bedient, die mit dem 100sten Theile eines Grans Ausschlag giebt. Die Resultate sind verhältnißmäßig genau.

8. Prisma. L = Länge, B = Breite, D = Dicke, alles in Zollen; dann ist $\frac{1}{140000}$ LBD nahe = Inhalt in Yard. *)

Wenn L, B, D in Fußen ausgedrückt sind, wie es die Dimensionen eines Kornmaßes voraussetzen, so ist 0,8 LBD = dem Inhalte in Winchester Scheffeln. Hier fehlt ungefähr ein Scheffel an 200.

Beispiel. Man setze L = 125 Zollen, B = 25, D = 24.

---

*) Ein Yard ist gleich drei Fuß englisch. (D.)

Dann ist $125 \times 25 = \frac{12500}{4} = 3125$,
und $3125 \times 24 = 6250 \times 12 = 75000$
$\frac{9}{140000}$ von 75000
9
2) 675000
7000) 337500
4,8214 Yards; die wahre Antwort ist 4,8225.

Bei getriebenen viereckigen Eisenstangen lege man auf 100 Zoll Länge einer einen Zoll dicken Stange $\frac{1}{4}$ Centner an Gewicht bei; und so im Verhältnisse.

Eine zolldicke Gußeisenstange würde für $\frac{1}{4}$ Centner 9 Fuß an Länge erfordern.

Oder man nehme $\frac{7}{144}$ des Products der Breite und Dicke, jedes in Achtelzollen, das Resultat ist das Gewicht eines Fußes in der Länge in Pfunden avoirdupois.

Oder ein Fuß in der Länge einer zolldicken Stange wiegt $3\frac{1}{9}$ Pfund.

Backsteine von der gewöhnlichen Gestalt gehen 384 auf einen Cubik-Yard. $16\frac{1}{2}$ Fuß Mauerwerk erfordern 4356 Backsteine. *)

9. Cylinder. Ein Zehntel des Durchmessers im Quadrate ($\frac{1}{10}$ d^2, indem d in Zollen genommen wird) giebt den Inhalt in Bier-Gallonen von einem Yard in der Länge.

Diese Regel giebt ein Resultat, das nur um den 376sten Theil fehlt.

10. Ausmessung des Bauholzes. L bezeichne die Länge eines Baumes in Fußen und Decimalen, und G den mittlern Umfang in Zollen genommen, dann können folgende von Herrn Andrews gegebene Regeln angewendet werden.

Regel 1. — Ohne Correction wegen der Rinde.

$\frac{L\,G^2}{2304}$ = Cub. Fuß angenommener**) u. $\frac{L\,G^2}{1807}$ = Cubik-Fuß, wahrer Inhalt.

Regel 2. — Wegen der Rinde $\frac{1}{8}$ zuzufügen.

$\frac{L\,G^2}{3009}$ = Cubik-Fuß angenommener und $\frac{L\,G^2}{2360}$ = Cubik-Fuß, wahrer Inhalt.

Regel 3. — Wegen der Rinde $\frac{1}{10}$ zuzufügen.

$\frac{L\,G^2}{2845}$ = Cubik-Fuß angenommener und $\frac{L\,G^2}{2231}$ = Cubik-Fuß, wahrer Inhalt.

---

*) Ich gebe hier diese und manche der folgenden englischen Bestimmungen unverändert, obgleich sie sich bei uns nicht unmittelbar brauchen lassen. Praktiker werden nach ihrem Bedürfniß leicht ähnliche abkürzende Zahlbestimmungen ausmitteln können. (D.)

**) Customary.

Regel 4. — Wegen der Rinde $\frac{1}{12}$ zuzufügen.

$\frac{L\,G^2}{2742}$ = Cubik-Fuß angenommener und $\frac{L\,G^2}{2150}$ = Cubik-Fuß, wahrer Inhalt.

Beispiel nach Regel 1. — Ohne Correction wegen der Rinde.

Ein 40 Fuß langer Baum, und von 60 Zoll ganzen Umfangs.

$\frac{40 \times 60^2}{2304}$ = 62½ Cubik-Fuß angenommener und $\frac{40 \times 60^2}{1807}$ = 79¾ Cubik-Fuß wahrer Inhalt.

Beispiel nach Regel 2. — Ein 50 Fuß langer Baum, und von 49 Zoll Umfang.

$\frac{50 \times 49^2}{3009}$ = 40 Cubik-Fuß angenommener und $\frac{50 \times 49^2}{2360}$ = 50¾ Cubik-Fuß wahrer Inhalt.

Wenn sowohl G als L in Fußen gegeben ist, dann drückt 0,8 L G² nahe den Inhalt aus.

*** Wenn die Differenz zwischen dem Umfange am obern und untern Ende beträchtlich ist, so wird man am besten den Inhalt des Baumes finden, wenn man ihn als einen abgestutzten Kegel betrachtet, und hiernach die nöthigen Bestimmungen macht.

11. Kugel: $\frac{11}{21}$ des Cubus des Durchmessers gleich dem körperlichen Inhalte. Bei der Division durch 21 bediene man sich der Factoren 3 und 7.

Diese Regel giebt ein Resultat, das bis auf den 2600sten Theil der Wahrheit nahe kommt.

Oder man multiplicire den Würfel des Umfangs mit 0,0169 für den körperlichen Inhalt.

12. Den körperlichen Inhalt eines unregelmäßigen Körpers zu finden. — Man verschaffe sich ein prismatisches oder cylindrisches Gefäß, das ihn enthalten kann. Man lege ihn in das Gefäß, gieße dann Wasser darauf, bis er bedeckt wird, und bezeichne die Höhe, die das Wasser erreicht. Hierauf nehme man den Körper heraus uud bemerke genau, wie viel hierauf das Wasser gefallen ist. Der Inhalt des Prismas oder des Cylinders, um den das Wasser gefallen ist, wird genau dem Inhalte des Körpers gleich seyn.

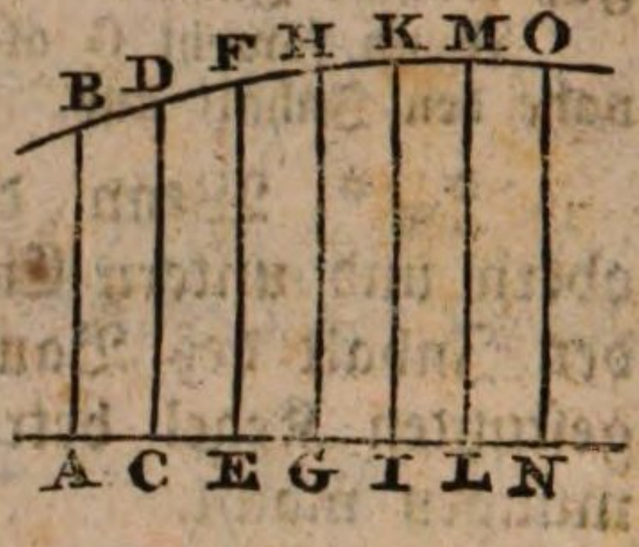
Kann das Gefäß kein Wasser halten, so kann, wiewohl mit weniger Genauigkeit, Sand angewendet werden.

Auf diese Art kann auch ein Theil des Körpers, ohne ihn von dem übrigen Theile zu trennen, ausgemessen werden, indem man nur diesen Theil in das Wasser taucht.

Selbst ein unregelmäßiges Gefäß kann zu diesem Behufe angewendet werden, in welchem Falle es in ein weiteres Gefäß gesetzt und dann mit Wasser angefüllt werden muß. Den Körper, dessen Größe man finden will, tauche man dann unter; die Quantität Wasser, die übergelaufen ist und in das andere Gefäß sich ergossen hat, wird das Maß seyn. Dies kann ge-

messen und sein Cubikmaß bestimmt werden, indem man 1000 Unzen avoirdupois auf den Cubikfuß rechnet. (Siehe weiter unten Hydrostatik und specifisches Gewicht).

13. Den Inhalt von Flächen und Körpern zu finden, die nicht auf eine bekannte Gestalt zurückgeführt werden können, vermittels der Methode von gleichabstehenden Ordinaten. — Die allgemeine Regel ist in folgendem Satze enthalten: Wenn eine gerade Linie AN in eine gerade Anzahl gleicher Theile, als AC, CE, EG ꝛc. getheilt wird, und in den Theilungspuncten senkrechte Ordinaten AB, CD, EF ꝛc., die sich in einer Curve BHO endigen, gezogen werden; ferner wenn A gleich der Summe der ersten und letzten Ordinate, AB, NO, B gleich der Summe der zweiten, vierten, sechsten u. s. w., CD, GH, LM ꝛc., und C gleich der Summe aller übrigen, EF, IK ꝛc., also der dritten, fünften u. s. w., die erste und letzte ausgenommen, gesetzt wird, so ist ein Drittel des angenommenen Abstandes AC, CE ꝛc. der Ordinaten, multiplicirt in die Summe von A, 4 B und 2 C, sehr nahe der Flächeninhalt von ABON.



$$\text{Das heißt } \frac{A + 4B + 2C}{3} \times D = \text{Flächeninhalt,}$$

wo $D = AC = CE$ ꝛc. ist.

Eben derselbe Lehrsatz kann auch zur Bestimmung des Inhalts von Körpern dienen, indem man, anstatt der Ordinaten, Schnitte anwendet, die auf der Axe senkrecht sind. Der Satz ist eben sowohl für alle parabolische und geradlinige Flächenräume, als auch für alle Körper, die durch Umdrehung von Kegelschnitten, oder geraden Linien um ihre Axen, erzeugt werden, und für Pyramiden und Stücke derselben ganz genau. Für andere Flächen oder Körper ist er eine vortreffliche Annäherungsmethode.

Je größer die Anzahl der Ordinaten oder Schnitte, die genommen werden, ist, desto genauer wird der Flächen- oder Rauminhalt bestimmt werden. Aber in den meisten Fällen werden fünf gleichabstehende Ordinaten oder Schnitte zu einem sehr genauen Resultate führen.

Bei dem Messen von Fässern werden in der That drei Schnitte hinreichen. Indem man auf diese Art die Durchmesser am Spunde und an dem obern und mittleren Theile nimmt, wird die Summe der Quadrate des Spund- und obern Durchmessers und des Quadrats des doppelten mittlern Durch-

messers mit der Länge des Gefäßes, und dann mit 0,785398 multiplicirt, sehr nahe sechsmal den Inhalt des Gefäßes geben. Oder wenn O, S und M beziehungsweise den Ober=, Spund= und Mitteldurchmesser und L die Länge, alles in Zollen, bezeichnen, so wird $(H^2 + 4\,M^2 + B^2) \times L \times 0{,}1309 =$ dem Inhalte des Fasses in Zollen darstellen.

Eine ähnliche Methode kann bei allen Fällen der Flüssigkeitsgefäße, sie mögen stehen oder liegen, angewendet werden, indem man die Flächenräume des obern, mittlern und untern Theils der Flüssigkeit nimmt. Siehe Hutton's Mensuration Th. 4.

Beispiel. Der Spund=Durchmesser eines Fasses ist 32 Zoll, der obere 24, der mittlere 30,2, die Länge 40. Es wird der Inhalt in Bier=Gallonen von 282, und in Wein=Gallonen von 231 Cubikzollen gesucht.

Der vorige Multiplicator mit 282 und 231 beziehungsweise dividirt, giebt $0{,}0004\frac{7}{11}$ und $0{,}0005\frac{2}{3}$ als zugehörige Multiplicatoren.

Daher $(32^2 + 24^2 + 4 \,.\, 30{,}2^2) \times 40 \times 0{,}0004\frac{7}{11}$ = 97,44 Bier=Gallonen.

Und $(32^2 + 24^2 + 4 \,.\, 30{,}2^2) \times 40 \times 0{,}0005\frac{2}{3} =$ 118,95 Wein=Gallonen.

Oder $\frac{1}{9}$ von 97,44 (Bier=Gallonen) giebt 119 Wein=Gallonen sehr nahe.

Mechanik.

1. Mechanik ist die Lehre vom Gleichgewichte und der Bewegung.

2. Kraft heißt jede Ursache, die einen Körper zur Bewegung antreibt, oder ihn in der Bewegung aufhält, oder die Richtung desselben verändert.

3. Wenn die Kräfte, die auf einen Körper wirken, sich gegenseitig aufheben, so daß der Körper in Ruhe bleibt, so sagt man, es finde Gleichgewicht statt.

4. Die Statik hat das Gleichgewicht von Kräften, die an festen Körpern angebracht sind, zum Gegenstande.

5. Die Dynamik bezieht sich auf die Bedingungen der Bewegung fester Körper.

6. Die Hydrostatik ist dem Gleichgewichte flüssiger Körper gewidmet.

7. Die Hydrodynamik bezieht sich auf ihre Bewegungen und die dabei stattfindenden Umstände.

8. Die Eigenschaften und die Wirkung elastischer Flüssigkeiten werden oft besonders unter dem Titel Pneumatik behandelt.

9. Eine einzelne Kraft, die einem physischen Puncte oder einem Körper in Ansehung der Geschwindigkeit und der Richtung dieselbe Bewegung als mehrere gleichzeitig wirkende Kräfte ertheilen würde, heißt die Mittelkraft oder Resultirende dieser Kräfte, jene einzelnen aber die Seitenkräfte der einfachen Mittelkraft.

10. Die Wirkung einer Kraft ist dieselbe, in was immer für einem Puncte ihrer Richtung sie auch angebracht wird, außer wenn die Art ihrer Wirkung verändert wird.

11. Kraft der Trägheit (vis inertiae) definirte Newton als eine solche Kraft eines jeden Körpers, nach der derselbe jeder Veränderung in seinem Zustande Widerstand leistet, die man ihm zu ertheilen sucht, das heißt nach der eine Kraft erfordert wird, um seinen Zustand, sey es nun der der Ruhe oder der Bewegung, zu verändern.

IX. Kapitel.

Statik.

1. Abschnitt. Parallelogramm der Kräfte.

1. Die Mittelkraft zweier beliebigen Kräfte, welche auf einen physischen Punct wirken und durch Linien dargestellt werden, die auf ihren respectiven Richtungen von diesem Puncte aus genommen werden, hat die Größe und Richtung der Diagonale des aus diesen Kräften construirten Parallelogramms.

2. Von zwei Kräften und ihrer Resultirenden kann jede durch den Sinus des Winkels dargestellt werden, der von den Richtungen der beiden andern gebildet wird.

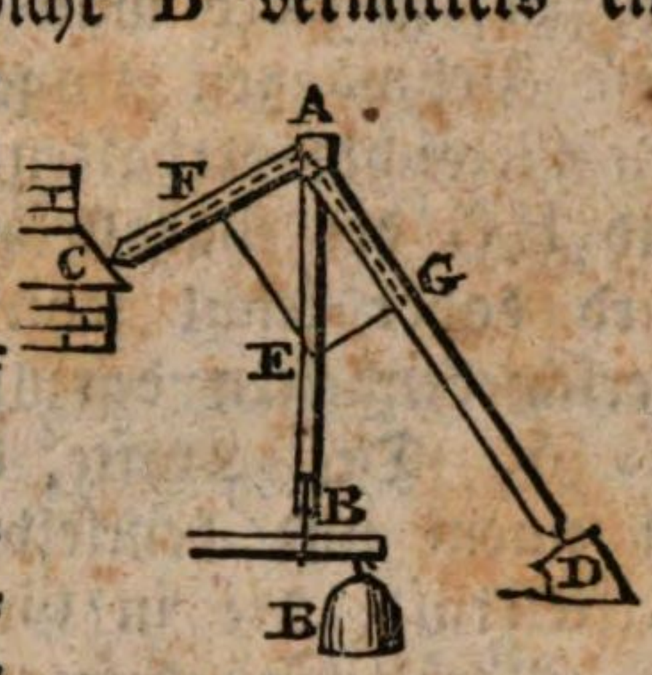
3. Wenn K, k zwei Kräfte, W den Winkel, den ihre respectiven Richtungen bilden, ferner R die Resultirende und w den Winkel, den dieselbe mit der Richtung der Kraft K macht, so ist

$$R = r\sqrt{K^2 + k^2 \pm 2Kk\cos W} \ldots (1)$$

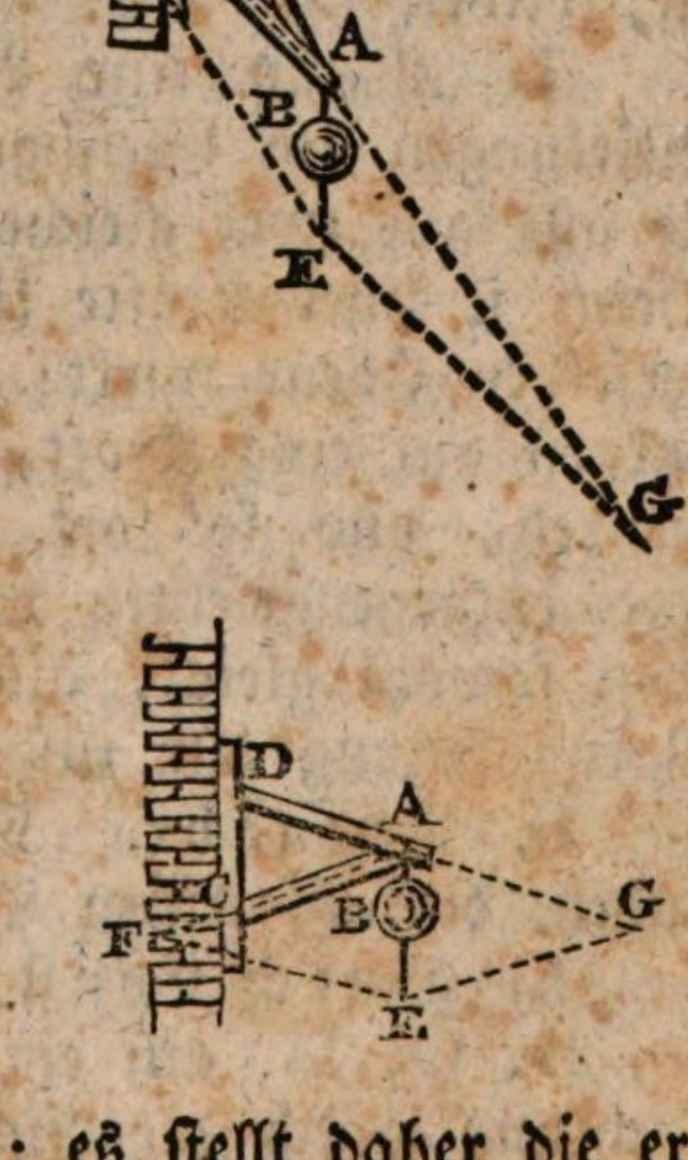
$$\text{tang. } w = \frac{k \sin W}{K + k\cos W} \ldots\ldots\ldots (2)$$

4. Diese Sätze sind von ausgebreiteter, ja ganz allgemeiner Anwendung bei den Geschäften der Architekten, Mechaniker und bürgerlichen Baumeister. Zwei einfache Beispiele werden hier hinreichen, andere werden in dem Folgenden vorkommen.

Beispiel 1. Es sey ein Gewicht B vermittels eines Seils an das Ende eines Balkens AB angebracht, der beziehungsweise in den Lagen, wie die Randfigur es darstellt, an zwei Querbalken AC, AD befestigt ist. Ferner, wenn AE auf AB an numerischem Werthe gleich dem verticalen Zuge auf diese Linie aufgetragen und das Parallelogramm vollendet wird, so wird AF nach demselben Maßstabe gemessen, den Zug auf dem Querbalken AC, und AG den Zug auf AD angeben.



Beispiel 2. Es sollen die Kräfte verglichen werden, die an Ziehbalken AD und Stützen AC wirken, wenn sie gleiche Gewichte B in den zwei verschiedenen Lagen, wie sie die Figur anzeigt, tragen. Es sey AE in der einen Figur gleich der entsprechenden Verticale in der andern; und stelle in jeder den numerischen Werth der Last B dar, die an A hängt. Durch E ziehe man in beiden Figuren Linien, die beziehungsweise den DA, AC parallel sind, und lasse sie die Verlängerungen von AC und DA in F und G treffen; dann wird in jeder Figur AFEG das Parallelogramm der Kräfte seyn, wodurch die verschiedenen Kräfte gemessen werden sollen. AG stelle die Kraft an dem Ziehbalken AD, und AF den Zug an der Stütze AC dar. Offenbar sind diese beiden Linien in der untern Figur kürzer als in der obern, AE aber hat in beiden dieselbe Länge; es stellt daher die erste Figur die unvortheilhafteste Lage der Balken dar. Auch ist ein-



leuchtend, daß, da CA aufwärts und DA niederwärts zieht, der Winkel DAC desto größer ist, je kleiner sein Supplement CAG und die Seiten FA, AG des Parallelogramms sind.

Die Wahrheit des allgemeinen Satzes läßt in Beziehung auf das Parallelogramm der Kräfte häufig eine Bestätigung durch Erfahrung vermittels zweier Ziehwaagen zu. Es hänge ein bekanntes Gewicht, z. B. 10, 15 u. s. w. Pfund, das in der Figur zu Beispiel 1 durch B dargestellt wird, an einem Seile EB; von einer Schleife in E lasse man zwei andere Seile EF, EG ausgehen, die an Ziehwaagen in F und G hängen, so wird man allgemein finden, daß die Gewichte, die diese Ziehwaagen tragen, sich zu dem in B vertical hängenden Gewichte verhalten werden, wie die respectiven Seiten EF und EG des Parallelogramms zu seiner Diagonale EA. Es wird daher leicht seyn, diese Beziehungen in allen verlangten Verschiedenheiten darzustellen.

5. Drei Kräfte, die nicht in derselben Ebene liegen, aber an einem und demselben Puncte angebracht sind, haben eine Mittelkraft, die in Größe und Richtung durch die Diagonale des Parallelepipedums dargestellt wird, das man über den Theilen der Richtungen dieser Kräfte verzeichnet, welche ihre respectiven Größen darstellen, und das von dem Anknüpfepuncte aus gezeichnet wird.

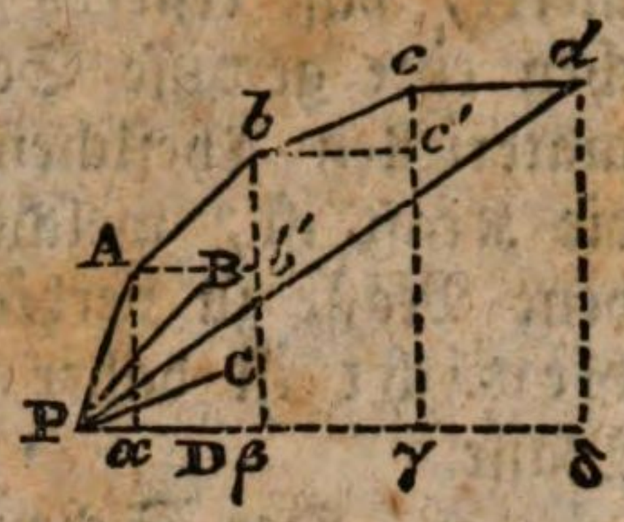
6. Man kann jeder Zeit eine Kraft in drei andere zerlegen, die drei gegebenen Linien parallel sind. Jede Seitenkraft kann dadurch gefunden werden, daß man die Kraft, welche zerlegt werden soll, mit dem Cosinus des Winkels multiplicirt, den ihre Richtung mit der Axe, der diese Seitenkraft parallel ist, bildet.

7. Wenn eine Anzahl Kräfte durch ihre gegenseitigen Wirkungen im Gleichgewichte gehalten werden, so kann man sie alle auf zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte bringen. — Denn je zwei Kräfte können auf eine gebracht werden, die in derselben Ebene wirkt; dann kann man diese letztere mit einer andern auf eine Kraft, die in der Ebene der erstern wirkt, reduciren, und so fort bis sie alle auf die Wirkung von nur zwei entgegengesetzten Kräften gebracht sind; diese aber werden eben sowohl gleich, als entgegengesetzt seyn, weil sie nach der Voraussetzung alle zusammengenommen in Gleichgewicht waren.

8. Aufgabe. Die Mittelkraft mehrerer Kräfte zu finden, die auf Einen Punct und in Einer Ebene wirken.

1) Durch Construction. Es mögen z. B. vier Kräfte, A, B, C, D, auf einen Punct P wirken, und in Größe und Richtung durch die Linien PA, PB, PC, PD dargestellt werden.

Von A aus ziehe man Ab gleich und parallel der PB; von b ziehe man bc gleich und parallel der PC, von c aus cd gleich und parallel der PD, und so fort, bis alle Kräfte verzeichnet worden sind. Hierauf ziehe man Pd, so wird dies die Größe und Richtung der verlangten Mittelkraft darstellen.



Dies ist in der That dieselbe Weise, auf welche man von zwei Kräften A und B die Mittelkraft findet; denn es wird ihre Mittelkraft mit einer dritten Kraft C, die Mittelkraft dieser mit einer vierten Kraft D, und so fort verbunden. Eine sorgfältige Construction nach einem gut gewählten Maßstabe wird eine Mittelkraft geben, die bis auf den 250sten Theil richtig ist.

2) Durch Rechnung. Indem man die Linien Aa, Ab' u. s. w. beziehungsweise parallel und senkrecht auf der letzten Kraft PD zieht, hat man:

$$d\delta = Aa + bb' + cc' = A \sin. APD + B \sin. BPD + C \sin. CPD.$$

$$P\delta = P\alpha + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta = A \cos. APD + B \cos. BPD + C \cos. CPD + D.$$

$$\text{tang. } dP\delta = \frac{d\delta}{P\delta}$$

$$Pd = \sqrt{(P\delta^2 + d\delta^2)} = P\delta \sec. dP\delta.$$

Die numerische Rechnung wird mit einer Tafel der natürlichen Sinus am besten vollzogen.

9. Die Mittelkraft zweier parallelen Kräfte, die nach Einer Richtung wirken, ist gleich der Summe derselben, und die Abstände der Richtung dieser Mittelkraft von den Richtungen der Seitenkräfte sind diesen Seitenkräften umgekehrt proportional.

10. Die Mittelkraft mehrerer parallelen Kräfte, die in Einer Ebene wirken oder nicht, ist der Summe dieser Kräfte gleich, indem man den Kräften, die nach einer Richtung wirken, das Zeichen + und denen, die entgegen wirken, — giebt.

2. Abschnitt. Schwerpunct.

1. Schwere ist eine Kraft, vermöge welcher Körper, die sich selbst überlassen werden, senkrecht auf die Oberfläche der Erde fallen.

2. Zwischen der Wirkung der Schwere und des Gewichts kann man einen Unterschied machen, indem man be-

merkt, daß ersteres die Kraft ist, die jedem materiellen Theilchen eine gewisse Schnelligkeit ertheilt, die von der Anzahl der materiellen Theilchen völlig unabhängig ist, während letzteres die Kraft ist, welche angewendet werden muß, um eine gegebene Masse zu verhindern, dem Gesetze der Schwere zu folgen. Gewicht ist daher abhängig, Schwere unabhängig von der Masse.

3. Der Schwerpunct eines Körpers, oder eines Systems von Körpern, ist der Punct, um den der Körper oder das System, worauf nur die Schwerkraft wirkt, sich in allen Lagen balanciren wird; oder es ist ein Punct, durch dessen Unterstützung zugleich auch der Körper oder das System, obgleich in andern Richtungen gelegen, unterstützt wird.

Der Schwerpunct eines Körpers liegt nicht immer innerhalb des Körpers selbst; so ist der Schwerpunct eines Ringes nicht in der Masse des Ringes, sondern in der Axe seines umschriebenen Cylinders, und der Schwerpunct eines hohlen Stabes oder Würfels ist nicht in der Materie, woraus derselbe besteht, sondern irgendwo in seiner eingebildeten Axe; jeder Körper jedoch und jedes System von Körpern hat einen Schwerpunct.

4. Die Veränderung der Lage eines Körpers wird auf seinen Schwerpunct keinen Einfluß haben, da eine Veränderung nichts anderes hervorbringen wird, als daß die Kräfte ihre Richtungen verändern, ohne aufzuhören, parallel zu seyn; und bleiben die Kräfte nicht dieselben, indem z. B. der Körper in verschiedene Abstände von der Erde gebracht wird, so verändern sich die Kräfte für alle Molecüle gleichmäßig, und ihr Schwerpunct bleibt unverändert.

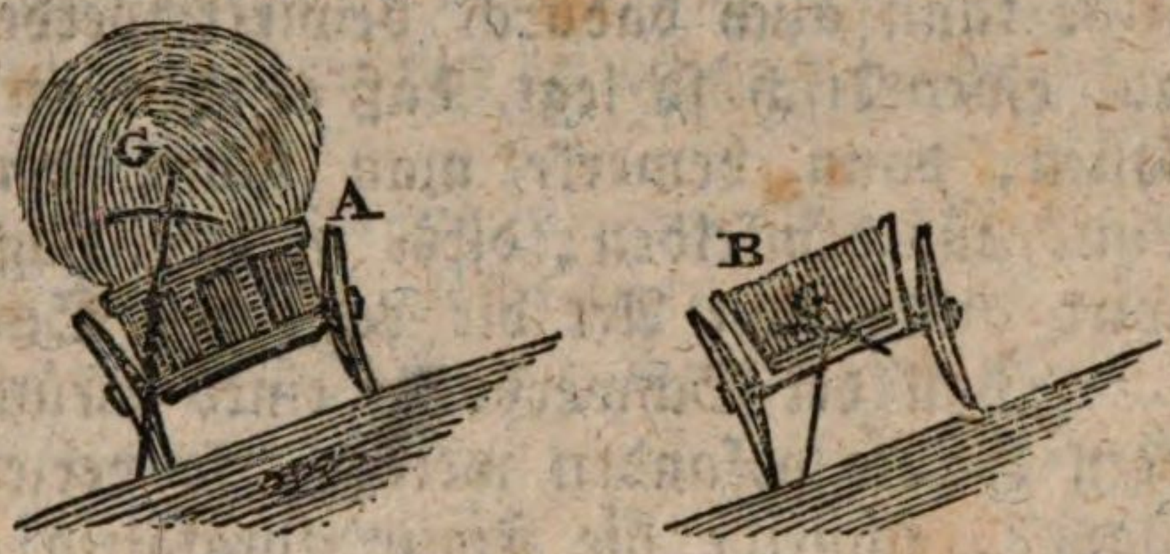
5. Wenn ein schwerer Körper an einem andern Puncte, als seinem Schwerpuncte, aufgehangen ist, so wird er nicht in Ruhe bleiben, wenn nicht der Schwerpunct mit dem Aufhängepuncte in derselben verticalen Linie liegt; denn in allen andern Lagen wird die Kraft, die das Gleichgewicht herstellen soll, der Mittelkraft der parallelen Kräfte der Schwere in den verschiedenen Theilchen des Körpers nicht direct entgegengesetzt seyn, und folglich das Gleichgewicht nicht erhalten werden. (Siehe Art. 9 über die Pendel.)

6. Wenn ein schwerer Körper durch zwei oder mehr Kräfte unterstützt wird, so müssen ihre Richtungen entweder in dem Schwerpuncte zusammenkommen, oder in der Verticalen, die durch denselben geht.

7. Wenn ein Körper auf einer Ebene steht, so wird er nicht umfallen, wenn die Verticallinie, die durch den Schwerpunct geht, auf die Grundfläche fällt, auf der der Körper steht;

fällt aber diese Verticallinie außerhalb der Grundfläche, so wird der Körper fallen, wenn er nicht durch eine Stütze oder ein Seil verhindert wird. Wenn die Verticallinie auf die Gränze der Grundfläche fällt, so kann der Körper stehen, aber das Gleichgewicht kann durch eine sehr geringe Kraft gestört werden; und je näher diese Linie einer Kante der Grundfläche ist, desto leichter kann der Körper umgeworfen werden; je näher sie aber an die Mitte der Grundfläche fällt, desto sicherer steht der Körper.

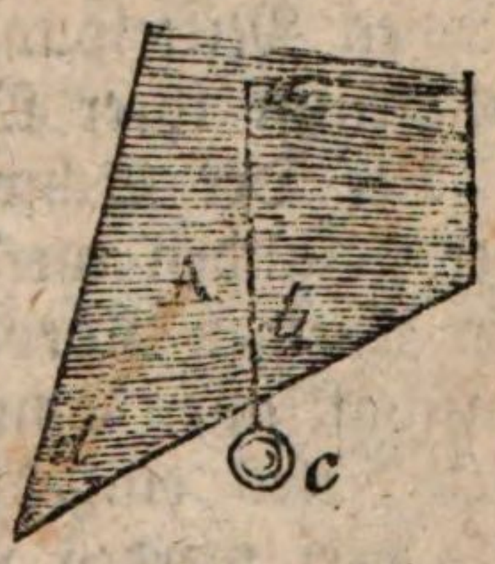
Nach diesem Gesetze sind die schiefen Thürme in Pisa und verschiedenen andern Orten gebaut worden, indem die verticale Richtungslinie aus dem Schwerpuncte innerhalb der Grundfläche fällt. Auch kann es nach eben diesem Gesetze bestimmt werden, ob ein mit schweren Materialien beladener Wagen, wie B, auf der Seite eines abschüssigen Weges mit vollkommener Sicherheit stehen wird, indem in diesem Falle die Verticallinie von dem Schwerpuncte zwischen die Räder fallen muß; während ein Wagen A mit einer hoch gethürmten Last, z. B. mit Heu oder Wollsäcken, umfallen wird, weil die verticale Richtungslinie außerhalb der Räder fällt.



8. Um den Schwerpunct mechanisch zu finden, wird nur erfordert, den Körper nach einander in zwei Lagen des Gleichgewichts vermittels zweier Kräfte in verticalen Richtungen zu bringen, die nach einander an zwei verschiedene Puncte des Körpers angebracht werden; der Durchschnittspunct dieser zwei Richtungen wird den Schwerpunct angeben.

Dies können wir dadurch erläutern, daß wir einige besondre Verfahrungsarten anführen.

Hat der Körper ebene Seitenflächen, wie ein Stück Bret, so hänge man ihn an einem Puncte auf; dann wird ein Bleiloth, das man aus demselben Puncte herabläßt, durch den Schwerpunct gehen; man bezeichne daher die Lage desselben darauf, hänge dann den Körper an einem andern Puncte auf, und wende wieder das Bleiloth an, dann wird der Durchschnitt desselben mit der bezeichneten ersten Lage desselben den Schwerpunct angeben.



Oder so: man hänge den Körper mit zwei Fäden, die an

verschiedenen Theilen des Körpers befestigt sind, an einem und demselben Puncte auf; dann wird ein Bleiloth, das vom Aufhängestifte herabhängt, auf den Schwerpunct fallen.

Eine andere Methode: Man lege den Körper auf die Kante eines dreieckigen Prismas oder eines ähnlichen scharfkantigen Körpers, bewege ihn hin und her, bis die Theile auf beiden Seiten im Gleichgewichte sind, und bemerke eine Linie darauf, dicht an der Kante des Prismas; balancire ihn wieder in einer andern Lage, und bemerke die neue Linie an der Kante des Prismas; die Verticale, die durch den Durchschnitt dieser Linien geht, wird ebenfalls den Schwerpunct treffen. Dasselbe kann auch dadurch bewirkt werden, daß man den Körper auf einen Tisch so legt, daß er eben im Begriffe ist, herunter zu fallen; dann bemerke man längs der Kante des Tisches eine Linie auf demselben; dies, in zwei Lagen des Körpers gemacht, wird auf gleiche Art die Lage des Schwerpunctes bestimmen.

Soll der Schwerpunct eines Brückenbogens oder einer andern Baute gefunden werden, so verzeichne man sie genau auf Pappe, schneide die Figur sorgfältig aus, und bestimme den Schwerpunct nach dem vorhergehenden Verfahren.

9. Wenn man auf eine Ebene, die durch den Schwerpunct eines Körpers geht, Senkrechte von jedem seiner Molecüle fallen läßt, so wird die Summe aller senkrechten Abstände auf der einen Seite der Ebene, gleich der Summe aller senkrechten Abstände auf der andern Seite seyn. Eine ähnliche Eigenschaft findet in Rücksicht auf den gemeinschaftlichen Schwerpunct eines Systems von Körpern statt.

10. Die Lage, der Abstand und die Bewegung des Schwerpuncts eines Körpers ist das Mittel der Lagen, Abstände und Bewegungen aller Theilchen in dem Körper.

11. Der gemeinschaftliche Schwerpunct oder Mittelpunct der Lage zweier Körper theilt die gerade Linie zwischen den bezüglichen Mittelpuncten der beiden Körper in dem umgekehrten Verhältnisse ihrer Massen.

12. Der Schwerpunct dreier oder mehrerer Körper kann daher gefunden werden, wenn man den ersten und zweiten als einen einzigen Körper, ihrer Summe gleich und in ihrem gemeinschaftlichen Schwerpuncte angebracht, denkt, und den Schwerpunct dieses eingebildeten Körpers und eines dritten bestimmt. Diese drei werden wieder in ihrem gemeinschaftlichen Schwerpuncte vereinigt gedacht und mit einem vierten verbunden; so kann man nach Belieben fortfahren.

Oder wenn M, M′, M″ u. s. w. die Massen von Körpern, D, D′, D′ u. s. w. die senkrechten Abstände ihrer respectiven Schwerpuncte von einer Linie oder Ebene, △ die Distanz ihres gemeinschaftlichen Schwerpuncts von einer Linie oder Ebene bedeutet, so findet man ihn nach diesem Satze:

$$\triangle = \frac{MD + M'D' + M''D'' + \ldots}{M + M' + M'' + \ldots}$$

13. Wenn die Theilchen oder Körper eines Systems sich gleichförmig und geradlinig mit beliebigen Geschwindigkeiten und Richtungen bewegen, so ist der Schwerpunct entweder in Ruhe, oder bewegt sich gleichförmig in einer geraden Linie.

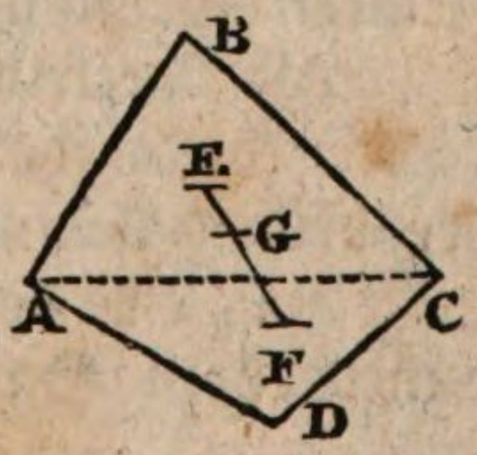
Wenn man daher einem Körper eine Drehungsbewegung ertheilt, ihn dann aber sich frei bewegen läßt, so wird die Umdrehungsaxe durch den Schwerpunct gehen; denn dieser Punct, er mag nun in Ruhe bleiben, oder sich in einer geraden Linie fortbewegen, hat keine Drehung.

Hier kann auch bemerkt werden, daß eine Kraft, die an den Schwerpunct eines Körpers angebracht wird, keine Umdrehungsbewegung erzeugen kann.

14. Der Schwerpunct einer geraden Linie, oder eines Parallelogramms, Prismas oder Cylinders ist in dem Mittelpuncte dieses Körpers; dies ist auch bei einem Kreise oder seiner Peripherie, einer Kugel oder einem regelmäßigen Vielecke der Fall. Der Schwerpunct eines Dreiecks liegt in einer Linie, die von einem beliebigen Winkel nach der Mitte der entgegengesetzten Seite gezogen wird; bei einer Ellipse, Parabel, einem Kegel, Konoid, Sphäroid u. s. w. ist derselbe in der Axe. Dasselbe gilt von allen symmetrischen Figuren.

15. Der Schwerpunct eines Dreiecks ist der Durchschnittspunct der Linien, die von den drei Winkeln nach den Halbirungspuncten der beziehungsweise entgegengesetzten Seiten gezogen werden. Diese Linien schneiden sich einander in dem Verhältnisse von 2:1.

16. In einem Trapez. Man theile die Figur durch die Diagonale AC in zwei Dreiecke, und suche die Schwerpuncte E und F dieser Dreiecke; verbinde E und F, und suche den gemeinschaftlichen Schwerpunct G dieser Puncte nach folgendem Verhältnisse: ABC : ADC = FG : EG oder ABCD : ADC = EF : EG. Oder man theile die Figur durch eine Diagonale BD in zwei Dreiecke, und suche ihre Schwerpuncte; ihre Verbindungslinie wird EF in dem Puncte G, dem Schwerpuncte des Trapeziums, durchschneiden.



17. Auf gleiche Art theile man jede andere ebene Figur, wie viel Seiten sie auch haben mag, in Dreiecke, und suche den Schwerpunct eines jeden derselben; hierauf verbinde man zwei Schwerpuncte und suche ihren gemeinschaftlichen Schwerpunct, wie oben; dann diesen mit einem dritten, und suche den gemeinschaftlichen Schwerpunct derselben; und so fort, indem man immer den zuletzt gefundenen Schwerpunct mit einem andern verbindet, bis dies Verfahren auf alle angewendet ist. Auf diese Art wird der letzte gemeinschaftliche Schwerpunct derjenige seyn, welcher gesucht wurde.

18. Der Schwerpunct eines Kreisbogens ist von dem Mittelpuncte um die vierte Proportionale des Bogens, des Halbmessers und der Sehne des Bogens entfernt.

19. In einem Kreisausschnitte ist der Abstand von dem Mittelpuncte des Kreises $\frac{2cr}{3a}$; wo a den Bogen (arcus), c seine Chorde und r den Radius bezeichnet.

20. Die Schwerpuncte der Oberfläche eines Cylinders, eines Kegels und eines abgestutzten Kegels sind beziehungsweise in denselben Entfernungen vom Anfangspuncte, als es bei dem Schwerpuncte des Parallelogramms, Dreiecks und Trapezes der Fall ist, welche die verticalen Schnitte der respectiven Körper sind.

21. Der Schwerpunct der Oberfläche einer Kugelmütze ist in der Mitte ihres sin. vers. oder der Höhe.

22. Der Schwerpunct der convexen Oberfläche einer Kugelzone ist in der Mitte desjenigen Theils der Axe, der von den beiden Grundflächen der Zone abgeschnitten wird.

23. In einem Kegel sowohl, als jeder andern Pyramide ist der Abstand des Schwerpuncts vom Scheitel $\frac{3}{4}$ der Axe.

24. Bei einem abgestutzten Kegel ist der Abstand auf der Axe von dem Schwerpuncte der kleinern Grundfläche

$$\frac{1}{4}\,h \cdot \frac{3R^2 + 2Rr + r^2}{R^2 + \quad r + r^2},$$

wo h die Höhe, R und r die Halbmesser der größern und kleinern Grundfläche bezeichnen.

25. Derselbe Satz ist auch auf das Stück einer regelmäßigen Pyramide anwendbar, wo man R und r als Seiten der beiden Grundflächen annimmt.

26. Bei dem Paraboloid*) ist der Abstand des Schwerpuncts vom Scheitel $\frac{2}{3}$ der Axe.

---

*) Paraboloid soll hier, so wie schon S. 195, einen durch Umdrehung der Parabel um ihre Axe entstandenen Körper bedeuten. Dies ist sprachlich falsch; ein solcher Körper muß ein paraboliſches Konoid heißen. (D

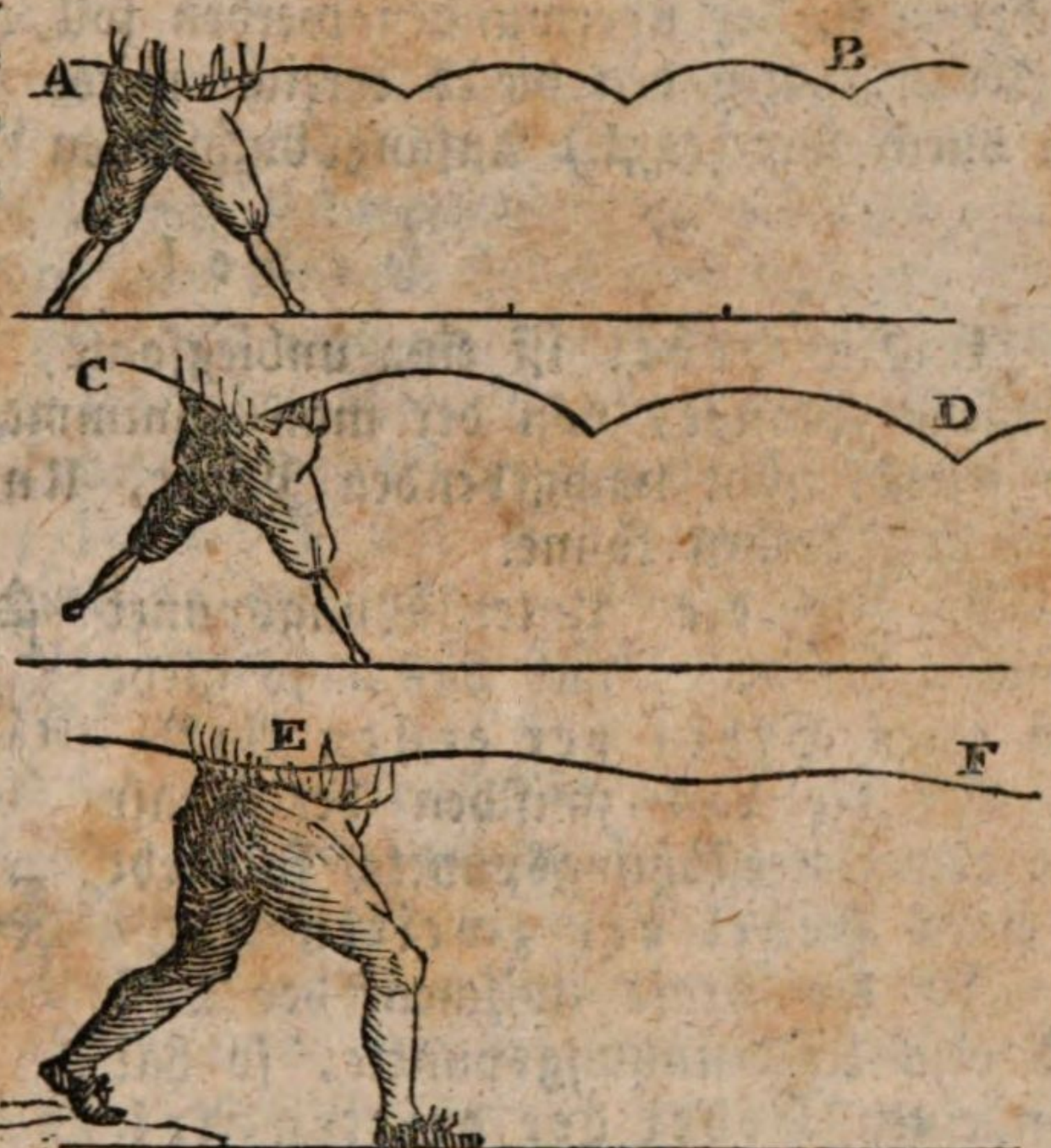
27. Bei dem abgestutzten Paraboloid ist der Abstand auf der Axe vom Schwerpunct der kleinern Grundfläche

$$\tfrac{1}{3}h \cdot \frac{2R^2 + r^2}{R^2 + r^2},$$

wo h die Höhe, R und r die Halbmesser der größern und kleinern Grundfläche bezeichnen.

*** In dem ersten Theile meiner Mechanik*) sind noch manche andere Resultate gegeben. Das Vorhergehende ist als das gebräuchlichste ausgehoben worden.

Der Schwerpunct des menschlichen Körpers ist immer nahe an derselben Stelle, nämlich im Becken, zwischen den Hüften, den ossa pubis, und dem untern Theile des Rückgrates; dadurch, daß man die Aerme oder die Schenkel erhebt, wird der Schwerpunct ein wenig erhoben, bis er so liegt, daß sich die Glieder frei darum bewegen können; und dieser Schwerpunct bewegt sich weit weniger, als wenn er in einem andern Theile des Körpers wäre. Wenn ein Mann auf Stelzen ginge, so würde der Schwerpunct seines Körpers Theile von Kreisen wie AB beschreiben. Wenn ein Mann mit Stelzen liefe, so würde der Schwerpunct Theile von Parabeln, wie CD, beschreiben. Aber die Biegsamkeit der Bänder und Muskeln der menschlichen Schenkel entfernt die Spitzen von diesen Curvenbogen, und verursacht blos eine sanftere wellenförmige Bewegung, wie EF.



---

*) Auch deutsch übersetzt unter dem Titel: Lehrbuch der theoretischen, praktischen und beschreibenden Mechanik. Uebers. von Dietlein. Erster Theil. Berlin, 1824. — Ein sehr vollständiges Handbuch des theoretischen Theils der Statik in analytischer Darstellung ist die „Statik fester Körper von J. A. Grunert." Halle, 1826. (D.)

3. Abschnitt. Mechanische Potenzen.

1. Die einfachen Maschinen, aus denen die zusammengesetzten bestehen, und welche wirklich oft auch allein angewendet werden, heißen mechanische Potenzen.

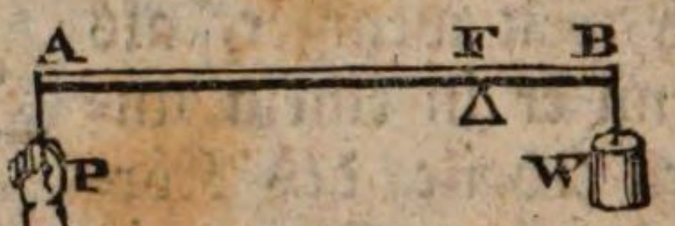
2. Darunter rechnet man gewöhnlich sechs, nämlich den Hebel, das Rad an der Welle, die Rolle, die geneigte Ebene, den Keil und die Schraube. Hierzu kommt bisweilen noch die Seilmaschine, die durch die Wirkung mehrerer Kräfte gebildet wird, welche an verschiedenen Puncten eines biegsamen Seiles wirken.

3. Last und Kraft, wenn sie als einander entgegengesetzt betrachtet werden, bezeichnen den Körper der bewegt, oder den Widerstand, der überwunden werden soll, und den Körper oder die Kraft, durch den dieses erreicht wird. Sie werden gewöhnlich durch ihre (engl.) Anfangsbuchstaben W und P dargestellt. *)

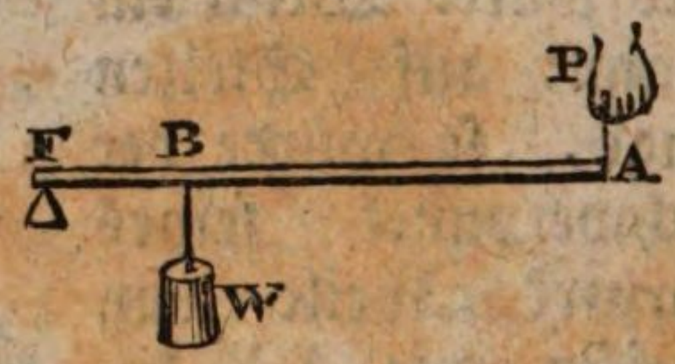
Hebel.

1. Ein Hebel ist eine unbiegsame, entweder gerade oder gebogene Stange, von der man annimmt, daß sie sich um einen festen, nicht nachgebenden Punct, Unterstützungspunct genannt, drehen könne.

2. Ist der Unterstützungspunct zwischen der Kraft und Last, so giebt dies einen Hebel der ersten Art.



Ist die Last zwischen der Kraft und dem Unterstützungspuncte, so giebt es einen Hebel der zweiten Art.



Ist die Kraft zwischen der Last und dem Unterstützungspuncte, so hat man einen Hebel der dritten Art.

Der Hammerhebel oder die Wirkungsart eines Hammers bei dem Herausziehen eines Nagels wird bisweilen als eine vierte Art betrachtet.

3. In allen Fällen wo Gleichgewicht statt findet wird es durch die allgemeine Eigenschaft angezeigt, daß das Product der Last in den Abstand, in der sie wirkt, gleich dem Producte der Kraft in den Abstand ist, in der sie angebracht wird, indem die Abstände in Richtungen genommen werden, die auf denjenigen, in denen Last und Kraft beziehungsweise wirken, senkrecht sind. So ist in jeder der drei vorhergehenden Figuren:

---

*) Die schon gefertigten Figuren der deutschen Ausgabe erlaubten nicht diese Buchstaben mit L und K zu vertauschen. (D.)

$$P \cdot AF = W \cdot BF,$$

oder Kraft und Last verhalten sich umgekehrt wie die Abstände, in denen sie wirken.

Und wenn in der ersten Figur z. B. der Arm AF 4 mal so lang als FB wäre, so würde den 4 Pfund, die an B hängen, 1 Pfund an A das Gleichgewicht halter. Wäre AF 5 mal so lang als FB, so würde 1 Pfund an A, 5 Pfunden an B das Gleichgewicht halten, u. s. f.

4. Wenn an einem Hebel mehrere Lasten an beiden Seiten des Unterstützungspunctes hängen, so wird Gleichgewicht statt finden, wenn die Summe der Producte der Lasten in ihre beziehungsweisen Abstände auf der einen Seite gleich der Summe der verschiedenen Producte der Lasten und Abstände, auf der andern Seite ist.

5. Soll das Gewicht des Hebels selbst mit in Anschlag kommen, so verfahre man gerade so, als wäre er noch eine besondere Last, die in seinem Schwerpuncte aufgehängt würde.

6. Wenn zwei, drei oder mehrere Hebel nach und auf einander wirken, so findet man den mechanischen Gesammt-Vortheil, wenn man das Product ihrer besondern Vortheile nimmt. Wenn so die Aerme dreier Hebel, die auf diese Art in Verbindung wirken, sich wie 3 : 1, 4 : 1 und 5 : 1 verhalten, so ist der Vortheil der Verbindung der von $3 \times 4 \times 5$ zu 1 oder 60 zu 1, so daß mit Hülfe derselben ein Pfund sechzig Pfunden das Gleichgewicht halten würde.

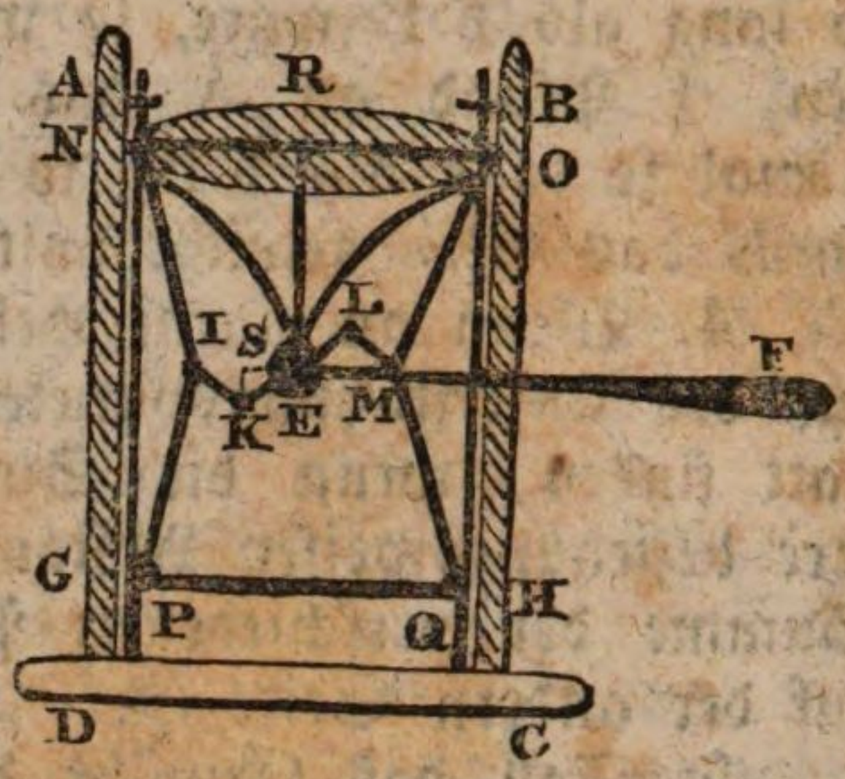
7. Bei dem Hebel der ersten Art ist der Druck auf den Unterstützungspunct $P + W$; bei den andern beiden $= P - W$.

8. Auf den vorhergehenden Grundsätzen beruht auch die Natur der Waagen zum Wägen aller Lasten. Denn wenn die Abstände gleich sind, so werden auch die Gewichte gleich seyn. Die römische Waage, oder Schnellwaage ist ebenfalls ein Hebel, nur von ungleichen Aermen oder Abständen, so eingerichtet, daß nur ein Gewicht dienen kann, eine größere Last zu wägen, indem man es vorwärts und rückwärts in verschiedenen Entfernungen auf dem längern Arm schieben kann. Wenn bei der gewöhnlichen Waage das in einer Waagschale gewogene Gewicht einer Last nicht mit seinem Gewichte in der andern übereinstimmt, so wird die Quadratwurzel aus dem Producte dieser beiden Lasten das wahre Gewicht geben.*)

---

*) Bekanntlich erhält man viel einfacher auf einer unrichtigen Waage das genaue Gewicht einer Last, wenn man erst so viel Gewichte oder andere Gegenstände in die andere Schale legt, bis die Zunge einspielt, dann die zu wägende Last aus der Schale nimmt und an ihre Stelle so viel Gewichte legt, bis die Zunge der Waage abermals einspielt. Diese Gewichte wägen offenbar die Last ganz genau. (D.)

9. Unter zahlreichen Beispielen von der Kraft und dem Nutzen des Hebels kann eins, welches die Art seiner Anwendung in den Druckerpressen des verstorbenen Grafen Stanhope zeigt, mit Nutzen angeführt werden.



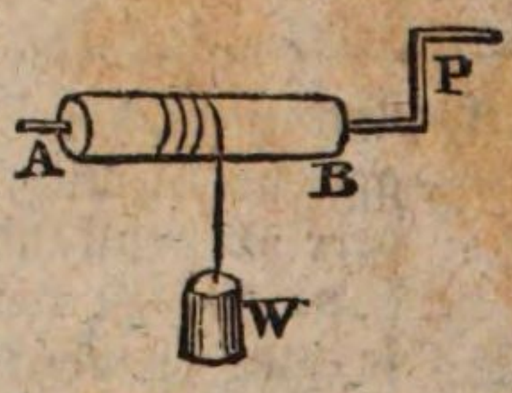
In nebenstehender Figur sey ABCD die allgemeine Gestalt der Presse, die durch zwei Querstücke NO, DC zusammen gehalten wird; E bezeichnet einen Mittelpunct, der durch Stangen EN, ER, EO mit dem äußern Rahmen in Verbindung steht. An diesem Mittelpuncte ist eine Stange KL, und ein Hebel EF befestigt, an dem die Hand wirkt, wenn die Presse im Gange ist.

Es sind auch verschiedene andere Stücke, die durch Gelenke in N, G, I, K, L, M, O, H, verbunden, und so an einander angebracht sind, daß wenn die Hand an den Hebel EF in F gebracht wird, um ihn nieder zu drücken, KL in eine horizontale Linie gebracht, oder parallel zu GH oder DC wird, in welcher Lage NIG, OMH ebenfalls in einer geraden Linie liegen. Es ist einleuchtend: je näher diese verschiedenen Stücke, welche oben erwähnt wurden, in einer geraden Linie liegen, desto größer ist der Hebel EF, im Verhältnisse zu der Senkrechten KS, an dem andern Ende des Hebels EK, die von einem Perpendikel gebildet wird, welches man von K auf die Verlängerung von FE fällt. Es wird folglich eine kleine Kraft, die in F angebracht wird, hinreichen, eine sehr große Wirkung in K hervorzubringen, wenn IK, KE ziemlich in einer geraden Linie liegen; und so fort für die übrigeno ben erwähnten Stücke.

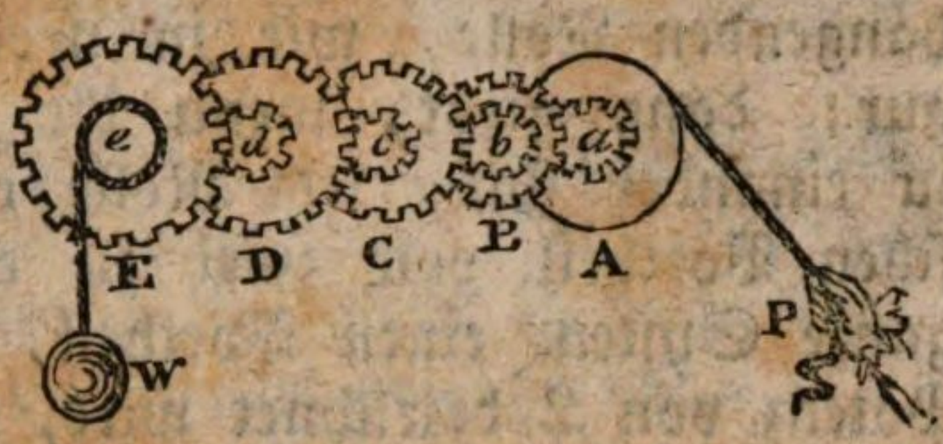
Daher wird die Kraft, die vermittels der Hand in F angebracht wird, mit bedeutender Stärke GH, das an eisernen Cylinderstäben auf und nieder gleitet, herunter stoßen, oder einen in die Oeffnung PQ, zwischen den Stab oder die Platte und den Rahmen DC gelegten Gegenstand zusammendrücken.

Rad an der Welle.

1. Die Natur dieser Maschine bezeichnet schon der Name. Auf sie können alle Dreh- oder Räder-Maschinen von verschiedenen Halbmessern zurückgeführt werden, z. B. Zieh- und Drehrollen, Krahne, Ankerwinden, Erdwinden u. s. w.



2. Die mechanische Eigenschaft ist dieselbe, wie bei dem Hebel, nämlich P . A C = W . B C; der Grund ist sehr einleuchtend, weil das Rad und die Welle nichts weiter, als eine Art von beständigem Hebel sind.



3. Wenn eine Reihe von Rädern und Axen auf einander wirken, so, daß sie einen mechanischen Vortheil fortpflanzen und vergrößern, die Verbindung mag nun durch Seile und Schlingen, oder durch Zähne und Getriebe bewerkstelligt seyn, so wird sich die Last zur Kraft, wie das beständige Product der Halbmesser der Räder zu dem beständigen Producte der Halbmesser der Axen verhalten. Wenn auf diese Art jeder der Halbmesser der Axen a, b, c, d, e gleich 3 Zollen ist, während die Halbmesser der Räder A, B, C, D, E gleich 9, 6, 9, 10 und 12 Zollen beziehungsweise sind, so wird sich verhalten $W : P = 9 \times 6 \times 9 \times 10 \times 12 : 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 240 : 1$. Bei welcher Rechnung jedoch die Reibung nicht berücksichtigt ist.

4. Eine Reihe von Rädern und Getrieben kann auch zur Vergrößerung der Geschwindigkeit dienen. So wird in dem vorhergehenden Beispiele, welche Bewegung man auch dem Umkreise des Rades e ertheilt, sich doch die Peripherie des Rades A 240 mal so schnell bewegen.

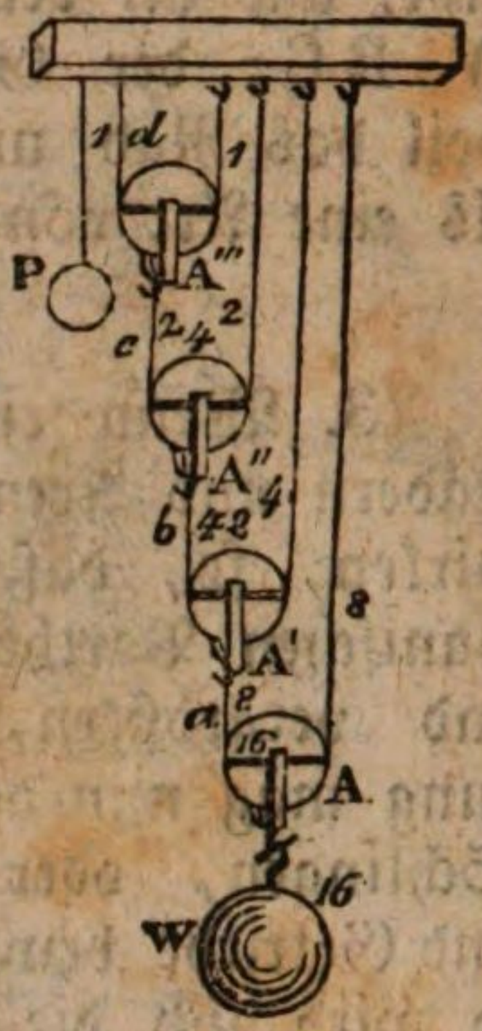
Und würde eine Reihe von 6 Rädern und Axen, deren Durchmesser in dem Verhältnisse von 10 : 1 stehen, zur Vergrößerung der Geschwindigkeit angewendet, so würde die gegebene Geschwindigkeit zur bewirkten sich wie 1 : 10^6, das ist, wie 1 : 1000000 verhalten.

Rolle.

Eine Rolle ist ein kleines Rad, aus Holz oder Eisen verfertigt, das sich um eine eiserne Axe dreht, die durch den Mittelpunct geht, und vermittels eines Seiles, das sich um seinen Umkreis schlingt, und dazu dient, eine Last in die Höhe zu heben, an einen Block befestigt ist. Die Rolle ist entweder einfach oder aus mehreren zusammengesetzt, um die Kraft zu vergrößern. Auch ist sie entweder fest, oder beweglich, je nach-

dem sie an Einer Stelle festgehalten wird, oder sich mit der Kraft und Last hinauf und hinab bewegt.

2. Wenn eine Kraft durch eine feste Rolle eine Last trägt, so sind Kraft und Last gleich.

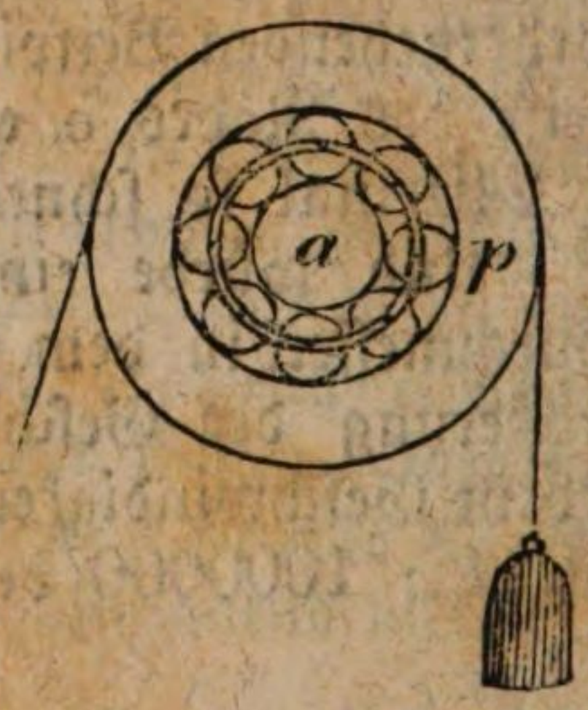


3. Wenn eine Kraft eine Last an einer Verbindung beweglicher Rollen trägt, wo jede mit einem umschlungenen Seile an einem Ende mit einem festen Puncte verbunden ist, und an einem andern mit einer nächst darüber hängenden Rolle, wie in nebenstehender Figur: dann giebt, wenn die Seile parallel zu einander sind, jede Rolle einen mechanischen Vortheil von zwei zu eins; und das ganze System einen Vortheil, der durch die Potenz von 2 bezeichnet wird, welche der Anzahl der Rollen gleich ist. Hier also:

$$P : W = 1 : 2^4 = 1 : 16.$$

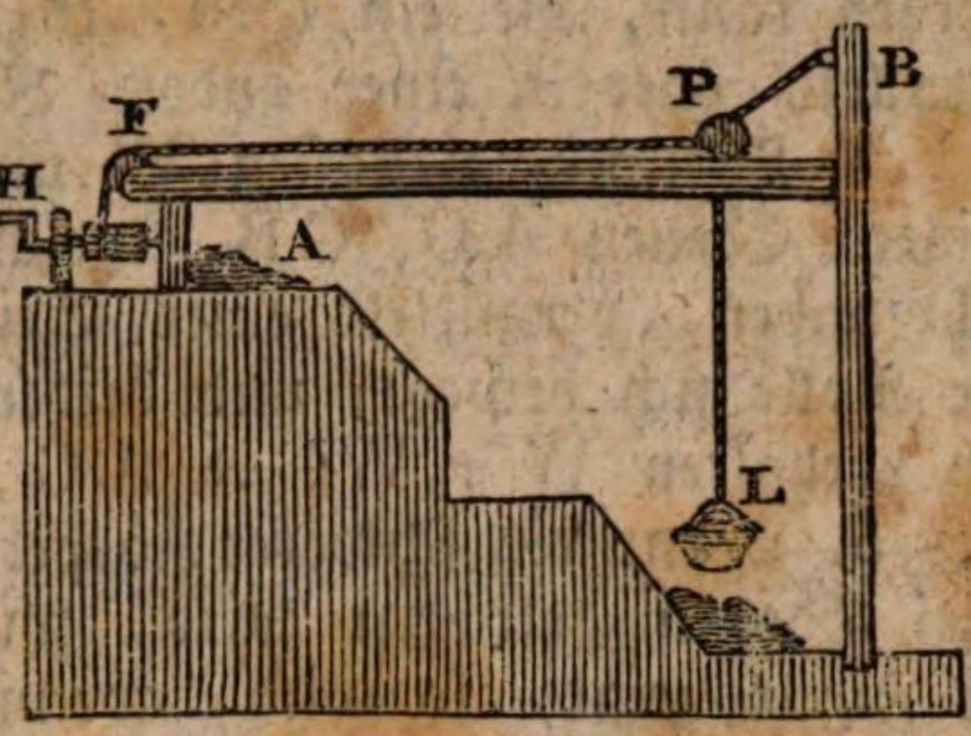
4. Wenn drei, vier oder eine andere Zahl Rollen an einem festen Kloben, und eine gleiche Anzahl an einem beweglichen Kloben sich befinden, der herauf und herab gehen kann, so heißt das System ein Flaschenzug; und die Last verhält sich zur Kraft, wie 1 zu zweimal der Anzahl der Rollen in jedem Kloben.

5. Die Reibung einer Verbindung von Rollen oder selbst einer einzelnen Rolle ist nach der gewöhnlichen Constructionsart sehr groß. Aber diese kann durch Garnett's privilegirte Frictions-Räder (friction rollers) sehr vermindert werden, welche sowohl zum Gebrauche der Maschinen, als auch wenn sie auf Rollen und Axen von Räderwagen angewendet werden, viel Arbeit und Kosten ersparen. Folgendes ist das Hauptsächlichste derselben: zwischen der Axe und dem Rade ist ein hohler Raum gelassen, der mit gleichen Rädern, die einander nahe berühren, ausgefüllt werden muß. Diese sind mit Axen versehen, die an beiden Enden in einen kreisförmigen Ring eingelassen sind, wodurch ihre relativen Abstände festerhalten werden; in paralleler Richtung aber werden diese Axen durch Metalldrähte (wires) erhalten, die durch die Ringe zwischen den Rädern gezogen, und an sie genietet sind. Nebenstehende Figur stellt die Erfindung dar.



6. Eine nützliche Verbindung des Rades an der Welle einer festen und beweglichen Rolle ist in der Figur am Rande

dargestellt. Die Last, z. B. Steine, um eine Mauer zu bauen, wird von L nach A auf folgende Art gehoben: Ein Seil BPL ist an einem Ende an einen Hacken B befestigt, und geht in P über eine Rolle; diese Rolle wird horizontal von P nach F durch einen Mann gezogen, der die Kurbel H dreht, und so das Seil PFH auf die Walze windet. Wie sich der Abstand PB verlängert, verkürzt sich der Theil PL, und das Seil ist genau so groß, daß wenn die Rolle P über A gebracht worden ist, der Korb L diesen Ort erreicht hat.



Geneigte Ebene.

1. Ein Körper, der eine Ebene nur in einem Puncte berührt, kann nur so lange im Gleichgewichte bleiben, als die Kräfte, die darauf wirken, sich auf eine einzige Kraft bringen lassen, die in einer Richtung wirken muß, die auf der Ebene im Berührungspuncte senkrecht ist.

2. Wenn eine Kraft einen schweren Körper auf einer geneigten Ebene im Gleichgewichte hält, so werden sich Kraft, Last und Druck auf die Ebene beziehungsweise wie der Sinus der Neigung der Ebene, der Cosinus des Winkels, den die Richtung der Kraft mit der Ebene bildet, und der Cosinus desjenigen Winkels verhalten, den die Richtung der Kraft mit dem Horizonte bildet.

3. Wenn die Richtung der Kraft der Ebene parallel ist, so verhalten sich die Kraft, Last und Druck auf die Ebene beziehungsweise wie die Höhe, die Länge und Grundlinie der Ebene, oder wie der Sinus der Neigung, der Halbmesser und Cosinus der Neigung.

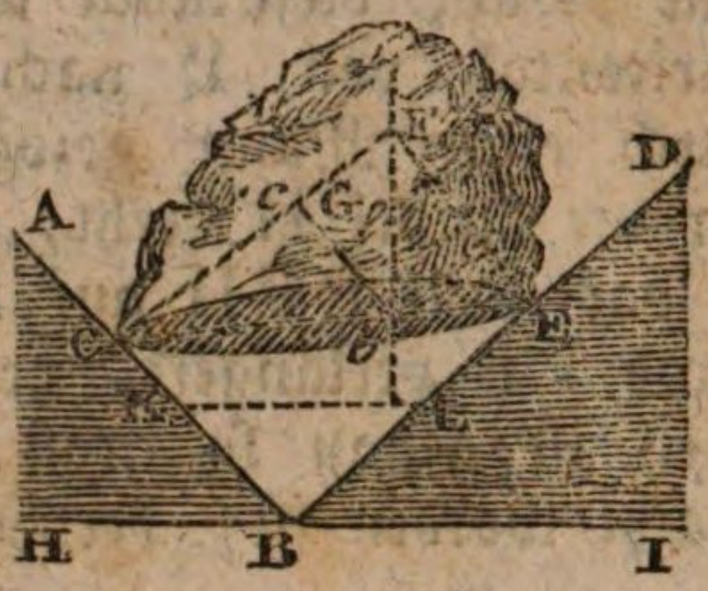
So werde z. B. ein 12 Fuß langes Bret schräg gegen ein 4 Fuß hohes Fenster gelehnt, so wird, da die Länge gleich der dreifachen Höhe ist, eine Kraft von 50 Pfund dreimal so viel, oder 150 Pfund auf dem Brete festhalten, und eine größere Kraft, wie 55 oder 60 Pfund würde bewirken, daß die Last aufstiege.

Die Wahrheit dieser Sätze kann sehr leicht dadurch bestätigt werden, daß man die Last an ein Seil befestigt, das an eine Stahlfeder gebunden ist, wodurch mit einem Male das Verhältniß zwischen der ganzen Last und derjenigen gemessen

werden kann, die ein Seil, es mag nun der geneigten Ebene parallel, oder in einer andern Richtung liegen, trägt.

4. Wenn zwei Lasten W und W′ einander auf zwei geneigten Ebenen AC, CB, welche eine gemeinschaftliche Höhe CD haben, vermittels eines Seiles tragen, das frei über einer Rolle sich bewegt, und beiden Ebenen parallel ist, so wird sich verhalten $W : W' = AC : CB$.

5. Wenn ein schwerer Körper von zwei Ebenen getragen wird, wie es die Figur zeigt, so wird, wenn die Last des Körpers durch den Sinus des zwischen den beiden Ebenen eingeschlossenen Winkels dargestellt wird, der Druck auf jede derselben den Sinusen der Neigungen dieser Ebenen gegen den Horizont umgekehrt proportional seyn, nämlich:



$$\left.\begin{matrix}\text{die Last}\\ \text{der Druck auf AB}\\ \text{der Druck auf BD}\end{matrix}\right\} \text{verhalten sich, wie} \left\{\begin{matrix}\sin ABD\\ \sin DBI\\ \sin ABH.\end{matrix}\right.$$

Es sey z. B. der Winkel $ABH = 30°$, $DBI = 60°$, und folglich $ABD = 90°$; da die natürlichen Sinus von 90°, 60° und 30° sind 1, 0,866 und $\frac{1}{2}$, oder beinahe sich wie 100, 86,6 und 50 verhalten, so wird der Druck auf AB, wenn der schwere Körper 100 Pfund wiegt, 86,6 Pfund und auf BD 50 Pfund seyn.

Dieser Satz ist von sehr ausgebreitetem Nutzen, indem er den Druck von Bogen auf ihre Pfeiler und von Stützen gegen Mauern oder auf den Boden u. s. w. darstellt, und der Umstand, daß eine der Ebenen entweder horizontal oder vertical wird, das allgemeine oben erwähnte Verhältniß nicht stört.

Keil.

1. Ein Keil ist ein dreieckiges Prisma, oder ein Körper, den man sich durch die sich selbst parallele Bewegung eines ebenen Dreiecks auf einer geraden Linine entstanden denkt, die durch eine seiner Winkelspitzen geht. Der Keil heißt gleichschenklich, rechtwinklich oder ungleichseitig, je nachdem das erzeugende Dreieck gleichschenklich, rechtwinklich oder ungleichseitig ist. Sehr häufig dient er zum Spalten des Holzes, wie es die Figur zeigt, und oft zum Heben großer Lasten.

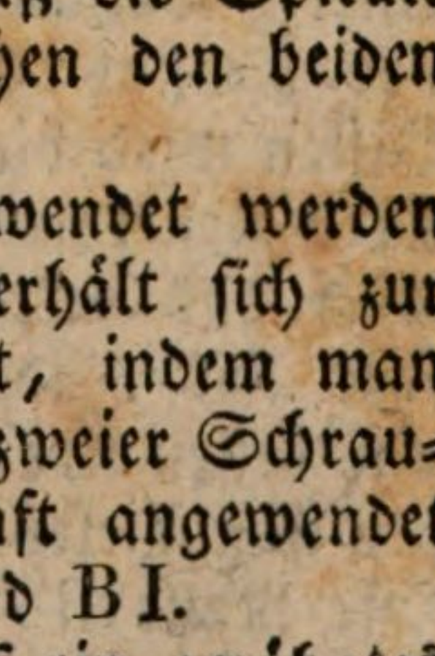
2. Wenn die Fläche eines Keiles auf einen Widerstand

leistenden Körper mit einer Kraft unter rechten Winkeln auf seine Richtung wirkt, so verhält sich im Falle des Gleichgewichts die Kraft zu dem Widerstande, wie der Sinus des halben Winkels des Keiles zu dem Sinus desjenigen Winkels, den die Richtung des Widerstandes mit der Fläche des Keiles bildet; und die wirkende Kraft verhält sich wie der Cosinus des letztern Winkels.

3. Wenn der Widerstand gegen die Oberfläche des Keiles von einem Körper herrührt, der nicht festgehalten wird, sondern auf der Stelle, wo er liegt, bleibt, ohne auszuweichen, so verhält sich im Zustande des Gleichgewichts die Kraft zum Widerstande, wie der Cosinus des Unterschieds zwischen dem halben Winkel des Keiles und dem Winkel, den die Richtung des Widerstandes mit der Oberfläche des Keiles macht, zum Halbmesser.

4. Wird der Widerstand leistende Körper weder gehalten, noch unterstützt, sondern weicht längs der Oberfläche des Keiles aus, so verhält sich die Kraft zu dem Widerstande, wie das Product der Sinus des halben Winkels des Keiles und desjenigen Winkels, unter dem der Widerstand gegen die Oberfläche des Keiles geneigt ist, zu dem Quadrate des Halbmessers.

Schraube.

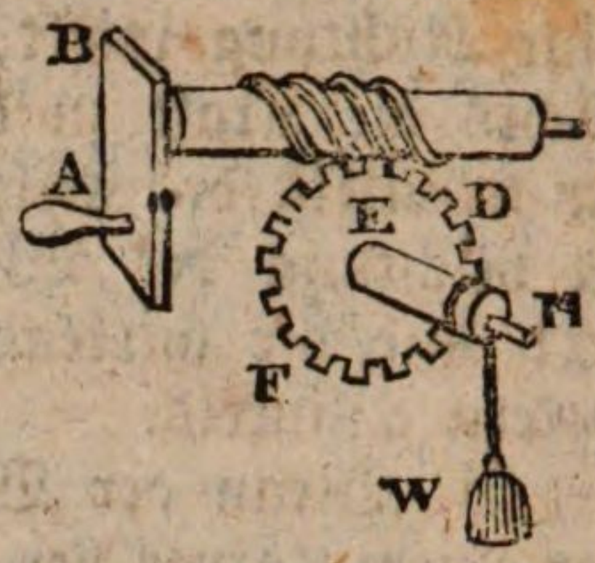


1. Die Schraube ist ein Spiral-Gang oder eine Rinne, die rund um in den Cylinder gearbeitet ist, und überall mit der Länge desselben einen und denselben Winkel bildet, so daß, wenn man mit diesem Spiralgange die Oberfläche abwickelte und in eine Ebene ausbreitete, der Spiralgang das Bild einer geneigten Ebene darstellen würde, dessen Länge sich zu seiner Höhe, wie der Umkreis des Cylinders zu dem Abstande zwischen zwei Schraubengängen verhält; wie es auch augenscheinlich ist, wenn man überlegt, daß die Spirale sich längs dem Cylinder um den Abstand zwischen den beiden Gängen erhebt.

2. Die Energie einer Kraft, welche angewendet werden muß, um eine Schraube herum zu drehen, verhält sich zur Kraft, mit der sie auf- oder niederwärts drückt, indem man die Friction bei Seite setzt, wie sich der Abstand zweier Schraubengänge zu dem Umkreise verhält, wo die Kraft angewendet wird, nämlich wie Umkreis von DC zu Abstand BI.

3. Die Schraube ohne Ende wirkt auf ein gezähntes Rad, DF, und dreht es herum, ohne eine hohle oder weibliche Schraube. Sie hat ihren Namen daher erhalten, weil

sie immer herum gedreht werden kann, ohne zu einem Ende zu kommen. Aus der Zeichnung leuchtet ein, daß während die Schraube sich einmal herum dreht, das Rad um die Entfernung eines Zahns vorwärts rückt.



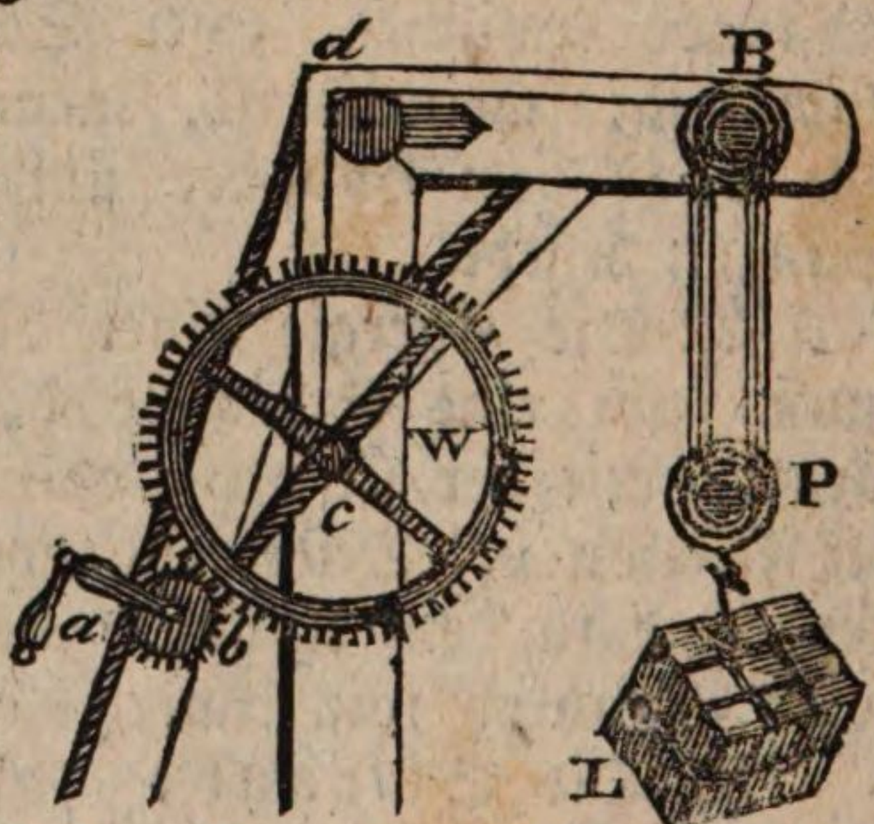
4. Wenn die Kraft, die an dem Hebel oder der Kurbel einer Schraube ohne Ende AB angebracht wird, zu der Last in einem Verhältnisse steht, das aus dem der Peripherie der Axe der Welle EH zu der Peripherie, die von der Kraft bei dem Drehen der Kurbel beschrieben wird, und aus dem Verhältniß der Umdrehungen des Rades DF zu den Umdrehungen der Schraube CB zusammengesetzt ist, so wird die Kraft der Last das Gleichgewicht halten. Daher

5. Da die Bewegung des Rades sehr gering ist, so wird eine kleine Kraft eine sehr große Last vermittels einer Schraube ohne Ende heben. Demnach ist der hauptsächlichste Gebrauch einer solchen Schraube entweder, eine große Last durch einen kleinen Raum zu heben, oder eine geringe sanfte Bewegung hervor zu bringen. Daher leistet sie in Thurm- und Taschenuhren gute Dienste.

Bewundernswürdig ist der Nutzen der Schraube bei den Mikrometern und der Einrichtung astronomischer und anderer Instrumente von feiner Construction.

6. Der mechanische Vortheil einer zusammengesetzten Maschine kann durch Analysirung ihrer Theile bestimmt werden, indem man den mechanischen Vortheil eines jeden Theils besonders sucht, und dann alle Verhältnisse verbindet oder zusammensetzt. Wenn z. B. m zu 1, n zu 1, r zu 1, und s zu 1 die besondern Vortheile anzeigen, so wird mnrs zu 1, den Vortheil der Zusammensetzung ausdrücken.

7. Nebenstehende Zeichnung einer gewöhnlichen Construction eines Krahns zum Heben schwerer Lasten wird dies erläutern. Durch Menschenkraft an der Kurbel a wird das Getriebe b gedreht; dies setzt das Rad W in Bewegung, um dessen Axe c ein Seil gewunden ist; dieses Seil geht über eine feste Rolle d, und von da über den festen dreifachen Kloben B, und den beweglichen dreifachen Kloben P, unter dem die Last L hängt. Wenn nun der Halbmesser der Kurbel 6 mal so



groß als der des Getriebes, der Halbmesser des Rades W 10 mal so groß als der seiner Axe und eine Kraft gleich 30 Pfund an a angebracht ist, so wird man, da ein Flaschenzug mit drei Rollen einen mechanischen Vortheil von 6 zu 1 giebt, haben: $30 \times 6 \times 10 \times 6 = 10800$ Pfund, und so groß könnte die Last L seyn, die von einer in a angebrachten Kraft von 30 Pfund gehoben würde, wenn sie nicht durch die Reibung einen Verlust erlitte.

4. Abschnitt. Allgemeine Anwendung der Grundlehren der Statik auf das Gleichgewicht von Bauwerken.

Jedes Gebäude ist der Wirkung eines Systems von Kräften ausgesetzt, so daß die Prüfung seiner Stabilität die Anwendung der allgemeinen Bedingungen des Gleichgewichts erheischt.

Nun kann kein Theil eines Gebäudes seinen Ort auf andere Weise, als durch eine fortschreitende oder durch Drehungsbewegung ändern. Denn der Theil wird entweder aus seiner Stelle gebracht ohne seine Gestalt zu verändern, in welchem Falle er sich wie ein System von Körpern von unveränderlicher Gestalt verhält, das keine augenblickliche Bewegung, die nicht entweder fortschreitend oder drehend wäre, annehmen kann; oder dieser Theil wird aus seiner Stelle gebracht, und verändert zu gleicher Zeit seine Gestalt; wegen der Cohäsion kann dann derselbe keine andere Stelle einnehmen, ohne an seinem schwächsten Theile zu brechen; dies erzeugt eine fortschreitende Bewegung, wenn die Kraft senkrecht auf die schwache Stelle wirkt, und eine Drehung, wenn es schief geschieht.

Wir wollen hier die am häufigsten vorkommenden Fälle betrachten, und Druck diejenige Kraft nennen, die dem Gebäude eine Bewegung zu ertheilen strebt, Widerstand aber diejenige, welche dieselbe verhindert.

Gleichgewicht bei Pfeilern.

1. Es sey nebenstehende Figur der verticale Schnitt eines Pfeilers, dann können wir von diesem Schnitte wie vom Pfeiler selbst sprechen, wenn dieser von gleichförmiger Structur ist.

G sey der Schwerpunct, SRZ die Richtung, in der der Druck wirkt, welcher XI, die verticale Linie durch den Schwerpunct, in I trifft. Denkt

man sich dann den Druck als in zwei Kräfte, in eine verticale P, und in eine horizontale Q zerlegt, so kann der Pfeiler (wenn man ihn als einen Körper betrachtet) entweder nur eine fortschreitende Bewegung von B nach A, oder eine Drehung um A erleiden.

2. Die fortschreitende Bewegung erhält durch Reibung Hinderniß. Wenn W das Gewicht des Pfeilers, P den verticalen Druck, Q den horizontalen bezeichnen, so ist der Druck auf die Grundfläche $= W + P$ und die Reibung $= f(W + P)$, welches die Größe des Widerstandes gegen die fortschreitende Bewegung ist, so daß wir in dieser Rücksicht zur Sicherung der Stabilität haben müssen

$$f(W + P) > Q \quad \ldots\ldots (1)$$

indeß zur Stabilität in Betreff der Drehung erfordert wird:

$$W \,.\, AX + P \,.\, AE > Q \,.\, ES \quad \ldots\ldots (2).$$

3. Die zweite Bedingung kann man auf folgende Art durch Zeichnung darthun:

Von dem Puncte A fälle man auf die Richtung des Drucks die Senkrechte AZ. Nimmt man dann S für den ganzen Druck, so wird seyn: $W \,.\, AX > S \,.\, AZ$.

Oder bringt man die beiden Kräfte M und S in I an, und vollendet das Parallelogramm, welches Seiten hat, die diese Kräfte darstellen, so muß die verlängerte Diagonale die Grundlinie auf dieser Seite von A gegen B zu treffen, um Gleichgewicht zu erzeugen.

4. Wenn, wie es sehr häufig der Fall ist, der verticale Schnitt des Pfeilers ein Rechteck ist, und S das specifische Gewicht des Materials, woraus derselbe besteht, bezeichnet, so wird die Bedingung der beiden Arten des Gleichgewichts durch folgende zwei Gleichungen dargestellt, nämlich:

$$f \,.\, CB \,.\, AB \,.\, S = Q \quad \ldots\ldots (3)$$

$$AB^2 \,.\, S = 2Q \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Beispiel. Man denke sich eine rechteckige Wand, 39,4 Fuß hoch, deren Masse ein specifisches Gewicht $= 2000$ hat*), habe an ihrem obersten Rande einen horizontalen Druck von 9900 Pfund auf jede Längeneinheit von 1 Fuß auszuhalten; wie groß muß die Dicke der Mauer seyn, damit Gleichgewicht statt finden kann, wenn man $f = \frac{3}{4}$ setzt.

Hier, da die Mauer nicht horizontal bewegt werden kann, muß seyn:

---

*) Das des Wassers $= 1000$ gesetzt.

(D.)

$$AB > \frac{Q}{f.S.CB} > \frac{9900}{\frac{3}{4} \times \frac{2000}{16} \times 39{,}4} > \frac{3300}{\frac{2000 \times 39{,}4}{64}}$$

$$> \frac{3300 \times 32}{39400} > \frac{52800}{39400} > 1{,}34 \text{ Fuß.}$$

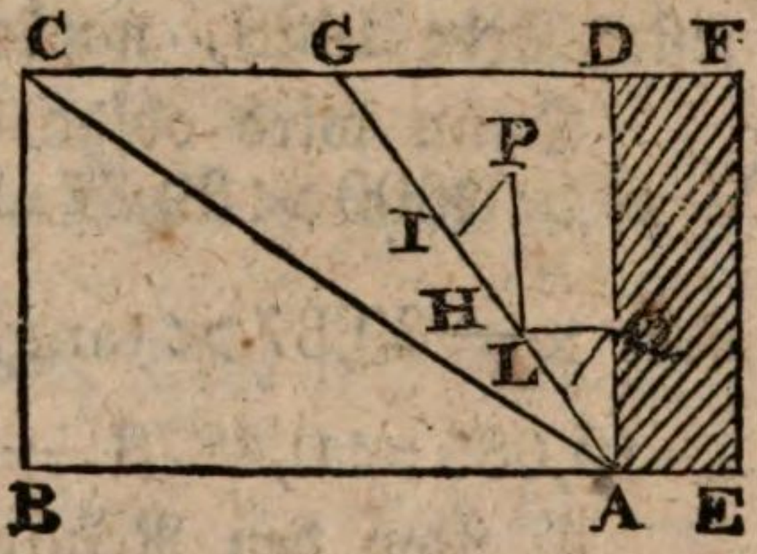
Und damit sie zweitens nicht umgeworfen werden kann, muß seyn:

$$AB \sqrt{\frac{2Q}{S}} > \sqrt{\frac{19800}{125}} > \sqrt{158{,}4} > 12{,}58 \text{ Fuß.}$$

Hier, wo die Dicke, welche verlangt wird, um das Umwerfen zu verhindern, bei weitem am größten ist, kann die Rechnung in Beziehung auf die andere Art des Gleichgewichts gewöhnlich vermieden werden.

Druck der Erde gegen Wände.

1. DAEF sey der verticale Durchschnitt einer Mauer, hinter der ein Damm oder eine Erhöhung von Erde liegt, von dem sich ein Prisma, dessen Durchschnitt durch DAG dargestellt ist, losmachen und herabfallen würde, wäre es nicht durch die Mauer verhindert. Dann heißt AG die Linie des Bruchs oder der natürliche Abhang oder die Böschung. Bei sandiger oder lockerer Erde übersteigt der Winkel BAG selten 30°; bei festerer Erde wird er 37°, und in einigen günstigen Fällen mehr als 45°.



2. Nun hat das Prisma, dessen verticaler Schnitt DAG ist, ein Streben, längs der geneigten Ebene GA durch die Kraft der Schwere, g, herab zu sinken; wird aber erstlich von der durch die Wand entgegengesetzten Kraft q, und zweitens durch seine Cohäsion an der Oberfläche AG und seine Reibung auf derselben zurückgehalten. Jede dieser Kräfte kann zerlegt werden in eine auf GA senkrechte, die bei dieser Untersuchung unwirksam, und in eine andere, deren Wirkung der GA parallel ist. Die Linien PI und IH bezeichnen diese Seitenkräfte von p, welche Kraft durch die Verticallinie PH, die vom Schwerpunct P des Prismas gezogen ist, dargestellt wird. Die Richtung der Kraft q wird durch die Horizontallinie QH, und ihre Seitenkräfte durch die Linien QL, HL angedeutet. Die Kraft, die dem Dreiecke sein Streben herab zu sinken ertheilt, ist IH; und dieser werden die Kraft SH und die Wirkungen der Friction und Cohäsion entgegengesetzt. Also:

$$IH = LH + \text{Cohaesion} + \text{Friction}.$$

Es leuchtet daher ein, daß diese Untersuchung großentheils mit Versuchen geführt werden muß.

3. Jedoch hat Prony*) theoretisch gefunden, und Versuche haben es bestätigt, daß der Winkel, den das Erdprisma, das den größten Horizontal-Druck gegen die Wand ausübt, mit der Verticale macht, halb so groß ist, als der Winkel, den der natürliche Anhang der Erde mit der Verticale bildet; und dieses merkwürdige Resultat vereinfacht sehr die ganze Untersuchung.

Der Zustand des Gleichgewichts wird durch folgende Gleichung ausgedrückt:

$$\tfrac{1}{2} AD \,.\, AE^2 \,.\, S = \tfrac{1}{6} AD^3 \,.\, s \,.\, \text{tang.}\tfrac{1}{2} DAG^2,$$

wo S und s die specifischen Gewichte der Wand und der Erde beziehungsweise ausdrücken.

Beispiel. Es sey die Wand 39,37 Fuß, von Backsteinen, das specifische Gewicht 2000, das der Erhöhung von fester Erde 1428, natürlicher Abhang vom Scheitel aus 53°.

Dann wird obige Gleichung:

$$\tfrac{1}{2} x^2 \times 2000 \times 39{,}37 = \tfrac{1}{6} \times 39{,}37^3 \times 1428 \times \text{tang.}\, 26\tfrac{1}{2}^2$$

$$\text{oder } x = 39{,}37 \times \text{tang.}\, 26\tfrac{1}{2}^\circ \sqrt{\frac{1428}{3 \times 2000}} = \frac{39{,}37}{2} \sqrt{\frac{1428}{6000}}$$

$$= 19{,}685 \times 0{,}4878 = 9{,}6 \text{ Fuß, Dicke der Wand.}$$

4. Von den Resultaten aus Versuchen sind die besten, die uns vorgekommen sind, von Mayniel, aus denen folgende Puncte entlehnt sind. Es wird dabei vorausgesetzt, daß die obere Fläche der Erde und der Wand, die jene unterstützt, in Einer horizontalen Ebene liegen.

Erstlich. Theorie und Experimente zeigen, daß die Mittelkraft HQ des Drucks eines Erdhaufens hinter einer verticalen Wand in einem Abstande AQ von dem Fuße der Wand $= \tfrac{1}{3} AD$, der Höhe, ist.

Zweitens. Die Reibung ist halb so groß als der Druck bei vegetabilischer Erde, aber vier Zehntel so groß bei Sand.

Drittens. Die Cohäsion, welche vegetabilische Erde, in Stücke geschnitten, die wohl auf einander geschichtet sind, erreicht, vermindert den Druck um volle zwei Drittel.

Viertens. Die Linie des Bruchs hinter einer Mauer, die einen Damm vegetabilischer Erde unterstützt, wird in einem

---

*) Einen Beweis findet man S. 358 Theil II. von meiner Ausgabe von Dr. Hutton's Cursus der Mathematik.

Abstande D G, von der innern Fläche der Mauer gleich 0,618 h, gefunden, wenn h die Höhe der Wand bezeichnet.

Fünftens. Ist der Damm von Sand, so ist D G = 0,677 h.

Sechstens. Ist der Damm von vegetabilischer Erde mit feinem Kiese vermischt, so ist D G = 0,414 h.

Siebentens. Besteht er aus Schutt, so ist D G = 0,646 h.

Achtens. Besteht er aus vegetabilischer Erde mit grobem Kiese vermischt, so ist D G = 0,618 h.

Dicke von Wänden, wenn beide Seitenflächen vertical sind.

1. Wand von Backsteinen, Gewicht eines Cubikfußes = 109 Pfund avoirdupoids; bei einem Damme von vegetabilischer Erde, sorgfältig reihenweise geschichtet D F = 0,16 h.

2. Wand von unbehauenen Steinen, ein Cubikfuß = 135 Pfund, Erde wie vorher D F = 0,15 h.

3. Wand von Backsteinen, gut zusammen gerammte Lehmerde D F = 0,17 h.

4. Wand von unbehauenen Steinen, Erde wie oben D F = 0,16 h.

5. Wand von behauenen Quadersteinen, ein Cubikfuß = 170 Pfund, der Damm von vegetabilischer Erde, D F = 0,13 h; ist der Damm von Lehm D F = 0,14 h.

6. Damm von Erde, mit grobem Kiese vermischt:

Wand von Backsteinen	D F = 0,19 h
unbehauenen Steinen . .	D F = 0,17 h
behauenen Quadersteinen .	D F = 0,16 h

7. Damm von Sand:

Wand von Backsteinen	D F = 0,33 h
unbehauenen Steinen . . .	D F = 0,30 h
behauenen Quadersteinen .	D F = 0,26 h.

Ist die Erde des Dammes dem Eindringen des Wassers unterworfen, so muß die Dicke der Mauer wenigstens doppelt so groß seyn. *)

8. Bei Wänden mit einem innern Abhange, oder einem Abhange gegen den Damm, sey die Grundfläche des Abhanges

---

*) Sind Gewichte französischer Cubikfuße in Kilogrammen gegeben, so wird $\frac{20}{11}$ davon das entsprechende Gewicht eines englischen Cubikfußes in Pfunden des gewöhnlichen Gewichtes seyn.

$\frac{1}{n}$ der Höhe; S und s wie vorher die specifischen Gewichte der Wand und der Erde, dann ist:

$$DF = h\sqrt{\frac{1}{3n^2} + m\frac{s}{S}} - \frac{h}{n};$$

wo m = 0,0424 für vegetabilische oder lehmige Erde mit grobem Kiese vermischt; = 0,0464 für Erde mit feinem Kiese vermischt; = 0,1528 für Sand und = 0,166 für halbflüssige Erden ist.

Beispiel. Es sey die Höhe einer Wand 20 Fuß und $\frac{1}{20}$ der Höhe die Grundlinie des Abhanges, ferner sey das specifische Gewicht der Wand und des Dammes 2600 und 1400, und die Erde halbflüssig; welche muß dann die Dicke der Mauer an dem obersten Theile seyn?

Hier wird aus der Formel werden:

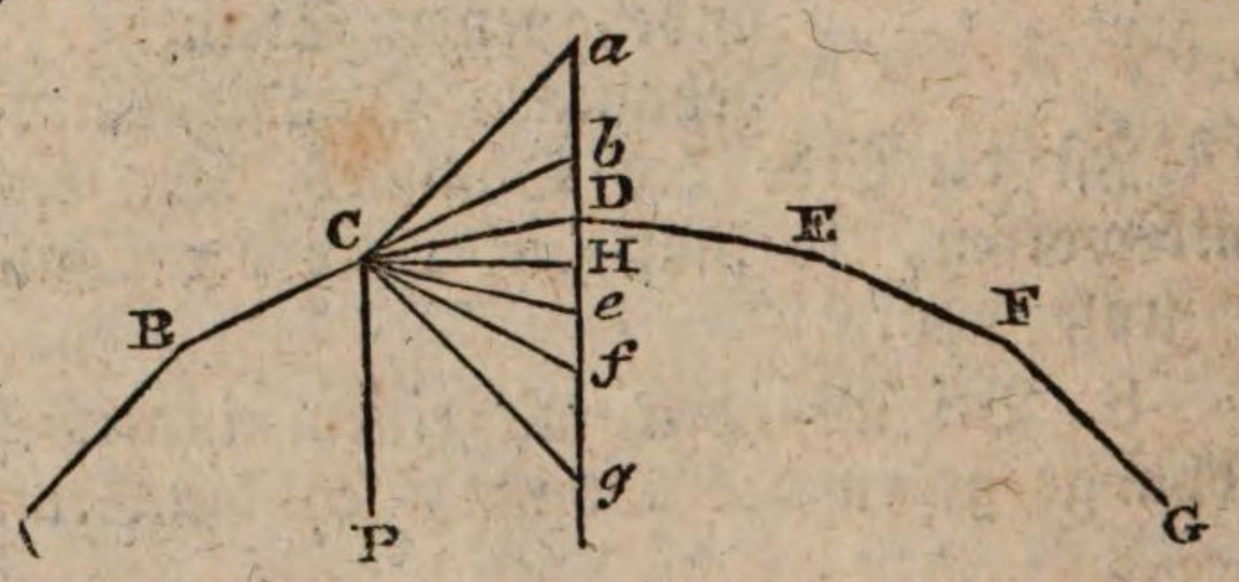
$$DF = 20\sqrt{\frac{1}{1200} + 0{,}166 \cdot \tfrac{14}{26}} - \tfrac{20}{20}$$

$$= 20\sqrt{0{,}0008333 + 0{,}0894} - 1 = 20 \times 0{,}3 - 1$$

$= 6 - 1 = 5$ Fuß; während die Dicke der Wand am untersten Theile 6 Fuß seyn wird.

Gleichgewicht von Polygonen.

1. Es seyen eine Anzahl Linien oder Stangen, oder Balken AB, BC, CD, DE, u. s. w. alle in derselben Verticalebene unter einander verbunden, und frei um die Verbindungspuncte oder Winkel A, B, C, D, E, u. s. w. beweglich, und durch Gewichte an den Winkeln im Gleichgewicht erhalten. Man verlangt das Verhältniß dieser Gewichte zu bestimmen, ferner die Kraft in der Richtung der genannten Linien und den Horizontal-Druck an jedem Winkel.



Durch einen Punct D ziehe man eine verticale Linie a D H g u. s. w., nach der man von einem Puncte C parallel zu den gegebenen Linien oder Stangen Linien zieht, nämlich Ca parallel zu AB, Cb parallel zu BC, Ce zu DE, Cf zu EF, Cg zu FG u. s. w.; eben so CH parallel zu dem Horizonte, oder senkrecht auf die verticale Linie a d g, in der sich also alle Parallelen endigen.

Dann werden alle diese Linien genau den Kräften proportional seyn, die in den Richtungen, denen sie parallel sind, wirken, und zwar aller drei Arten, nämlich der verticalen, horizontalen und schiefen. Die schiefen Kräfte oder Drucke also in der Richtung der Stangen ..... AB, BC, CD, DE, EF, FG, sind proportional ihren Parallelen Ca, Cb, CD, Ce, Cf, Cg; und die verticalen Gewichte an
den Winkeln ..... B, C, D, E, F, u. s. w.
verhalten sich wie die Theile der
Verticalen ..... ab, bD, De, ef, fg,
und das Gewicht der ganzen Vorrichtung ..... ABCDEFG,
ist der Summe aller Verticalen oder a g proportional; auch ist der horizontale Druck an jedem Winkel überall dieselbe beständige Größe, und wird durch die unveränderliche Horizontallinie CH ausgedrückt.

Zusatz 1. Es ist merkwürdig, daß die Längen der Stangen AB, BC u. s. w. die Verhältnisse dieser Gewichte oder Drucke nicht verändern, da alle Linien Ca, Cb, ab, u. s. w. dieselben bleiben, wie groß auch AB, BC u. s. w. seyn mögen. Die Lagen der Stangen und die Gewichte an den Winkeln hängen gegenseitig eben so von einander ab, wie die horizontalen und schiefen Drucke. Wenn daher die Lage von DC und die Gewichte oder Lasten gegeben sind, die sich an den Winkeln D, C, B befinden, so trage man diese an die Verticale DH, Db, ba, dann werden Cb, Ca eben sowohl die Richtungen oder Lagen von CB, BA, als die Größe oder das Verhältniß CH des unveränderlichen horizontalen Druckes angeben.

Zusatz 2. Wird CH zum Halbmesser genommen, so leuchtet ein, daß Ha die Tangente, und Ca die Secante der Erhöhung von Ca oder AB über dem Horizonte ist; eben so ist Hb die Tangente und Cb die Secante der Erhöhung von Cb oder CB; ferner HD und CD die Tangente und Secante der Erhöhung von CD; He und Ce die Tangente und Secante der Erhöhung von Ce oder DE; Hf und Cf die Tangente und Secante der Erhöhungen von EF, u. s. f.; eben so sind die Theile der Verticalen ab, bD, ef, fg, die die Gewichte, welche an den verschiedenen Winkeln angebracht sind, bezeichnen, die Differenzen der genannten Tangenten der Erhöhungen. Daher im Allgemeinen:

Erstlich. Die schiefen Drucke, in den Richtungen der Stangen, verhalten sich zu einander direct wie die Secanten ihrer Höhen-Winkel über der Horizontal-Richtung; oder, was dasselbe ist, umgekehrt wie die Cosinuse derselben Erhöhungen, oder umgekehrt wie die Sinuse der verticalen Winkel

a, b, D, e, f, g, u. s. w., die die Verticale mit den verschiedenen Richtungen der Stangen bildet, weil die Secanten von Winkeln immer den Cosinusen derselben umgekehrt proportional sind.

Zweitens. Das Gewicht oder die Last an jedem Winkel ist der Differenz zwischen den Tangenten der Erhöhungen der beiden Linien, welche den Winkel bilden, über dem Horizonte, direct proportional.

Drittens. Der horizontale Druck an jedem Winkel ist dieselbe unveränderliche Größe, und hat zu dem Gewichte an der Spitze der obersten Stange das Verhältniß des Halbmessers zur Tangente der Erhöhung dieser Stange. Oder, die ganze Verticale ag verhält sich zur Linie CH, wie das Gewicht der ganzen Stangenverbindung zu dem horizontalen Drucke.

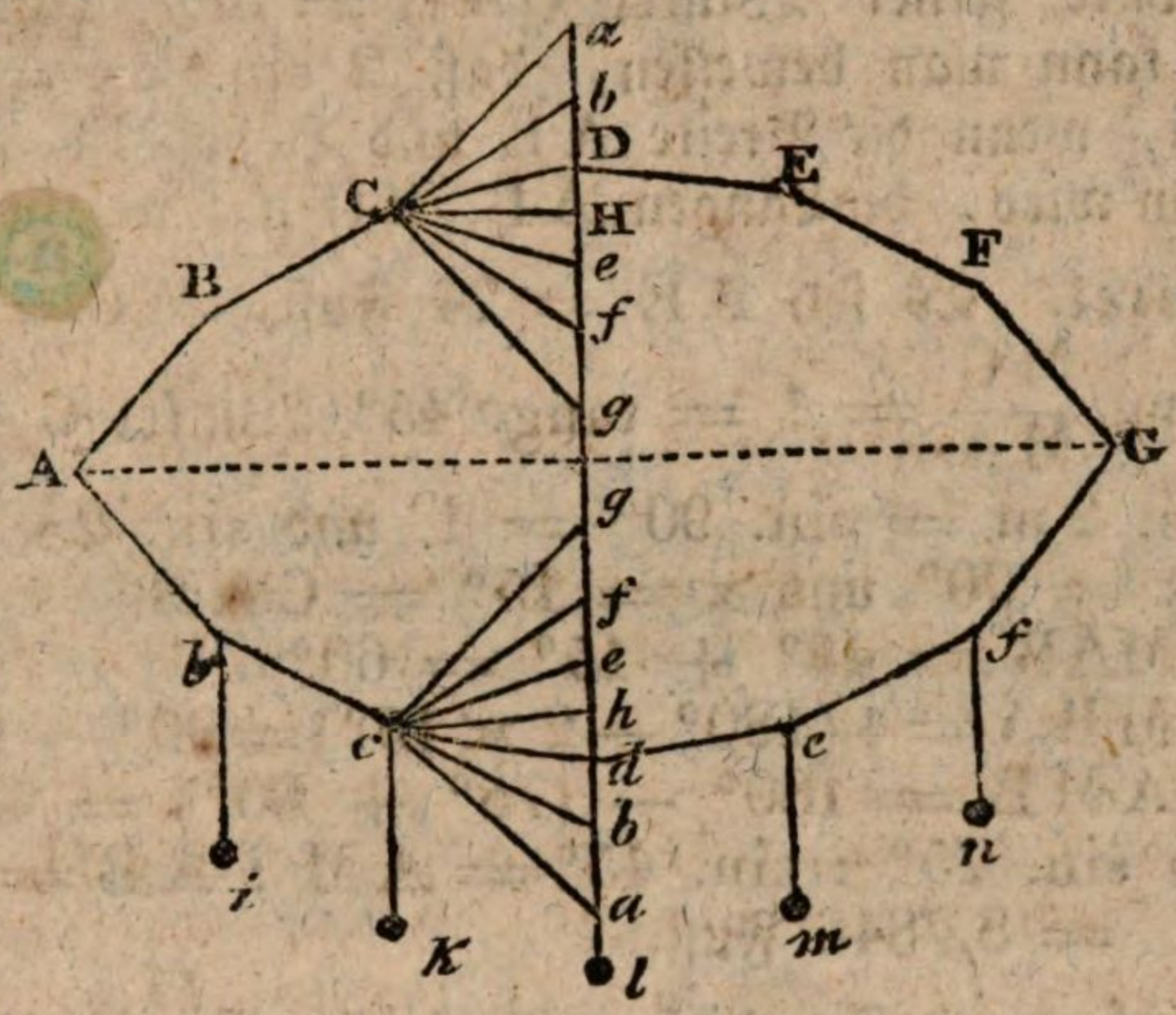
Viertens. Auch kann daraus hergeleitet werden, daß das Gewicht oder der Druck an einem Winkel dem beständigen Producte des Sinus dieses Winkels und der Secanten der Erhöhungen der Stangen oder Linien, die denselben bilden, direct proportional ist.

Anmerkung. Dieser Satz ist in seinen praktischen Folgerungen sehr fruchtbar, und enthält in der That die ganze Theorie der Bogen, welche leicht aus dem Vorhergehenden abgeleitet werden kann, wenn man die zusammengefügten Stangen als sehr klein, wie Bogensteine, annimmt, so daß sie die Curve eines Bogens bilden. Auch ergiebt sich, daß der horizontale Druck, welcher beständig oder unveränderlich derselbe ist, eine eigene Maß-Einheit wird, nach dem die übrigen Drucke und Pressungen, da sie alle daraus und aus den gegebenen Lagen bestimmt werden können, geschätzt werden; und sein Werth kann, wie oben sich ergab, leicht aus dem obersten oder verticalen Theile allein, oder aus der ganzen Verbindung zusammengenommen, oder aus einem Theile des Ganzen berechnet werden, indem man von oben nach unten geht.

In allen nöthigen Fällen kann ein Modell von dem Bauwerk gemacht, und die Verhältnisse der Drucke in jedem Winkel, sie seyen nun horizontal, vertical oder in den Richtungen der Stangen, durch eine Stahlfeder bestimmt werden, die nach und nach in den verschiedenen Richtungen nach der oben in der Statik Abschn. 1. Art. 4. beschriebenen Art angewendet wird.

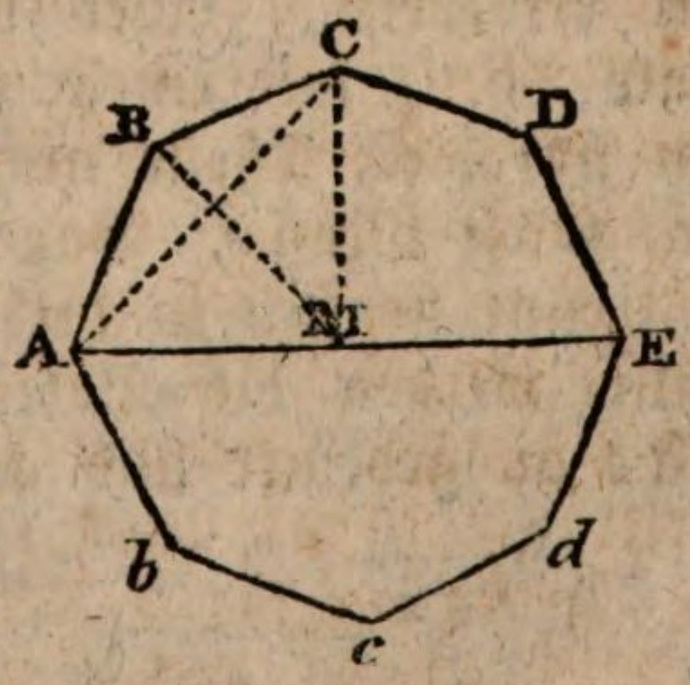
2. Wenn die ganze Figur in dem vorhergehenden Paragraph umgewendet, oder um die Horizontal-Linie AG, als um eine Axe, gedreht wird, bis sie vollkommen in derselben verticalen Ebene unter der ersten Lage ist, so liegt jeder Winkel D, A u. s. w. in derselben Verticale; und werden Gewichte i, k, l, m, n, welche den Gewichten an den Winkeln B, C,

D, E, F der ersten Figur gleich sind, durch Fäden an die entsprechenden Winkel b, c, d, e, f der untern Figur gehangen, so erhalten diese Gewichte die Figur eben so, wie vorher, in vollkommenem Gleichgewichte, und alle Spannungen oder Kräfte in dem letztern Falle werden, sie mögen vertical, horizontal oder schief seyn, genau den entsprechenden Kräften des Gewichts, oder des Drucks in den ähnlichen Richtungen der ersten Figur gleich seyn.



Dies ist wiederum ein äußerst fruchtbarer Satz in seinen Folgerungen, vorzüglich für die praktische Mechanik, weil er die Mühe der unangenehmen Rechnungen vermeidet, und doch die Resultate durch Versuche gleich genau darstellt. Er kann ebenso zu der praktische Bestimmung von Bogen von Brücken, über die eine Heerstraße gehen soll, und der Lage der Sparren eines Mansarden-Daches dienen.

3. Es soll z. B. ein solches Dach mit einer gegebenen Breite AE und aus vier gegebenen Balken AB, BC, CD, DE, gemacht werden. Hier nehme man vier Stücke, welche gleich sind, oder mit dem gegebenen in den bestimmten Verhältnissen stehen, und verbinde sie in den Puncten A, B, C, D, E durch Nägel oder Stricke dicht an einander, so daß sie sich frei um dieselben herumbewegen können, hierauf hänge man dies an zwei Nägel AE, die in einer Horizontallinie befestigt sind, auf, und die Kette der Stücke wird sich von selbst in so eine Gestalt A b c d E ordnen, daß alle ihre Theile im Gleich-



gewichte bleiben werden. Kehrt man dann die Figur um, so wird sie die Gestalt eines Daches A B C D E darstellen, das ebenfalls im Gleichgewichte seyn wird, da die Druckkräfte der Stücke sich jetzt eben so im Gleichgewichte erhalten, als es durch die gegenseitigen Anspannungen der hängenden Kettenlinie A b c d E der Fall war.

4. Bestände das Mansardendach aus vier gleichen Sparrwerken, wäre ferner Winkel C A E = m, Winkel C A B = x, so kann man beweisen, daß 2 sin. 2x = sin. 2m ist; so daß, wenn die Breite A E und Höhe M C gegeben ist, es leicht seyn wird, die Längen A B, B C u. s. w. zu berechnen.

Beispiel. Es sey A E = 24 Fuß, M C = 12

dann $\frac{MC}{MA} = 1 =$ tang. 45° Winkel C A M = m

sin. 2m = sin. 90° = 1, und sin. 2x = $\frac{1}{2}$.

2x = 30° und x = 15° = C A B

daher M A B = 45° + 15° = 60°

und M B A = $\frac{1}{2}$ (180° − 2 × 15°) = 90° − 15° = 75°

und A M B = 180° − (75° + 60°) = 45°.

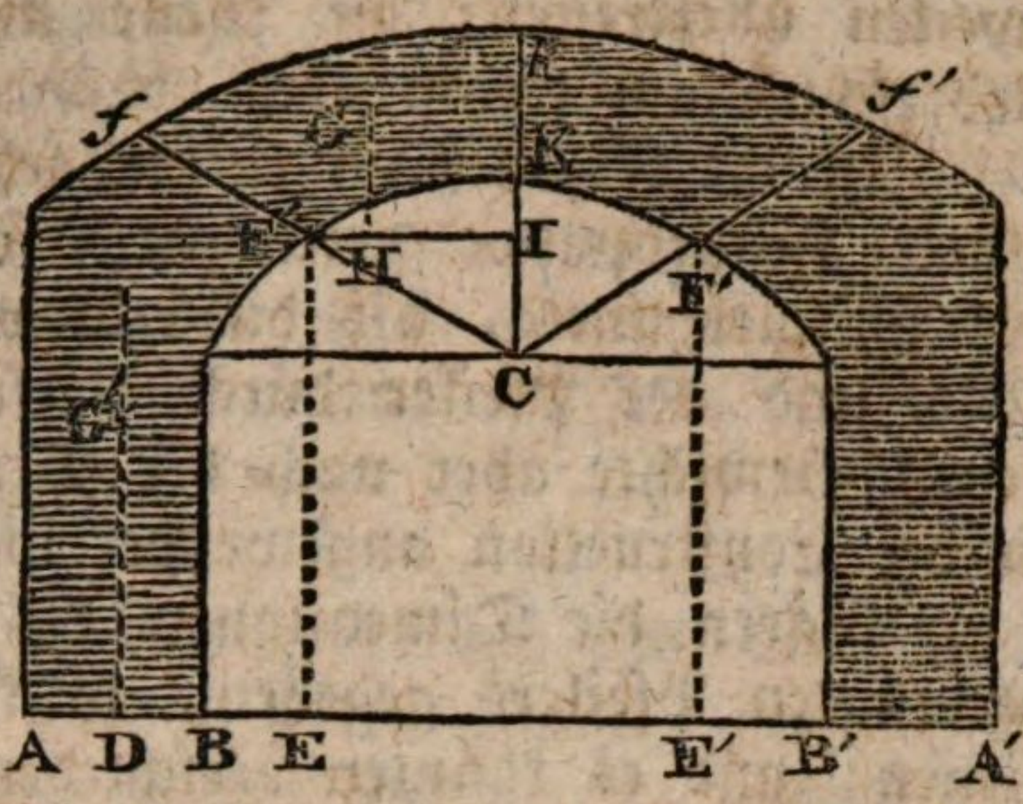
Endlich sin. 75° : sin. 45° = A M : A B = 12 : A B

= 8,7846 Fuß.

Anmerkung. In diesem Beispiele ist einleuchtend, da A M = M C, so wie A B = B C, daß M B den rechten Winkel A M C halbiren muß; es schien jedoch nützlich dasselbe nach der allgemeinen Auflösung zu behandeln.

Stabilität der Bogen.

1. Wenn die Wirkung der Schwerkraft auf die gewichtige Masse eines Bogens und Pfeilers abgesondert von der Wirkung des Kitts, der die Steine ꝛc. vereinigt, betrachtet wird, so ist die Untersuchung für Praktiker schwer, und führt auf Resultate, die in ihrer Anwendung viel Geschicklichkeit und Sorgfalt erfordern. Aber bei einem Bogen, dessen zusammengefügte Theile mit einem sehr starken Kitte verbunden sind, trennen sich diese Theile nicht in verticale Säulen, sondern wenn die ganze Masse, Bogen und Pfeiler eingeschlossen, zerfällt, so trennt sie sich in drei oder höchstens vier Theile. In diesem Falle werden die Bedingungen des Gleichgewichts ebenfalls leicht ausgedrückt und angewendet.



Es seyen fF und f'F' die Bruchflächen oder die Stellen, an denen der Bogen am natürlichsten sich trennen würde, er mag nun in zwei Stücken oder in eines bersten. G sey der Schwerpunct des halben Bogens fFKk und G' des Pfeilers ABFf. FI werde dem Horizonte parallel gezogen, und GH senkrecht darauf gefällt; eben so sey G'D ein Perpendikel, das durch G' geht, und FE werde von F aus dazu parallel gezogen.

2. Satz. Wenn der Bogen fFF'f' in Einem Stücke herabzufallen strebt, indem er die Schnitte fF, f'F' zurückdrängt, wenn A das Gewicht des halben Bogens fFKk, und P des Pfeilers bis zu fF ist, so wird das Gleichgewicht durch folgende beide Gleichungen bestimmt werden, nämlich:

$$f \cdot P = A\left(\frac{CI}{FI} - f\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$P \cdot \frac{AD}{FE} = A\left(\frac{CI}{FI} - \frac{AE}{FE}\right) \ldots\ldots\ldots (2)$$

wo f das Maß der Reibung oder die Tangente des Ruhewinkels des Materials darstellt, und die erste Gleichung das Gleichgewicht des horizontalen Drucks, die letzte aber das Gleichgewicht der Drehung um den äußern Winkel A der Säule bestimmt.

3. Satz. Wenn jeder der beiden Halbbogen Fk und kF' sich um den Scheitel k des Bogens zu drehen strebt, indem er die Puncte F, F' entfernt, so wird das Gleichgewicht der horizontalen Bewegung und Drehung beziehungsweise durch folgende Gleichungen ausgedrückt, nämlich:

$$f \cdot P = A\left(\frac{FH}{kI} - f\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$P \cdot \frac{AD}{PE} = A\left(\frac{FH}{kI} - \frac{AE}{FE}\right) \ldots\ldots\ldots (4)$$

4. Daher wird es unter der Annahme dieser beiden Sätze leicht seyn, die Stabilität eines zusammengefügten Bogens zu prüfen. Man nehme verschiedene Puncte z. B. F in dem Bogen, für die man die numerischen Werthe der Gleichungen (1) und (2) oder (3) und (4) berechnet. Je größer die Stabilität ist, desto mehr werden die ersten Glieder der Gleichungen die

zweiten übertreffen; die Theile sind am schwächsten, wo der Ueberschuß am kleinsten ist.

Ist die Figur nach einem gehörig justirten Maßstabe auf glatte Zeichenpappe gezeichnet, so können sowohl die Oerter der Schwerpuncte, als die relativen Gewichte des halben Bogens und der Pfeiler durch Versuche, die Maße der verschiedenen Gewichte aber nach der Scale gefunden werden, welche in der Construction angewendet worden ist.

Wären die Dimensionen des Bogens und die Dicke des verlangten Pfeilers gegeben, so könnten dieselben Gleichungen dienen, und es könnten verschiedene Grade der Dicke angenommen werden, bis die ersten Glieder der Gleichungen am größten würden.

Dieselben Regeln kann man auch bei Kuppeln in Anwendung bringen.

Modelle.

Bei jedem Versuche zur Bestimmung der Festigkeit des Modells einer Maschine oder eines Gebäudes sind gewisse Vorsichtsmaßregeln nöthig, bevor man auf die Festigkeit des Baues selbst schließen kann.

Es müssen die Arten der Kräfte unterschieden werden, z. B. ob sie streben die Theile auseinander zu treiben, sie quer durch zu brechen, oder sie durch Druck zusammen zu pressen. Zur ersten Art gehört das Dehnen, das Schlußsteine oder Bänder von Gewölben u. s. w. auszuhalten haben; zur zweiten die Last, welche horizontale oder geneigte Balken zu biegen oder zu brechen strebt; zur dritten das Gewicht, welches vertical auf Wände und Säulen drückt.

Satz 1. Wenn sich die Seite eines Modells zu der entsprechenden Seite der Ausführung wie 1 : n verhält, so wächst die Kraft, welche die Theile auseinander zu ziehen oder sie quer zu durchbrechen strebt, von der kleinern zur größern Scale wie 1 zu n^3, während der Widerstand der Bruchflächen nur wie 1 zu n^2 zunimmt.

Die Structur wird daher um so weniger Festigkeit, als das Modell haben, je größer n ist.

Ist W das größte Gewicht, das einer der Balken des Modells tragen kann, und w das Gewicht oder die Kraft, die es wirklich aushält, so wird die Grenze von $n = \frac{W}{w}$ seyn.

Satz 2. Wenn sich die Seite des Modells zur entsprechenden Seite der Ausführung wie 1 zu n verhält, so nimmt die Kraft, welche die Theile durch Zusammendrücken bersten zu

machen strebt, von dem kleinern zum größern Maßstabe wie 1 zu n^3, der Widerstand aber nur in dem Verhältnisse 1 zu n zu.

Wenn daher W die größte Last ist, die die Wand oder Säule eines Modells tragen könnte, und w das Gewicht bezeichnet, mit dem sie wirklich belastet ist, so würde die äußerste Grenze der Vergrößerung der Dimensionen aus dem Ausdrucke $n = \sqrt{\frac{W}{w}}$ gefunden werden.

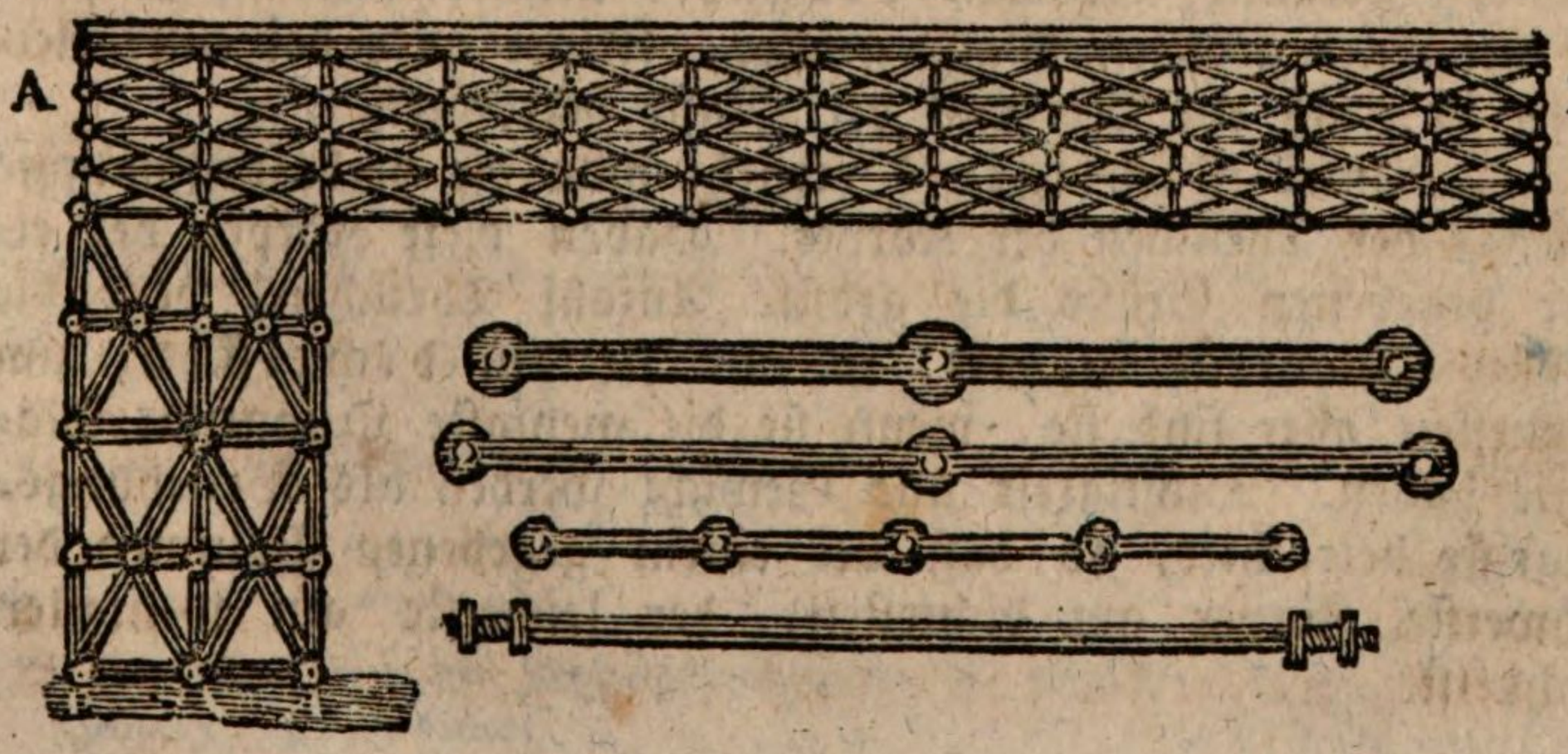
Wenn man bei der Länge oder Höhe nh und der Breite nb dem Körper eine solche Stärke geben wollte, daß er bei vergrößerten Dimensionen nicht brechen könnte, so würde man erhalten $x = n^2 \sqrt{\frac{w}{W}}$.

Für einen Pfeiler mit quadratischer Grundfläche oder eine cylindrische Säule würde man, wenn die Dimension des Modells d, und des größten Pfeilers, der, n mal so hoch, durch sein eigenes Gewicht nicht bersten kann, xd, ist, erhalten:

$$x = n \sqrt[3]{\frac{n^2 w}{W}}.$$

Diese Theoreme finden in dem Wirkungskreise eines Architekten oder eines bürgerlichen und Kriegs-Baumeisters häufig ihre Anwendung.

3. Es werde z. B. verlangt, die Stärke der privilegirten mathematischen Kettenbrücke des Hrn. Smart aus Versuchen am Modelle zu bestimmen. Bei dieser sinnreichen Verbindung ist das Verbindungswerk (truss-work) quer über von Pfeiler zu Pfeiler so geführt, daß die Fahrstraße von A nach B gänzlich in einer horizontalen Ebene liegt, und alle Unter-, Diagonal-, Hänge- und Verbindungs-Stangen durch den ganzen Bau ihre eigenthümlichen Größen behalten. Beigefügte Darstellung der halben Brücke stellt sie so dar, daß dadurch eine weitläuftige Beschreibung mit Worten unnöthig gemacht wird.



Es stelle nun l die Horizontallänge des Modells (12 Fuß) von dem innern zu dem äußern der beiden Pfeiler, w sein Gewicht (30 Pfund) und W dasjenige Gewicht vor, das es gerade noch am mittlern Puncte B trägt, bevor es zusammenbricht (350 Pfund); nl aber sey die Länge der Brücke, welche wirklich gebaut ist, und zwar aus derselben Masse und von ähnlichen Dimensionen, wie das Modell; dann wird ihr Gewicht $n^3 w$, und das Verhältniß ihrer Widerstand leistenden Kraft zu der des Modells $= n^2$ zu 1 seyn, da dieselbe gleich $n^2 (W + \frac{1}{2} w)$ ist. Daher $n^2 (W + \frac{1}{2} w) - \frac{1}{2} n^3 w = n^2 W - \frac{1}{2} n^2 (n-1) w$ das Gewicht, das die Brücke selbst in ihrer Mitte tragen würde.

Es sey $n = 20$, oder die Brücke 240 Fuß lang und dem Modelle völlig ähnlich; dann wird man haben $(400 \times 350) - 200 (20-1) 30 = 140000 - 114000 = 26000$ Pfund $= 236 \frac{4}{11}$ Centner, als diejenige Last, die die Brücke gerade noch in ihrer Mitte ertragen kann.

Anmerkung. Dies ist eine wahre Hängebrücke, und erfordert zwischen beiden Pfeilern Taue oder Verbindungsketten (braces oder tie-chains).

X. Kapitel.

Dynamik.

1. Die Masse eines Körpers ist die Quantität der Materie, aus der er zusammengesetzt ist.

Die Masse eines Körpers ist uns durch die Eigenschaft der Materie bekannt, die man Trägheit nennt, und die wir, da sie bei einer größern Masse größer, kleiner aber bei einer kleinern ist, als ein Merkmal der Masse betrachten.

2. Unter Dichtigkeit versteht man die verhältnißmäßige Menge der Theilchen der Körper. Haben diese Körper bei einer gegebenen Größe die größte Anzahl Theilchen, oder die größte Quantität Materie, so sind sie am dichtesten; am lockersten aber sind sie, wenn sie die wenigste Quantität Materie haben. Dichtigkeit und Gewicht werden als Beziehungsbegriffe betrachtet, so daß bei einem gegebenen Volumen der schwerste Körper am dichtesten, der leichteste am wenigsten dicht ist.

Daher ist Blei dichter als Sandstein; Sandstein dichter als Eichenholz; dies aber dichter als Kork.

3. Wenn Körper von gewissen Kräften angetrieben werden, so erhalten sie gewisse Geschwindigkeiten, und bewegen sich in gewissen Zeiten durch gewisse Räume; es sind daher Körper, Kraft, Geschwindigkeit, Raum, Zeit, die Gegenstände der Untersuchung der Dynamik; in mathematischen Sätzen werden sie gewöhnlich durch die Buchstaben b, f, v, s, t, bezeichnet*); oder auch zwei oder mehr entsprechende Buchstaben B, b, b′, V, v, v′, u. s. w. gebraucht, wenn zwei oder mehrere Körper u. s. w. verglichen werden. Die Schwere, welche eine besondere Kraft ist, die unaufhörlich wirkt, bezeichnet man mit g, und das Moment oder die Quantität der Bewegung, welches die durch einen bewegten Körper erzeugte Wirkung ist, mit m.

Man unterscheidet bewegende und beschleunigende oder verzögernde Kräfte.

4. Die bewegende Kraft oder das Moment, auch Stoßkraft genannt, ist die absolute Kraft eines bewegten Körpers; sie wird durch das Product des Gewichts oder der Menge der Materie im Körper und der Geschwindigkeit, mit der er sich bewegt, ausgedrückt.

5. Die beschleunigende oder verzögernde Kraft aber ist diejenige, die sich auf die Geschwindigkeit der Bewegung allein bezieht, und sie beschleunigt oder vermindert; sie wird durch den Quotient der bewegenden Kraft, durch die Masse oder das Gewicht des Körpers dividirt, dargestellt. Wenn z. B. auf einen Körper von 2 Pfund Gewicht eine bewegende Kraft von 40 wirkt, so ist die beschleunigende 20; wenn aber die halbe Kraft 40 auf einen andern Körper von 4 Pfund Gewicht wirkt, so ist die beschleunigende Kraft nur 10; das heißt, sie ist halb so groß als die vorige, und wird nur eine halb so große Geschwindigkeit erzeugen.

1. Abschnitt. Gleichförmige Bewegung.

1. Der Raum, den ein gleichförmig bewegter Körper beschreibt, wird durch das Product der Geschwindigkeit in die Zeit dargestellt; man hat demnach die Proportion

$$s : s' = tv : t'v'.$$

2. Die bewegenden Kräfte m verändern sich wie bv, oder

$$m : m' = bv : b'v'.$$

---

*) Im Englischen als Anfangsbuchstaben der Worte: body, force, velocity, space, time. (D.)

Beispiel. Auf zwei Körper, den einen von 10, den andern von 5 Pfund, wirkt dieselbe bewegende Kraft, oder sie erhalten dieselbe Quantität der Bewegung 30. Sie bewegen sich gleichförmig, der eine 8, der andere 6 Secunden; es werden die Räume gesucht, die beide durchlaufen haben.

Hier ist $\frac{30}{10} = 3 = v$, und $\frac{30}{5} = 6 = v$;
ferner $tv = 3 \times 8 = 24 = s$, und $t'v' = 6 \times 6 = 36 = s'$.
Es sind daher die Räume 24 und 36.

2. Abschnitt. Gleichförmig beschleunigte Bewegung.

1. Die gleichförmig beschleunigte Bewegung ist die Bewegung eines materiellen Punctes oder Körpers, der der beständigen Wirkung einer unveränderlichen Kraft unterworfen ist.

2. Bei dieser Bewegung ist die Geschwindigkeit, die der Körper an dem Ende irgend einer Zeit erreicht, dem Producte der beschleunigenden Kraft in die Zeit gleich; der durchlaufene Raum aber wird durch das Product der halben beschleunigenden Kraft in das Quadrat der Zeit dargestellt.

3. Die in aufeinander folgenden Secunden durchlaufenen Räume verhalten sich wie die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, 9, u. s. w.

4. Die Schwere ist eine unveränderliche Kraft, deren Wirkung auf einen in einer verticalen Linie frei fallenden Körper durch g bezeichnet wird; die Bewegung eines solchen Körpers ist gleichförmig beschleunigt.

5. Folgende Formeln sind auf alle Fälle der Bewegung anwendbar, welche durch eine unveränderliche Kraft f gleichförmig beschleunigt wird:

$$s = \tfrac{1}{2}tv = \tfrac{1}{2}gft^2 = \frac{v^2}{2gf}$$

$$v = \frac{2s}{t}\ gft = \sqrt{2gfs}$$

$$t = \frac{2s}{v} = \frac{v}{gf} = \sqrt{\frac{s}{\frac{1}{2}gf}}$$

$$g = \frac{v}{gt} = \frac{2s}{gt^2} = \frac{v^2}{2gs}$$

Ist daher das Verhältniß der Kraft f zur Schwerkraft g bekannt, so kann bei allen Bewegungen dieser Art, Raum, Zeit, Geschwindigkeit u. s. w. berechnet werden; oder umgekehrt, kennt man den in einer gegebenen Zeit durchlaufenen Raum, oder die am Ende einer solchen Zeit erlangte Geschwindigkeit, so kann man den Werth von f erhalten.

6. Wirkt die Schwerkraft frei, wenn z. B. ein Körper in einer verticalen Linie fällt, so wird f in den Formeln weggelassen, und man erhält:

$$s = \tfrac{1}{2} g t^2 = \frac{v^2}{2g} = \tfrac{1}{2} t v$$

$$v = g t = \frac{2s}{t} = \sqrt{2gs}$$

$$t = \frac{v}{g} = \frac{2s}{v} = \sqrt{\frac{2s}{g}}$$

$$g = \frac{v}{t} = \frac{2s}{t^2} = \frac{v^2}{2s}.$$

7. Jetzt ist durch sehr genaue Versuche dargethan, daß in der Breite von London ein Körper beinahe $16\frac{1}{12}$ Fuß in der ersten Secunde fällt, und daß die am Ende dieser Zeit erlangte Endgeschwindigkeit doppelt so groß oder $32\frac{1}{6}$ Fuß ist; wenn daher $\frac{1}{2} g = 16\frac{1}{12}$ Fuß der in der ersten Secunde durchfallene Raum, oder g die in dieser Zeit erlangte Endgeschwindigkeit ist, ferner wenn die erste Reihe der natürlichen Zahlen Secunden bezeichnet, so sind:

die Zeiten in Secunden	1″,	2″,	3″,	4″, ꝛc.
die Geschwindigkeiten in Fußen .	$32\frac{1}{6}$,	$64\frac{1}{3}$,	$96\frac{1}{2}$,	$128\frac{2}{3}$ ꝛc.
die Räume in den ganzen Zeiten	$16\frac{1}{12}$,	$64\frac{1}{3}$,	$144\frac{3}{4}$,	$257\frac{1}{3}$ ꝛc.
und der Raum für jede Secunde	$16\frac{1}{12}$,	$48\frac{1}{4}$,	$80\frac{5}{12}$,	$112\frac{7}{12}$ ꝛc.

Bei den letzten Räumen findet die Differenz $32\frac{1}{6}$ Fuß statt, das natürliche und gewöhnliche Maß der Schwerkraft g.

8. Wenn ein schwerer Körper, anstatt frei zu fallen, mit einer gegebenen Schnelligkeit auf oder niederwärts geworfen würde, so wäre

$$s = tv \mp \tfrac{1}{2} g t^2;$$

in welcher Formel das obere, negative Zeichen von dem Wurfe aufwärts, das untere positive Zeichen von dem Wurfe niederwärts gilt.

Wird in Bezug auf vertical fallende Körper nur ein Annäherungswerth verlangt, so kann g, anstatt $32\frac{1}{6}$, 32 gesetzt werden; dann würden sich bei Bewegungen nach dem Zustande der Ruhe folgende Resultate ergeben:

$$s = 16 t^2 = \frac{v^2}{64} = \tfrac{1}{2} t v$$

$$t = \frac{v}{32} = \tfrac{1}{4} \sqrt{s} = \frac{2s}{v}$$

$$v = 8 \sqrt{s} = \frac{2s}{t} = 32 t.$$

Wäre z. B. der durchfallene Raum 64 Fuß, so würde man erhalten $v = 8 \times 8 = 64$; und $t = \frac{8}{4} = 2$ Secunden.

Wäre der durchfallene Raum 400, so würde $v = 8 \times 20 = 160$ und $t = \frac{20}{4} = 5$ seyn.

9. Die Schwerkraft ist in verschiedenen Breitegraden etwas verschieden; das Gesetz ihrer Veränderung ist noch nicht genau bestimmt, aber folgende Formeln stellen sie sehr nahe dar. Wenn nämlich g die Schwerkraft unter einer Breite von 45°, g′ aber dieselbe an einem andern Orte, dessen Breite l bezeichnet, so ist

$$g' = g(1 - 0{,}002837 \cos. 2l.)$$
$$g' = g(1 + 0{,}002837) \text{ an den Polen}$$
$$g' = g(1 - 0{,}002837) \text{ am Aequator.}$$

10. Bewegung über einer festen Rolle. Sind in diesem Falle die beiden Gewichte, welche durch ein Seil über der Rolle verbunden sind, W und w, so ist $\frac{W - w}{W + w} = f$, in der Formel des Artikel 5., so daß

$$s = \frac{W - w}{W + w} \cdot \tfrac{1}{2} g t^2.$$

Oder wenn der Widerstand der Reibung und die Trägheit der Rolle durch r dargestellt wird:

$$s = \frac{W - w}{W + w + r} \cdot \tfrac{1}{2} g t^2.$$

Beispiel. Wenn die beiden Gewichte 5 und 3 Pfund sind, wie groß ist der in 4 Secunden durchlaufene Raum?

$$\text{Hier ist } \frac{W - w}{W + w} \cdot \tfrac{1}{2} g t^2 = \frac{5 - 3}{5 + 3} \cdot 16\tfrac{1}{12} \cdot 16 = \tfrac{1}{4} \cdot 16\tfrac{1}{12} \cdot 16 = 16\tfrac{1}{12} \cdot 4 = 64\tfrac{1}{3} \text{ Fuß.}$$

Beispiel 2. Durchläuft aber bei einem wirklichen Versuche mit zwei Gewichten von 5 und 3 Pfund über einer Rolle das schwere Gewicht nur 50 Fuß in vier Secunden, so ist $\frac{W - w}{W + w + r} \cdot \tfrac{1}{2} g t^2 = 50$ Fuß, und da W, w, g, und t in beiden Beispielen dieselben sind, so erhält man

$$W + w + r : W + w = 64\tfrac{1}{3} : 50;$$

oder wenn man die Hinterglieder von den vordern abzieht:

$$r : W + w = 14\tfrac{1}{3} : 50;$$

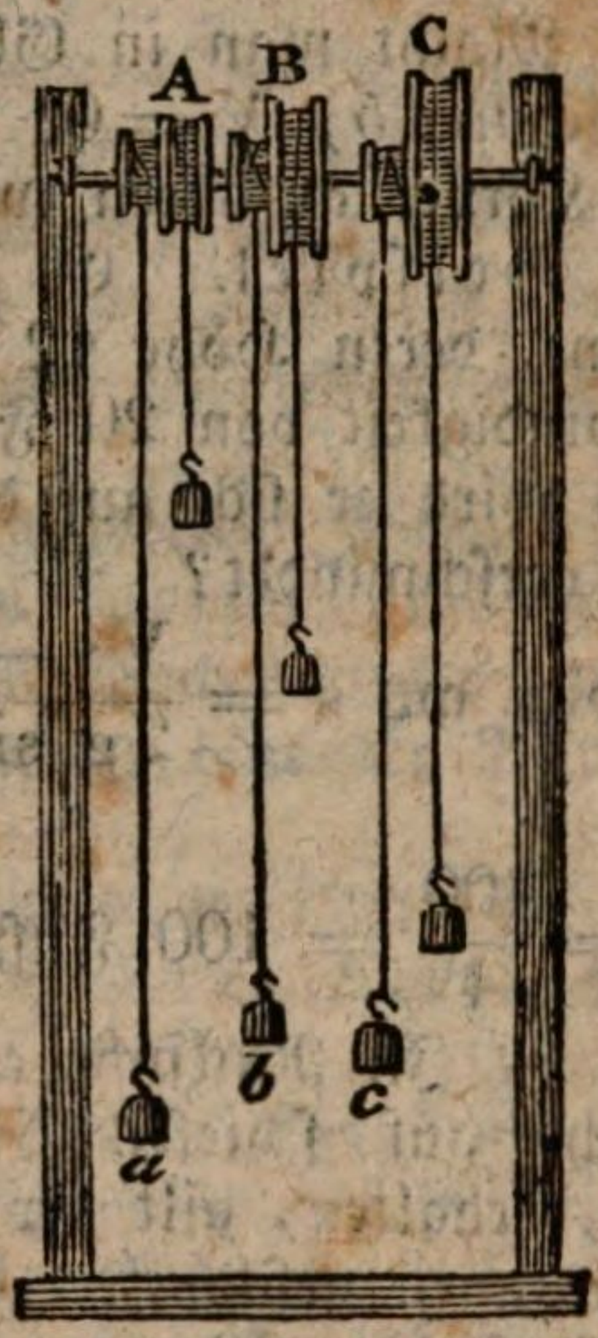
$$\text{d. i. } r : 5 + 3 = 14\tfrac{1}{3} : 50,$$

$$\text{daraus folgt } r = \frac{8 \times 14\frac{1}{3}}{50} = 2{,}2933 \text{ Pfund}$$

als Maß des Widerstandes und der Trägheit.

Anmerkung. Aehnliche Grundsätze können bei mancherlei anderen Fällen in Anwendung gebracht werden; und durch Veränderung der Verhältnisse der W, w und r kann die Kraft jedes gegebene Verhältniß zur Schwerkraft erhalten; worauf sich in der That der vortreffliche Apparat des Herrn Atwood (Atwood's Fallmaschine) für Versuche über beschleunigendeKräfte stützt. Der Leser findet davon im zweiten Bande der Mechanik des Verfassers, oder auch in den meisten allgemeinen Wörterbüchern der Künste und Wissenschaften eine genaue Beschreibung. *)

11 Wenn anstatt Rollen kleine Räder und Axen, wie es die Figur zeigt, angewendet werden, um Gewichte durch das Uebergewicht gleicher Gewichte zu heben; ferner wenn die Durchmesser des Rades und der Axe A sich wie 3 zu 2; des Rades und der Axe B, wie 5 zu 2; von C, wie 8 zu 2 verhalten: so wird sich finden, daß das Gewicht b mit mehr Kraft als ein anderes, a oder c, erhoben wird, indem das Verhältniß von 5 : 2 (oder genau von $1 + \sqrt{2} : 1$) in dieser Hinsicht am günstigsten ist.



Bewegung auf geneigten Ebenen.

Wenn Körper sich auf geneigten Ebenen herab bewegen, so wird die beschleunigende Kraft, (unabhängig von der Aenderung, die die Lage des Mittelpunctes der Drehung verursacht) durch $\frac{h}{l}$, den Quotient der Höhe der Ebene, dividirt durch ihre Länge, oder was dasselbe ist, durch den Sinus der Neigung der Ebene, das ist sin i, ausgedrückt. In diesem Falle werden daher die Formeln:

$$1.\ s = \tfrac{1}{2}\, g t^2 \sin i = \frac{v^2}{2g \sin i} = \tfrac{1}{2}\, tv$$

*) S. z. B. Neue Ausgabe von Gehler's phys. Wörterbuch, Bd. 4. Art. Fallmaschine. (D.)

$$2.\ v = g\,t\,\sin i = \sqrt{2\,g\,s\,\sin i} = \frac{2s}{t}$$

$$3.\ t = \sqrt{\frac{2s}{g\,\sin i}} = \frac{2s}{v}.$$

Wenn ferner V die Geschwindigkeit ist, mit der ein Körper hinauf oder hinab geworfen wird, so ist:

$$4.\ v = V \mp g\,t\,\sin i.$$

$$5.\ s = V\,t \mp \tfrac{1}{2}\,g\,t\,\sin i = \frac{V^2 - v^2}{2\,g\,\sin i}.$$

Macht man in Gleichung 4 und dem letztern Gliede von Gleichung 5, $V = 0$, so wird die erstere die Zeit geben, in der der Körper aufhören wird zu steigen, die zweite den Raum.

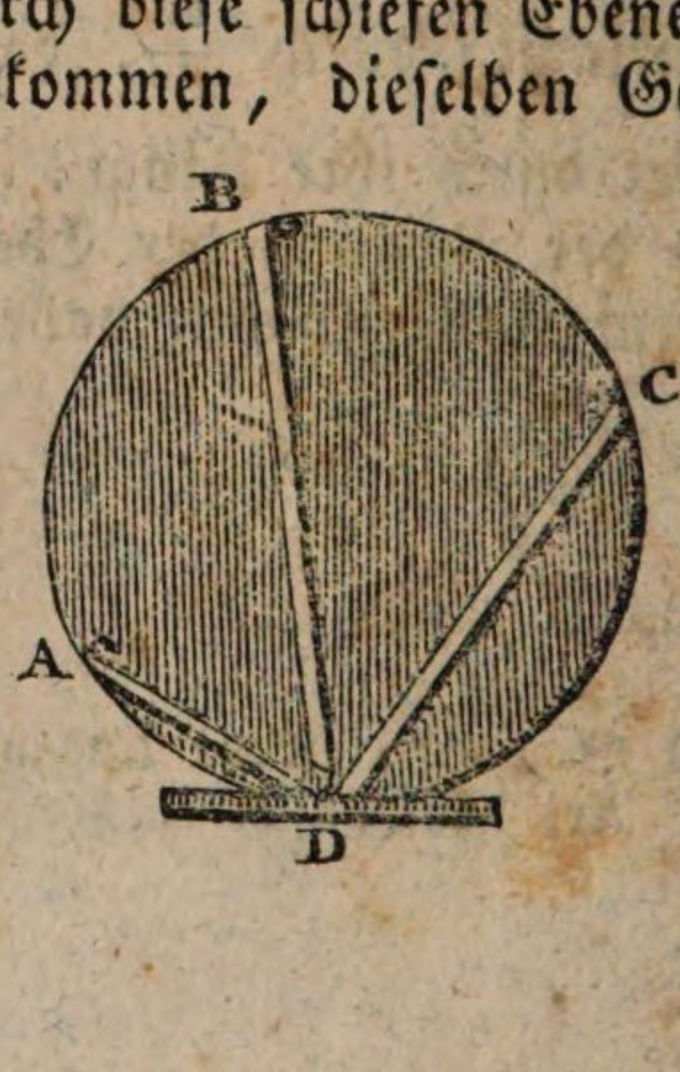
Beispiel. Es werde ein Körper eine glatte geneigte Ebene, deren Höhe 12 und Länge 193 Fuß ist, mit einer Geschwindigkeit von 20 Fuß in der Secunde hinaufgetrieben; wie hoch wird er sich auf der Ebene erheben, bis seine Geschwindigkeit verschwindet?

$$\text{Hier wo } s = \frac{V^2 - v^2}{2\,g\,\sin i},\ \text{wird } s = \frac{400 - 0}{64\frac{1}{3} \times \frac{12}{193}} = \frac{400}{\frac{193}{3} \cdot \frac{12}{193}}$$

$$= \frac{400}{4} = 100 \text{ Fuß, als gesuchter Raum.}$$

2. In Rücksicht auf die Geschwindigkeiten, die Körper, welche auf schiefen Ebenen von gleicher Höhe herabgefallen sind, erhalten, gilt der Satz, daß sie alle in ihren respectiven Richtungen geschätzt, gleich sind. Wenn daher AD, BE, CF, Rinnen von verschiednen Neigungen, und AC, DF, Horizontallinien sind; so werden die Kugeln A, B, C, wenn sie durch diese schiefen Ebenen herabgefallen sind, in D, E, F angekommen, dieselben Geschwindigkeiten haben.

3. Ferner, alle Sehnen, wie AD, BD, CD, die sich entweder in dem obern oder untern Ende des verticalen Durchmessers eines Kreises endigen, werden von Körpern A, B, C, die auf ihnen herablaufen, in derselben Zeit durchfallen; auch wird diese Zeit derjenigen gleich seyn, die ein Körper auf dem verticalen Durchmesser durchfallen würde.



4. Wenn drei Gewichte A, B, C, drei Ebenen von verschiedenen Neigungen, von drei unter einander gleichen Gewichten hinaufgezogen werden, die an Schnüren über eine Rolle in P hängen, ferner, wenn die Länge der mittlern Ebene zweimal so groß, als ihre Höhe ist, so wird der Körper B auf dieser Ebene schneller hinaufgezogen werden, als jedes der übrigen Gewichte A oder C.

Oder allgemein, um ein Aufsteigen auf einer Ebene in der kürzesten Zeit zu bewirken, muß sich die Länge der Ebene zu ihrer Höhe wie das doppelte Gewicht zur angewandten Kraft verhalten.

5. Soll auf ein Gebäude von gegebener Breite ein Dach gesetzt werden, von dem der Regen so schnell als möglich herabläuft, so muß jede Fläche des Daches unter einem Winkel von 45° gegen den Horizont geneigt, oder der Winkel am Giebel muß ein rechter seyn.

6. Die Kraft, durch die Kugeln, Cylinder u. s. w. bei ihrem Herabfallen auf geneigten Ebenen, anstatt zu gleiten, sich herumdrehen, ist die Adhäsion ihrer Oberflächen, die vom Drucke gegen die Ebene bewirkt wird; dieser Druck ist ein Theil des Gewichts des Körpers; denn löst man das Gewicht, als Mittelkraft, in Seitenkräfte auf, die eine in der Richtung der Ebene, die andere senkrecht darauf, so wird letztere die Kraft des Drucks seyn, und wird, da derselbe Körper die Ebene herabrollt, durch den Cosinus der Erhöhung der Ebene ausgedrückt werden. Da nun aber der Cosinus mit dem Zunehmen des Bogens oder Winkels abnimmt, so wird, wenn der Höhenwinkel eine gewisse Größe erreicht, die Adhäsion kleiner werden, als es nöthig ist, um den Umkreis des Körpers schnell genug herumzudrehen; in diesem Falle fällt der Körper theils gleitend, theils rollend. Dasselbe wird sich bei kleinern Erhöhungen ereignen, wenn der Körper und die Ebene sehr polirt sind. Aber bei allen Höhen kann der Körper durch Abwickeln eines Fadens oder Bandes, das um ihn gewunden ist, zum Herabrollen gebracht werden.

Wenn W das Gewicht eines Körpers, s den Raum bezeichnet, den er frei fallend oder frei auf einer geneigten Ebene herabgleitend beschrieben hat, so werden die Räume, die von nachstehenden Körpern durch Umdrehung in derselben Zeit beschrieben sind, in folgenden Verhältnissen stehen:

1. Ein hohler Cylinder oder eine cylindrische Oberfläche, $S = \frac{1}{2}$ s; Spannung des Fadens im ersten Falle $= \frac{1}{2}$ W.

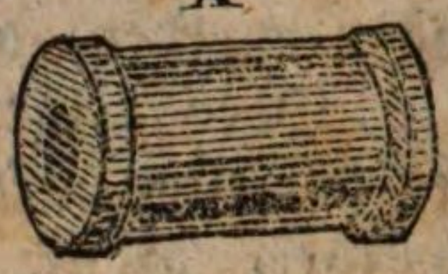
2. Bei einem massiven Cylinder $S = \frac{2}{3}$ s; Spannung $= \frac{1}{3}$ W.

3. Bei einer Kugeloberfläche oder dünnen Kugelschale $S = \frac{3}{5}$ s; Spannung $= \frac{2}{5}$ W.

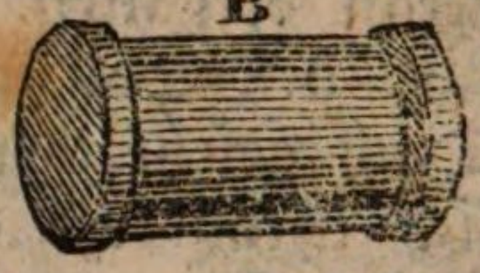
4. Bei einer massiven Kugel $S = \frac{5}{7}$ s; Spannung $= \frac{2}{7}$ W.

Wenn man zwei Cylinder von gleicher Gestalt und gleichen Gewicht, auf gleichen hervorragenden Rändern, auf denen sie rollen, wie die Figuren darstellen, nimmt; ferner, wenn man über die krumme Oberfläche von B gleichförmig Blei wickelt, und eine gleiche Quantität derselben Masse gleichförmig von einer Seitenfläche bis zur andern nahe bei der Axe im Cylinder A gelegt wird, so rollt dieser Cylinder schneller auf einer geneigten Ebene herab, als der andere Cylinder B. Der Grund ist: daß bei einem rollenden Körper jedes Theilchen der Materie in dem Verhältnisse des Quadrats seines Abstandes von der Drehungsaxe der Bewegung Widerstand leistet; die Bleitheilchen aber, welche der Bewegung sehr widerstehen, liegen in dem Cylinder B in einer größeren Entfernung von der Axe als im Cylinder A.

A



B



7. Die Reibung zwischen der Oberfläche eines Körpers und einer Ebene kann leicht bestimmt werden, wenn man die Neigung der Ebene gegen den Horizont mehr und mehr vergrößert, bis der Körper anfängt herabzugleiten.

Die Reibung des Körpers verhält sich zu seinem Gewichte, wie die Höhe der Ebene zu seiner Grundfläche, oder wie die Tangente der Neigung der Ebene zu dem Halbmesser. Wenn z. B. ein Stein von 8 Pfund eben anfängt herabzugleiten, wenn die Höhe der Ebene 2 Fuß, und ihre Grundfläche $2\frac{1}{2}$ Fuß ist, so wird die Reibung $\frac{4}{5}$ des Gewichts oder $\frac{4}{5}$ von 8 Pfund, das ist $= 6\frac{2}{5}$ Pfund seyn.

8. Nach Anfang der Bewegung auf einer geneigten Ebene wird die Reibung gewöhnlich sehr vermindert. Man kann dies leicht durch Versuche bestimmen, wenn man die Zeit, die ein Körper bei dem Herabgleiten auf einer Ebene von gegebener Höhe und Länge oder gegebener Neigung mit derjenigen vergleicht, welche die einfache Formel für t geben würde. Denn ist f der Werth der Reibung, als von dem Drucke abhängig, so wird die Formel für t seyn:

$$t' = \sqrt{\frac{2s}{g(\sin i - f)}} \text{ anstatt } t = \sqrt{\frac{2s}{g \sin i}};$$

Daher $t'^2 : t^2 = \sin i : \sin i - f$.

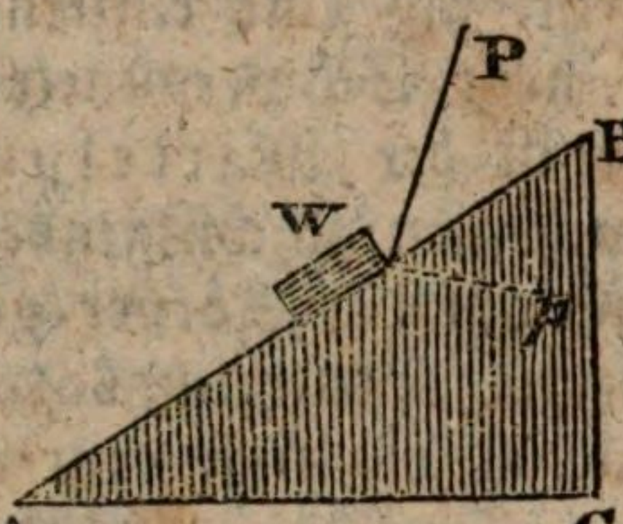
Beispiel. Es gleite ein Körper auf einer Ebene, deren Länge 30 Fuß, Höhe 10 Fuß, in $2\frac{3}{5}$ Secunden herab, was wird der Werth der Reibung seyn.

Hier ist $t = \sqrt{\frac{2s}{g \sin i}} = \sqrt{\frac{60}{32\frac{1}{6} \times \frac{1}{3}}} = 2{,}366$ ziemlich nahe.

Daher $(2{,}6)^2 : (2{,}366)^2 = \frac{1}{3} : 0{,}27603 = \sin i - f$

Folglich $0{,}33333 - 0{,}27603 = 0{,}0573$ als Werth der Reibung, das Gewicht gleich eins gesetzt.

9. Soll ein Gewicht entweder eine geneigte Ebene hinauf, oder längs einer horizontalen Ebene bewegt werden, so wird der Winkel, unter dem das Gewicht mit der geringsten Anstrengung gezogen werden kann, sich mit dem Werthe von f ändern. Die Größe dieses Winkels PWB für verschiedene Werthe von f wird in folgender Tabelle dargestellt.



f	PWB	f	PWB	f	PWB	f	PWB	f	PWB	f	PWB
1	45° 0′	$\frac{1}{2}$	26°34′	$\frac{1}{3}$	18°26′	$\frac{1}{4}$	14° 2′	$\frac{1}{5}$	11°19′	$\frac{1}{6}$	9 28′
$\frac{4}{5}$	38 40	$\frac{4}{9}$	23 58	$\frac{4}{13}$	16 54	$\frac{4}{17}$	13 15	$\frac{4}{21}$	10 47	$\frac{1}{7}$	8 8
$\frac{2}{3}$	33 41	$\frac{2}{5}$	21 48	$\frac{2}{7}$	15 57	$\frac{2}{9}$	12 32	$\frac{2}{11}$	10 18	$\frac{1}{8}$	7 8
$\frac{4}{7}$	29 45	$\frac{4}{11}$	19 59	$\frac{4}{15}$	14 56	$\frac{4}{19}$	11 53	$\frac{4}{23}$	9 52	$\frac{1}{9}$	6 20

10. Verlangte man, anstatt die Linie des Zugs so zu legen, daß die bewegende Kraft ihren kleinsten Werth hat, ihre Lage von der Beschaffenheit, daß die Kraft, die ein Gewicht verhindert, herabzugehen, ihren kleinsten Werth hat, oder daß eine gegebene Kraft mit der größten Energie der Bewegung Widerstand leiste, so werden die Winkel in der vorhergehenden Tafel noch ihre Anwendung finden, nur muß der Winkel, (wie BWP in der Figur), in jedem bestimmten Falle darunter genommen werden. Dies findet beim Aufwerfen und Befestigen von Wällen, Dämmen, Festungswerken u. s. w. seine Anwendung.

3. Abschnitt. Bewegungen um einen Mittelpunct oder eine Axe.

Einfaches und zusammengesetztes Pendel; Mittelpuncte des Schwungs, der Drehung und des Stoßes.

Erklärung 1. Der Mittelpunct des Schwunges ist derjenige Punct in der Axe eines frei aufgehangenen schwingenden Körpers, in dem, wenn daselbst die ganze Masse des Systems vereinigt wäre, eine angebrachte Kraft in einer gegebenen Zeit dieselbe Winkelgeschwindigkeit erzeugen würde, als dieselbe Kraft im Schwerpuncte, wenn man die Theile des Systems an den Oertern, die sie einnehmen, schwingen ließe.

Oder da die auf den ganzen Körper wirkende Schwerkraft als eine einzelne, dem Gewichte des Körpers gleiche, in seinem Schwerpuncte angebrachte Kraft betrachtet werden kann, so ist der Mittelpunct des Schwunges derjenige Punct in einem schwingenden Körper, der die Lage hat, daß, wenn in ihm der Körper ganz vereinigt gedacht wird, bei unveränderter Bewegungsaxe er in derselben Zeit schwingen würde, als er es in seinem natürlichen Zustande thut.

Zusatz. Aus der ersten Erklärung folgt, daß der Mittelpunct des Schwunges in einer geraden Linie liegt, die durch den Schwerpunct geht, und senkrecht auf der Bewegungsaxe ist.

Erklärung 2. Der Mittelpunct der Drehung ist derjenige Punct, in dem die ganze Masse eines sich drehenden Systems vereinigt zu denken ist, damit eine gegebene Kraft dieselbe Winkelgeschwindigkeit in derselben Zeit hervorbringt, als es der Fall wäre, wenn sie auf gleiche Art auf den Körper oder das System in seinem natürlichen Zustande selbst wirkt.

Geht die Drehungsaxe durch den Schwerpunct, so heißt dieser Mittelpunct der Haupt-Mittelpunct der Drehung.

Der Abstand des Drehungsmittelpunctes von dem Aufhängepuncte oder der Drehungsaxe ist die mittlere Proportionale zwischen den Abständen des Drehungs- und Schwerpunctes von demselben Puncte oder derselben Axe.

Stellt S den Aufhängepunct, G den Ort des Schwerpunctes, O des Schwingungs- und R des Drehungs-Mittelpunctes dar, so ist

$$SR = \sqrt{SO \,.\, SG} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

und $SO \,.\, SG$ ist für denselben Körper und dieselbe Schwingungsebene eine unveränderliche Größe.

Erklärung 3. Der Mittelpunct des Stoßes ist derjenige Punct eines um eine Axe sich drehenden Körpers, in

dem, wenn er auf ein unbewegliches Hinderniß träfe, seine ganze Bewegung vernichtet seyn, oder er sich nach keiner Seite wenden würde.

Wenn ein oscillirender Körper mit einer gegebenen Winkelgeschwindigkeit schwingt, und auf ein Hinderniß stößt, so wird die Wirkung des Zusammentreffens am größten seyn, wenn es in dem Mittelpuncte des Stoßes geschieht.

Denn in diesem Falle geht auf den widerstehenden Gegenstand die ganze Drehungsbewegung des Körpers über; wenn daher das Zusammentreffen in irgend einem andern Puncte geschieht, so wird ein Theil der Bewegung des Pendels auf das Streben verwendet werden, die Rotation fortzusetzen.

Wenn ein um eine Axe sich drehender Körper auf ein unbewegliches Hinderniß in dem Mittelpuncte des Stoßes trifft, so wird der Aufhängepunct von dem Stoße nicht afficirt werden.

Man kann diese Eigenschaft des Punctes O darthun, wenn man mit einem Stocke einen kleinen Schlag giebt. Giebt man diesem Stocke eine Bewegung nur vermittels der Handgelenke, und schlägt, indem man ihn an einem Ende hält, ein wenig mit einem Puncte, der beträchtlich näher oder entfernter als $\frac{2}{3}$ seiner Länge ist, so fühlt man einen unangenehmen Stoß in der Hand; schlägt man aber mit einem Puncte, der genau $\frac{2}{3}$ seiner Länge ist, so wird man einen solchen unangenehmen Stoß nicht fühlen. Schlägt man mit einem Ende des Stocks, so muß sein Mittelpunct der Drehung ungefähr $\frac{1}{3}$ seiner Länge von dem andern Ende entfernt seyn, um den Stoß zu vermeiden.

Satz. Der Abstand des Mittelpunctes des Stoßes von der Drehungsaxe ist dem Abstande des Schwingungsmittelpunctes von eben derselben gleich, wenn man voraussetzt, daß der Mittelpunct des Stoßes in einer Ebene ist, die durch die Drehungsaxe und den Schwerpunct geht.

Erklärung 4. Ein einfaches Pendel, theoretisch betrachtet, ist ein einzelnes Gewicht, das als ein Punct oder eine sehr kleine Kugel angesehen wird, an dem untern Ende einer unbiegsamen geraden Linie ohne Schwere hängt, die an einem Puncte befestigt ist, um den es schwingt.

Erklärung 5. Ein zusammengesetztes Pendel ist dasjenige, das aus mehreren Gewichten besteht, die sich um einen gemeinschaftlichen Drehungsmittelpunct bewegen können, so jedoch unter einander verbunden sind, daß sie sowohl von einander als auch von dem Puncte, um den sie schwingen, einen unveränderlichen Abstand behalten.

Daher kann ein Körper, wie ein Kegel, Cylinder oder von

irgend einer Gestalt, so aufgehangen, daß er schwingt, als ein zusammengesetztes Pendel betrachtet werden; und der Abstand seines Schwingungsmittelpunctes von einem angenommenen Aufhängepuncte wird als die Länge eines entsprechenden einfachen Pendels angesehen.

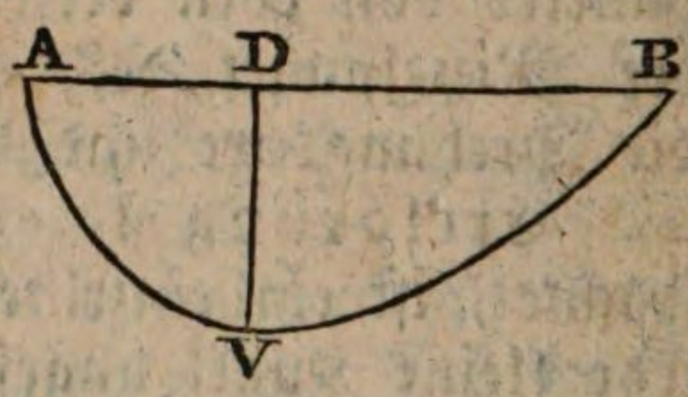
Ein solcher schwingender Körper wird eben so viel Schwingungsmittelpuncte haben, als man ihm Aufhängepuncte giebt; ist aber einer dieser Schwingungsmittelpuncte bestimmt, es sey durch Theorie oder Erfahrung, so werden die übrigen leicht vermittels des Satzes gefunden, daß $SO \cdot SG$ ein constantes Product ist, das für denselben Körper den nämlichen Werth hat.

Erklärung 6. Wenn sich ein Körper entweder um eine Axe dreht oder oscillirt, so heißt die Summe der Producte der materiellen Elemente oder Theilchen dieses Körpers in die Quadrate ihrer respectiven Abstände von der Drehungsaxe das Moment der Trägheit dieses Körpers. (Vergl. Art. 6. S. 244).

Ein Punct oder sehr kleiner Körper verliert bei dem Herabfallen auf den an einander grenzenden Seiten eines Polygons in einer verticalen Ebene bei jedem Winkel einen Theil seiner wirklichen Geschwindigkeit, der dem Producte dieser Geschwindigkeit in den Sinus versus desjenigen Winkels gleich ist, der von der Seite, die er eben verlassen hat und der Verlängerung derjenigen, auf die er überzugehen im Begriff ist, gebildet wird.

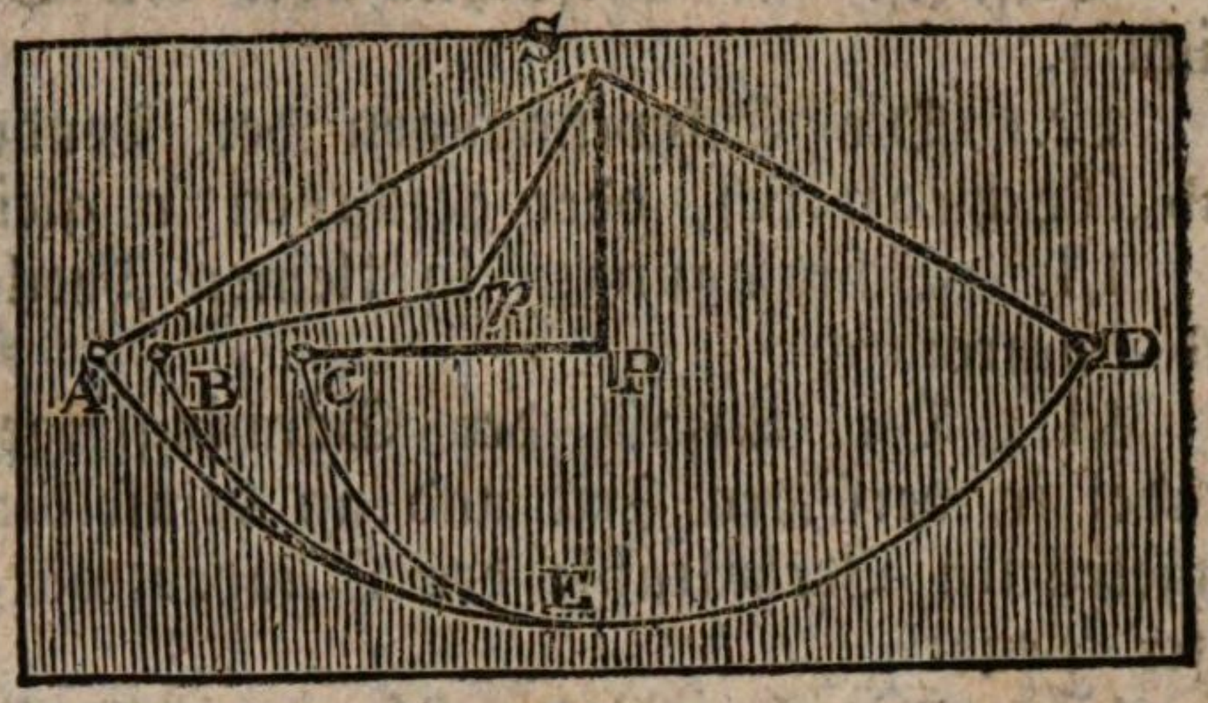
Bei krummen Linien ist daher dieser Verlust unendlich klein.

7. Ein schwerer Körper, der auf einer in verticaler Ebene gelegenen Curve durch die Schwerkraft herabfällt, hat in jedem Puncte dieselbe Geschwindigkeit, die er erhalten hätte, wenn er auf einer verticalen Linie vom obersten Puncte bis zu der Tiefe gefallen wäre, die der erreichte Punct der Curve hat; und hat dieselbe einen andern ähnlichen oder unähnlichen Zweig, der sich auf der andern Seite erhebt, so wird der Körper (abgesehen von der Reibung) längs dieses Zweiges aufsteigen, bis er dieselbe Horizontalebene erreicht hat, von der er ausgegangen ist. Ist er auf diese Art von A nach V herabgefallen, so wird er hier dieselbe Geschwindigkeit haben, die er beim Falle durch DV erhalten hätte, auf der andern Seite aber wird er aufsteigen, bis er nach B gelangt ist.

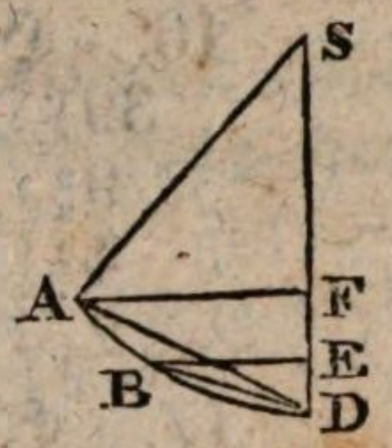


8. Hat der Körper eine Pendelbewegung, so wird, abgesehen von den Wirkungen der Reibung, dieselbe Eigenschaft sich zeigen. So hänge man eine Kugel mittels einer biegsa-

men Schnur SD an einem Stifte in S auf; ist sie von da durch den Bogen DE gefallen, so wird sie in einem gleichen und ähnlichen Bogen EA bis nach A, in derselben Horizontallinie mit D steigen, und von E nach A in demselben Zeitraume gelangen, als sie von D nach E gefallen war. Hält nun ein in P oder p hervorragender Stift den Faden in seinem Laufe an, so wird sich die Kugel dennoch bis B oder C, in derselben Horizontallinie mit A und D, erheben: sie wird aber die aufsteigenden Theile der Curven in kürzern Zeiträumen beschreiben, als den herabgehenden Ast derselben.



9. Wenn ein Pendel aus seiner verticalen Lage gezogen wird, so wird es in der Richtung der Tangente der Curve, die es beschreibt, mit einer Kraft beschleunigt, die gleich dem Sinus seines Winkelabstands von der verticalen Lage ist. Die beschleunigende Kraft in A verhält sich daher zur beschleunigenden Kraft in B, wie AF zu BE. (Siehe Art. 5. von dem Schwerpuncte.)



Hiervon können Versuche leicht überzeugen.

10. Wenn derselbe oscillirende Körper sich auf verschiednen Bogen bewegt, so wird seine Geschwindigkeit in dem tiefsten Puncte den Sehnen der ganzen beschriebenen Bogen proportional seyn. Es wird sich daher die Geschwindigkeit in D, wenn das Pendel den Bogen ABD beschrieben hat, zu der Geschwindigkeit in D, wenn dasselbe nur den Theil BD beschrieben hätte, verhalten, wie AD zu BD.

11. Ferner die Geschwindigkeit nach Durchlaufen des Bogens ABD verhält sich zur Geschwindigkeit, die der Körper auf dem Bogen BD erlangt, wie $\sqrt{FD} : \sqrt{ED}$.

Wollte man daher einem Körper eine gegebene Geschwindigkeit V ertheilen, so hat man nur nöthig FD, welches gleich $\frac{V^2}{2g} = \frac{V^2}{64\frac{1}{3}\text{ Fuß}}$ ist, zu berechnen, und durch den Punct F die Horizontallinie FA zu ziehen; läßt man dann den Körper, wie ein Pendel durch den Bogen ABD fallen, so wird er in D angekommen die gegebene Geschwindigkeit haben.

Dieß ist bei Versuchen über den Stoß der Körper höchst wichtig.

12. Die Schwingungen der Pendel in Cykloidenbogen sind isochronisch, oder geschehen in gleichen Zeiten.

13. Schwingungen in kleinen Theilen eines Kreisbogens sind isochronisch.

14. Die Anzahl der Schwingungen zweier verschiedner Pendel in derselben Zeit und an demselben Orte stehen in dem umgekehrten Verhältnisse der Quadratwurzeln aus den Längen dieser Pendel.

15. Bezeichnet l die Länge eines einfachen Pendels, oder bei einem zusammengesetzten Pendel den Abstand des Schwingungsmittelpunctes von dem Aufhängepuncte, g das Maß der Schwerkraft ($32\frac{1}{2}$ Fuß oder 386 Zoll im Niveau der Paulkirche *) in der Breite von London,) t die Zeit einer Schwingung in einem unbestimmt kleinen Kreisbogen und $\pi = 3{,}141593$, so ist:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

16. Hiernach wird seyn:

$39\frac{1}{8}$ Zoll, Länge des Secunden- }
$9\frac{2}{3}\frac{5}{2}$ Zoll, Länge des halben Secunden- } Pendels in der Breite von London.
$4\frac{2}{7}\frac{5}{2}$ Zoll, Länge des Drittel-Secunden- }
$2\frac{5}{1}\frac{7}{2}\frac{}{8}$ Zoll, Länge des Viertel-Secunden- }

17. Es ist demnach $l = 0{,}20264 \times \frac{1}{2} g$
und $\frac{1}{2} g = 4{,}9348\, l$
in irgend einer Breite und Höhe.

Kurz, wie groß auch die Schwerkraft seyn mag, die Länge eines Secunden-Pendels und der in der ersten Secunde von einem fallenden Körper frei durchfallne Raum sind in einem unveränderlichen Verhältnisse.

18. Bezeichnet l' die Länge eines Pendels, g' die Schwerkraft, und t' die Schwingungszeit an einem andern Orte, so wird seyn:

$$t : t' = \sqrt{\frac{l}{g}} : \sqrt{\frac{l'}{g'}}.$$

---

*) In dem Niveau des Meers ist in der Breite von London $g = 386{,}289$ Zoll, und die entsprechende Länge des Secunden-Pendels ist 39,1393 Zoll nach der Bestimmung des Major Kater. Damit stimmen die Zahlen in der Tafel Artikel 30 dieses Abschnitts überein, die die Herren Bramahs und Herr Donkin auf ihre Unkosten berechnen ließen, und dem Verfasser gefälligst für dieses Werk mittheilten.

Ist die Schwerkraft dieselbe:

$$t : t' = \sqrt{l} : \sqrt{l'}.$$

Wird dasselbe Pendel von ungleich gravitirenden Kräften getrieben, so ist:

$$t : t' = \sqrt{\frac{1}{g}} : \sqrt{\frac{1}{g'}} = \sqrt{g'} : \sqrt{g}.$$

Schwingen Pendel auf verschiednen Oertern in gleichen Zeiten, so ist:

$$g : g' = l : l'.$$

Ueber die Abänderung der Schwere in verschiednen Breiten sehe man Art. 9. Seite 240.

19. Sind die Bogen nicht unendlich klein, so bezeichne v den sin. vers. des halben Bogens der Schwingung; dann wird seyn:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \tfrac{1}{8} v + \tfrac{9}{256} v^2 + \text{etc.}\right)$$

Wo das dritte Glied der Reihe weggelassen werden kann, wenn der halbe Schwingungsbogen nicht 4 oder 5 Grade übersteigt.

Ist die Zeit einer Schwingung in einem unbestimmt kleinen Bogen eine Secunde, so wird die Vergrößerung der Zeit seyn:

Für einen halben Bogen	von 30° . . .	0,01675
	von 15° . . .	0,00426
	von 10° . . .	0,00190
	von 5° . . .	0,00012
	von $2\frac{1}{2}$° . .	0,00003

So daß für Schwingungen von $2\frac{1}{2}$° auf jeder Seite der Verticale die Vergrößerung nicht mehr als 2″ Unterschied an einem Tage verursachen würde.

20. Bezeichnet D die Zahl der Grade des halben Bogens eines schwingenden Körpers, so ist die in jeder Secunde durch das Schwingen in einem Kreise anstatt in einer Cykloide verlorne Zeit $\frac{D^2}{52524}$; und folglich die in einem ganzen Tage von 24 Stunden oder 24 × 60 × 60 Secunden verlorne Zeit ist nahe $\frac{5}{3} D^2$. Auf gleiche Art ist bei dem Schwingen in dem Bogen von △ Graden täglich der Secundenverlust $\frac{5}{3} \triangle^2$. Wenn daher das Pendel nach wahrer Zeit in einem dieser Bogen schwingt, so werden die durch das Schwingen in einem andern Bogen verlornen oder gewonnenen Secunden täglich seyn: $\frac{5}{3} (D^2 - \triangle^2)$. So z. B. wenn ein Pendel in einem Bogen von 3 Graden wahre Zeit schlägt, so wird es täglich $11\frac{2}{3}$ Se-

cunden verlieren, wenn es 4 Grad schwingt, $26\frac{2}{3}$ Secunden, wenn es 5 Grad schwingt, u. s. f.

21. Wenn eine Uhr sehr nahe wahre Zeit zeigt, so wird die Abänderung in der Länge des Pendels, die zur Correction des Fehlers nöthig ist, dem doppelten Producte der Länge des Pendels und des Fehlers in Zeit, dividirt durch die Zeit der Beobachtung, in der sich dieser Fehler angehäuft hat, gleich seyn.

Schlägt das Pendel Secunden, und t′ ist die tägliche Veränderung, in Minuten gegeben, n aber die Anzahl der Windungen der Schraube, welche die Linse erhebt und erniedrigt, die auf einen Zoll gehen, so ist $\lambda = \frac{\pm 2 \times 39\frac{1}{8} \times n\,t'}{24 \times 60}$ $= 0{,}05434\ n\,t' = \frac{2}{37}\ n\,t'$ nahe die Anzahl der Windungen, um welche die Linse erhoben oder erniedrigt werden muß, damit das Pendel richtig schwingt.

22. Für bürgerliche und Militair-Ingenieurs auch andre Praktiker ist es höchst nützlich, ein tragbares Pendel zu besitzen, das aus einem abgetheilten Faden, nebst einem metallenen Gewichte am Ende desselben besteht, so daß das Ganze ausgenommen das Gewicht, aufgerollt, und in ein Futteral gelegt werden kann. Der Faden ist mit 200, 190, 180, 170, 160 ꝛc., 80, 75, 70, 65, 60, in Puncten bezeichnet, die beziehungsweise als Aufhängepuncte genommen, dem Pendel 200, 190, u. s. w., bis auf 60 Schwingungen in einer Minute ertheilen werden. Solche tragbare Pendel können bei Versuchen über den Fall der Körper, der Geschwindigkeit des Schalles u. s. w. angewendet werden; man kann dasselbe nebst dem Futterale in einer Tasche bei sich führen.

23. Wenn das Moment der Trägheit (Erklärung 6.) eines einfachen oder zusammengesetzten Pendels durch das Product des Gewichts oder der Masse desselben in den Abstand seines Schwerpunctes von dem Aufhängepuncte (oder der Bewegungsaxe) dividirt wird, so drückt der Quotient den Abstand des Schwingungsmittelpunctes von dem nämlichen Puncte (oder der Axe) aus.

24. Wie groß auch die Anzahl der getrennten Massen oder Körper, aus denen ein Pendel besteht, seyn mag, so kann es doch als ein einfaches Pendel betrachtet werden, dessen Schwerpunct sich in einem Abstande d von der Aufhänge- oder Drehungsaxe befindet; wenn dann K^2 das Moment der Trägheit dieses Körpers durch seine Masse dividirt bezeichnet, so wird der Abstand SO der Drehungsaxe von dem Schwin-

gungsmittelpuncte, oder die Länge eines gleich geltenden Pendels seyn:

$$SO = \frac{d^2 + K^2}{d}.$$

25. Den Abstand des Schwingungsmittelpunctes von dem Aufhängepuncte oder der Axe durch Versuche zu bestimmen. Man zähle die Anzahl n der Schwingungen des Körpers in einem sehr kleinen Bogen in einer Minute, dann ist

$$SO = \frac{140850}{n^2}$$

Wenn daher ein Körper auf diese Art 50 Schwingungen in einer Minute macht, so ist

$$SO = \frac{140850}{2500} = 56{,}34 \text{ Zoll.}$$

Oder $SO = 39\frac{1}{8}\, t^2$ in Zollen, wenn t die Zeit einer Schwingung in einem sehr kleinen Bogen bezeichnet.

Hat der Bogen eine endliche meßbare Größe, so muß die Schwingungszeit nach dem Verhältnisse von 8 + sin. vers. des halben Bogens zu 8 umgeändert werden, bevor die Regel angewendet werden kann.

26. Aus den vorhergehenden Grundregeln sind für die Abstände der Schwingungsmittelpuncte bei verschiedenen Figuren, die an ihren Scheiteln aufgehangen sind, und nur flach schwingen, folgende Ausdrücke abgeleitet.

(1.) Gerade Linie, oder sehr dünner Cylinder $SO = \frac{2}{3}$ der Länge.

(2.) Gleichschenkliches Dreieck $SO = \frac{3}{4}$ seiner Höhe.

(3.) Kreis, $SO = \frac{5}{4}$ Halbmesser.

(4.) Apollonische Parabel, $SO = \frac{5}{7}$ der Höhe.

(5.) Jede Parabel, $SO = \frac{2m+1}{3m+1} \times$ Höhe.

Körper, welche seitwärts oder in ihrer eignen Ebene schwingen:

(6.) Im Kreise, $SO = \frac{3}{4}$ des Durchmessers.

(7.) Bei einem an einem Winkel aufgehangenen Rechtecke; $SO = \frac{2}{3}$ der Diagonale.

(8.) Bei der an ihrem Scheitel aufgehangenen Parabel, $SO = \frac{5}{7}$ der Axe + $\frac{1}{3}$ Parameter.

(9.) Bei der Parabel, wenn sie an der Mitte ihrer Grundlinie aufgehangen ist, $SO = \frac{4}{7}$ der Axe + $\frac{1}{2}$ Parameter.

(10.) Bei einem Kreisausschnitte, $SO = \frac{3 \text{ Bogen} \times \text{Halbm.}}{3 \times \text{Sehne.}}$

(11.) Bei einem Kegel, $SO = \frac{4}{5}$ Axe + $\frac{(\text{Halbmess. d. Grundfläche})^2}{5 \times \text{Axe.}}$

(12.) Bei einer Kugel, $SO = \text{Halbm.} + d + \frac{2\ \text{Halbm.}^2}{5\ (d + \text{Halbm.})}$

Wo d die Länge des Fadens bezeichnet, an dem sie aufgehangen ist.

(13.) Soll das Gewicht des Fadens in Rechnung gezogen werden, so erhält man folgenden Abstand des Mittelpunctes der Kugel von dem der Schwingung, wo B das Gewicht der Kugel, d den Abstand des Aufhängepunctes vom Mittelpuncte, r den Halbmesser der Kugel und w das Gewicht des Fadens oder des Drahtes bezeichnet:

$GO = \frac{(\frac{1}{3} w + \frac{2}{5} B)\ 4 r^2 - \frac{1}{6} w\ (2 d r + d^2)}{(\frac{1}{2} w + B)\ d - r w}$; oder, wenn man B durch w, das als Einheit betrachtet wird, ausdrückt, so ist $GO = \frac{\frac{1}{6} d}{B + \frac{1}{2}}$.

(14.) Wenn zwei Gewichte W und W′ an den Enden einer Stange von gegebener Länge W W′, wo S der Mittelpunct der Bewegung zwischen W und W′, befestigt sind; wenn man ferner $d = SW$, $D = SW'$, und m das Gewicht einer Längeneinheit des Stabes nennt, so folgt $SO = \frac{m D^3 + 3 W' D^2 + m d^3 + 3 W d^2}{m D^2 + 2 W' D - m d^2 - 2 W d}$; wo man die Halbmesser der Kugeln in Vergleichung mit der Länge der Stange als sehr klein betrachtet.

(15.) Denkt man sich die Linse eines Uhr-Pendels aus zwei gleichen an ihren Grundflächen verbundenen sphärischen Segmenten zusammengesetzt, wo der Radius jeder der Grundflächen $= \varrho$, die Höhe jedes Segments v, und d der Abstand des Aufhängepunctes von G, dem Mittelpuncte der Linse ist, so wird seyn:

$GO = \frac{1}{3} d. \frac{\varrho^4 + \frac{1}{2} \varrho^2 v^2 + \frac{1}{10} v^4}{\varrho^2 + \frac{1}{3} v^2}$; wodurch der Abstand des Schwingungsmittelpunctes von dem Mittelpuncte der Linse unterhalb angegeben wird.

Ist r, der Halbmesser der Kugel, bekannt, so wird der letzte Ausdruck:

$GO = \frac{\frac{2}{3} l^2 v \frac{1}{2} r v - \frac{1}{10} v^3}{d\ (r - \frac{1}{3} v)}$.

(16.) Wird die Länge eines Rechtecks durch 1, seine Breite durch 2w, der Abstand (längs der Mitte des Rechtecks)

von einem Ende bis zum Aufhängepuncte mit d bezeichnet, so wird SO der Abstand des Aufhängepunctes vom Mittelpuncte der Schwingung seyn:

$$SO = \frac{d^2 - dl + \frac{1}{3}l^2 + \frac{1}{3}w^2}{\frac{1}{2}l - d} = \frac{1}{2}l - d + \frac{\frac{1}{12}l^2 + \frac{1}{3}w^2}{\frac{1}{2}l - d},$$

die Figur mag nun ein rein geometrisches Rechteck oder eine prismatische metallische Platte von gleichförmiger Dichtigkeit seyn.

Aus dieser Formel folgt, daß eine 1 Fuß lange und $\frac{1}{6}$ Fuß breite Platte in $\frac{1}{4}$ Fuß Abstand von dem einen Ende aufgehangen, wie ein Secunden-Pendel schwingt.

Ferner daß eine Platte 1 Fuß lang, $\frac{1}{16}$ Fuß breit, in einem Abstande von $\frac{1}{2}$ Fuß von der Mitte aufgehangen, 36,469 Mal in 5 Stunden schwingen wird.

Es kann daher die Länge eines Fußes durch Versuche vermittels Schwingungen bestimmt werden.

(17.) Hat eine dünne Stange, einen Fuß lang, eine Kugel von einem Zoll Durchmesser an jedem Ende A und B, und einen verschiebbaren Aufhängepunct S, so kann man die Schwingungszeit eines solchen Pendels, so lang als man will, machen, wenn man den Aufhängepunct der Mitte der Stange näher und näher bringt.

Oder, wenn der Aufhängepunct fest ist, so kann der Abstand SO (und also die Schwingungszeit, die sich wie $\sqrt{SO}$ verhält) verändert werden, indem man A mehr oder weniger nahe an S bringt. Hierauf gründet sich das Metronom, nach dem die Musiker bisweilen ihr Tonmaß reguliren.

(18.) Wenn das Gewicht der Pendelstange in Vergleichung mit den Kugeln A und B als verschwindend betrachtet werden kann, ferner wenn R = dem Halbmesser der größern Kugel, r der der kleinern ist, D und d aber die Entfernungen ihrer bezüglichen Mittelpuncte von S bezeichnen, so wird man haben:

$$SO = \frac{R^3 (5 D^2 + 2 R^2) + r^3 (5 d^2 + 2 r^2)}{5 (D R^3 - D r^3)}$$

Ist R und r gleich, so wird die Formel:

$$SO = (D + d) + \frac{4}{5} \cdot \frac{r^2}{D - d}.$$

(19.) Wenn die kleine und große Axe einer Ellipse (oder einer elliptischen Platte von Holz oder Metall) sich zu einander wie 1: $\sqrt{3}$ oder wie 1000: 1732 verhalten, wenn ferner dieselbe an einem Ende der kleinen Axe aufgehangen wird, so wird der Mittelpunct der Schwingung an dem andern Ende dieser Axe liegen, oder ihre Schwingungen werden in denselben Zeiten, als bei einem einfachen Pendel, geschehen, dessen Länge der kleinen Axe gleich ist.

Dieselbe Ellipse besitzt auch folgende merkwürdige und nützliche Eigenschaft: daß ein Segment oder eine Zone der Ellipse, durch Parallelen zur großen Axe, sey es nun an dem obern Theile der kleinen Axe oder an ihrer Mitte oder an dem untern Theile, abgeschnitten, in derselben Zeit, als die ganze Ellipse schwingen wird, wenn der Aufhängepunct sich an dem einen Ende der kleinen Axe befindet.

27. Aus Artikel 17 leuchtet ein, daß Pendel in verschiednen Breiten verschiedne Längen erfordern, um ihre Schwingungen in derselben Zeit zu vollziehen; überdieß giebt es aber noch eine andere Unregelmäßigkeit in der Bewegung eines Pendels an einem und demselben Orte, die aus den verschiednen Graden der Temperatur entspringt. Da die Wärme die Pendel stärker ausdehnt, die Kälte aber zusammenzieht, so muß nothwendig eine gewisse kleine Abänderung in der Schwingungszeit erfolgen; um dies zu entfernen, hat man verschiedne Methoden erfunden, Compensations-Pendel, wie man sie nennt, oder solche Pendel zu verfertigen, die immer den nämlichen Abstand des Schwingungsmittelpunctes vom Aufhängepuncte behalten. Wir werden von diesen nur zwei oder drei beschreiben.

Die zusammengesetzten oder Compensations-Pendel haben von ihrer Gestalt und den Materialien verschiedne Namen erhalten, wie das Rost-Pendel, Queckſilber-Pendel u. s. w.

28. Das Rost-Pendel besteht aus fünf stählernen und vier messingenen Stäben, die in einer Reihe mit einander abwechseln, so jedoch, daß der mittlere Stab, an dem die Pendel-Linse hängt, von Stahl ist; überdies sind sie an ihren Endpuncten so mit einander verbunden, daß, während die Ausdehnung der stählernen Stäbe das Pendel zu verlängern strebt, die Ausdehnung der messingenen, nach oben wirkend, es verkürzt. Sind nun die Längen der eisernen und stählernen Stäbe gehörig proportional, so werden ihre Ausdehnungen und Zusammenziehungen einander genau ersetzen und verbessern, und auf diese Art unveränderlich dieselbe Länge des Pendels erhalten.

Bisweilen nimmt man bei Verfertigung der Rostpendel 3, 7 auch 9 Stäbe; auch Zink, Silber und andere Metalle können anstatt Messing und Stahl angewendet werden.

28. Das Queckfilber=Pendel wurde von Graham, einem ausgezeichneten Uhrmacher, um das Jahr 1715 erfunden. Der Stab desselben bestand aus Messing, und hielt an seinem untern Ende ein cylindrisches Glasgefäß, 13 oder 14 Zoll lang und von ungefähr 2 Zoll im Durchmesser, das, etwa 12 Zoll tief mit Queckfilber angefüllt, das Gewicht oder die Linse des Pendels vorstellte. Findet sich nun bei der Prüfung die Ausdehnung des Stabes gegen die des Queckfilbers zu groß, so muß mehr Queckfilber in das Gefäß gegossen werden; übertrifft aber die Ausdehnung des Queckfilbers die des Stabes, so daß dadurch bei zunehmender Wärme die Uhr voreilt, so muß etwas Queckfilber aus dem Gefäße herausgenommen, und die Säule verkürzt werden. Auf diese Art kann die Ausdehnung und die Zusammenziehung des Queckfilbers genau so eingerichtet werden, daß sie der Ausdehnung und Zusammenziehung der Pendelstange völlig gleich kommt, und den Abstand des Schwingungsmittelpunctes und des Aufhängepunctes unveränderlich erhält.

Diese Art Pendel kam bald nach Graham's Zeit ganz außer Gebrauch; es wurde aber vor Kurzem mit beträchtlichem Erfolge von praktischen Astronomen wieder hervorgezogen. Einen sehr unterrichtenden Aufsatz über Theorie, Einrichtung und Gebrauch desselben hat Herr F. Baily in den Denkschriften der astronomischen Gesellschaft zu London, Band 1, Theil 2, gegeben.

29. Reid's Compensations=Pendel ist eine neue Erfindung des Herrn Reid von Woolwich, dessen Einrichtung folgende ist: AN ist ein Draht=Stab, und ZZ eine hohle Röhre von Zink, die sich an dem Drahte hin und her bewegt, aber durch eine Nuß, N, auf der sie ruht, verhindert wird, zu fallen; auf dem obern Theile dieses Cylinders von Zink ruht die schwere Kugel B; nun ist die Länge der Röhre ZZ der Länge des Stabes AN so angepaßt, daß die Ausdehnungen beider Körper bei gleichen Temperatur=Graden gleich sind; indem man nämlich die Länge der Zinkröhre zu der des Drahtes, wie die Ausdehnung des Drahtes zur Ausdehnung des Zinks macht, so muß offenbar die Kugel B in allen Fällen denselben Abstand von A behaupten; denn eben so viel als sie durch die Ausdehnung des Drahtes herunter kommt, eben so viel muß sie durch die

Ausdehnung des Zinks hinaufgehen, und es werden daher bei allen Temperaturen die Schwingungen in gleichen Zeiten vollzogen werden.

30. Drummond's Compensations-Pendel.

Dieß brachte ein Künstler in Lancashire ungefähr vor 70 Jahren in Vorschlag. Ein Stab mit der Pendelstange von gleichem Metalle, gleicher Dicke und Länge wird in der Nähe des Hintertheils des Uhrgehäuses aufgestellt; oben an demselben ragt ein Theil (galgenförmig) hervor, mit dem das obere Ende des Pendels durch zwei feine biegsame Ketten oder seidner Fäden verbunden ist, welche da, wo sie an der Pendelstange befestigt sind, eng zwischen zwei messingenen Platten hindurch gehen, deren untere Kanten immer die Länge des Pendels an dem obern Ende bestimmen. Diese Platten stützen sich auf einen Fuß, der an der hintern Wand des Gehäuses befestigt ist. Der Stab aber ruht auf einer unbeweglichen Unterlage an dem Boden des Gehäuses, in einer besondern Pfanne gehalten, welche keine andere Bewegung als eine Ausdehnungs- und Zusammenziehungsbewegung in die Länge durch Wärme und Kälte zuläßt. Da bei dieser Zusammenfügung die beiden Stäbe von gleicher Größe und gleicher Beschaffenheit sind, so werden ihre Ausdehnungen und Zusammenziehungen immer gleich und in entgegengesetzten Richtungen seyn; so daß der eine dazu dient, die Wirkungen des andern zu verbessern und zu vernichten.

Eine ausführliche und schätzbare Tafel der Ausdehnungen von verschiednen Substanzen hat Herr Baily in seinem oben erwähnten Aufsatze gegeben.

Tafel der Längen und Schwingungen des Pendels.

(Siehe Anmerkung Seite 250.)

Länge in Zollen.	Schwingungszeit.	Anzahl der Schwingungen in 1 Sec.	Länge in Zollen.	Schwingungszeit.	Anzahl der Schwingungen in 1 Sec.
	s			s	
1,0	0,1598	6,256	5,3	0,3679	2,717
1,1	0,1676	5,965	5,4	0,3713	2,692
1,2	0,1751	5,711	5,5	0,3748	2,667
1,3	0,1822	5,487	5,6	0,3782	2,643
1,4	0,1891	5,287	5,7	0,3816	2,620
1,5	0,1957	5,108	5,8	0,3849	2,597
1,6	0,2021	4,945	5,9	0,3882	2,575
1,7	0,2084	4,798	6,0	0,3915	2,554
1,8	0,2144	4,663	6,1	0,3947	2,533
1,9	0,2203	4,538	6,2	0,3980	2,512
2,0	0,2260	4,423	6,3	0,4012	2,492
2,1	0,2316	4,317	6,4	0,4043	2,472
2,2	0,2370	4,217			
2,3	0,2424	4,125	6,5	0,4075	2,453
2,4	0,2476	4,038	6,6	0,4106	2,435
2,5	0,2527	3,956	6,7	0,4137	2,416
2,6	0,2577	3,879	6,8	0,4168	2,399
2,7	0,2626	3,807	6,9	0,4198	2,381
2,8	0,2674	3,738	7,0	0,4229	2,364
2,9	0,2721	3,673	7,1	0,4259	2,347
3,0	0,2768	3,612	7,2	0,4189	2,331
3,1	0,2814	3,553	7,3	0,4318	2,315
3,2	0,2859	3,497	7,4	0,4348	2,399
3,3	0,2903	3,443	7,5	0,4377	2,284
3,4	0,2947	3,392	7,6	0,4406	2,269
3,5	0,2990	3,344	7,7	0,4435	2,254
3,6	0,3032	3,297	7,8	0,4464	2,240
3,7	0,3074	3,252	7,9	0,4492	2,225
3,8	0,3115	3,209	8,0	0,4521	2,211
3,9	0,3157	3,167	8,1	0,4549	2,198
4,0	0,3196	3,128	8,2	0,4577	2,184
4,1	0,3236	3,089	8,3	0,4605	2,171
4,2	0,3275	3,052	8,4	0,4632	2,158
4,3	0,3314	3,016	8,5	0,4660	2,145
4,4	0,3352	2,982	8,6	0,4687	2,133
4,5	0,3390	2,949	8,7	0,4714	2,121
4,6	0,3428	2,916	8,8	0,4741	2,108
4,7	0,3465	2,885	8,9	0,4768	2,097
4,8	0,3502	2,855	9,0	0,4795	2,085
4,9	0,3538	2,826	9,1	0,4821	2,073
5,0	0,3574	2,797	9,2	0,4848	2,062
5,1	0,3609	2,770	9,3	0,4874	2,051
5,2	0,3644	2,743	9,4	0,4900	2,040

Länge in Zollen.	Schwingungszeit.	Anzahl der Schwingungen in 1 Sec.	Länge in Zollen.	Schwingungszeit.	Anzahl der Schwingungen in 1 Sec.
	s			s	
9,5	0,4926	2,029	14,3	0,6044	1,654
9,6	0,4952	2,019	14,4	0,6065	1,648
9,7	0,4978	2,008	14,5	0,6086	1,642
9,8	0,5003	1,998	14,6	0,6107	1,637
9,9	0,5029	1,988	14,7	0,6128	1,631
10,0	0,5054	1,978	14,8	0,6149	1,626
10,1	0,5079	1,968	14,9	0,6170	1,620
10,2	0,5105	1,958	15,0	0,6191	1,615
10,3	0,5130	1,949	15,1	0,6211	1,609
10,4	0,5155	1,939	15,2	0,6231	1,604
10,5	0,5179	1,930	15,3	0,6252	1,599
10,6	0,5204	1,921	15,4	0,6272	1,594
10,7	0,5228	1,912	15,5	0,6293	1,589
10,8	0,5253	1,903	15,6	0,6313	1,584
10,9	0,5277	1,894	15,7	0,6333	1,579
11,0	0,5301	1,886	15,8	0,6353	1,574
11,1	0,5325	1,877	15,9	0,6373	1,569
11,2	0,5349	1,869	16,0	0,6393	1,564
11,3	0,5373	1,861	16,1	0,6413	1,559
11,4	0,5396	1,853	16,2	0,6433	1,554
11,5	0,5420	1,845	16,3	0,6453	1,549
11,6	0,5444	1,837	16,4	0,6473	1,544
11,7	0,5467	1,829	16,5	0,6493	1,539
11,8	0,5490	1,821	16,6	0,6513	1,535
11,9	0,5514	1,813	16,7	0,6532	1,531
12,0	0,5537	1,806	16,8	0,6551	1,526
12,1	0,5560	1,798	16,9	0,6571	1,521
12,2	0,5583	1,791	17,0	0,6590	1,517
12,3	0,5605	1,783	17 1	0,6609	1,512
12,4	0,5628	1,776	17,2	0,6629	1,508
12,5	0,5651	1,769	17,3	0,6648	1,504
12,6	0,5673	1,762	17,4	0,6667	1,499
12,7	0,5696	1,755	17,5	0,6686	1,495
12,8	0,5718	1,748	17,6	0,6705	1,491
12,9	0,5741	1,741	17,7	0,6724	1,487
13,0	0,5763	1,735	17,8	0,6743	1,482
13,1	0,5785	1,728	17,9	0,6762	1,478
13,2	0,5807	1,721	18,0	0,6781	1,474
13,3	0,5829	1,715	18,1	0,6800	1,470
13,4	0,5851	1,709	18,2	0,6819	1,466
13,5	0,5873	1,703	18,3	0,6837	1,462
13,6	0,5894	1,696	18,4	0,6856	1,458
13,7	0,5916	1,690	18,5	0,6875	1,454
13,8	0,5938	1,684	18,6	0,6893	1,450
13,9	0,5959	1,678	18,7	0,6912	1,446
14,0	0,5980	1,672	18,8	0,6930	1,442
14,1	0,6001	1,666	18,9	0,6949	1,439
14,2	0,6023	1,660	19,0	0,6967	1,435

Länge in Zollen.	Schwingungszeit.	Anzahl der Schwingungen in 1 Sec.	Länge in Zollen.	Schwingungszeit.	Anzahl der Schwingungen in 1 Sec.
	s			s	
19,1	0,6985	1,431	23,9	0,7814	1,279
19,2	0,7003	1,427	24,0	0,7830	1,277
19,3	0,7022	1,424	24,1	0,7847	1,274
19,4	0,7040	1,420	24,2	0.7863	1,271
19,5	0,7058	1,416	24,3	0,7879	1,269
19,6	0,7076	1,413	24,4	0,7895	1,266
19,7	0,7094	1,409	24,5	0,7911	1,263
19,8	0,7112	1,405	24,6	0,7927	1,261
19,9	0,7130	1,402	24,7	0,7944	1,259
20,0	0,7148	1,398	24,8	0,7960	1,256
20,1	0,7166	1,395	24,9	0,7976	1,253
20,2	0,7184	1,391	25,0	0,7992	1,251
20,3	0,7201	1,388	25,1	0,8008	1,248
20,4	0,7219	1,384	25,2	0,8024	1,246
20,5	0,7237	1,381	25,3	0,8040	1,243
20,6	0,7254	1,378	25,4	0,8056	1,241
20,7	0,7272	1,375	25,5	0,8071	1,238
20,8	0,7289	1,371	25,6	0,8087	1,236
			25,7	0,8103	1,234
20,9	0,7307	1,368	25,8	0,8119	1,231
21,0	0,7324	1,365	25,9	0,8134	1,229
21,1	0,7342	1,361	26,0	0,8150	1,226
21,2	0,7359	1,358	26,1	0,8166	1,224
21,3	0,7377	1,355	26,2	0,8181	1,222
21,4	0,7394	1,352	26,3	0,8197	1,219
21,5	0,7411	1,349	26,4	0,8212	1,217
21,6	0,7428	1,346	26,5	0,8228	1,215
21,7	0,7446	1,343	26,6	0,8244	1,213
21,8	0,7463	1,339	26,7	0,8259	1,211
21,9	0,7480	1,336	26,8	0,8275	1,208
22,0	0,7497	1,333	26,9	0,8290	1,206
22,1	0,7514	1,330	27,0	0,8305	1,204
22,2	0,7531	1,327	27,1	0,8321	1,201
22,3	0,7548	1,324	27,2	0,8336	1,199
22,4	0,7565	1,321	27,3	0,8351	1,197
22,5	0,7582	1,318	27,4	0,8367	1,195
22,6	0,7598	1,315	27,5	0,8382	1,193
22,7	0,7615	1,313	27,6	0,8397	1,191
22,8	0,7632	1,310	27,7	0,8412	1,189
22,9	0,7649	1,307	27,8	0,8427	1,186
23,0	0,7665	1,304	27,9	0,8443	1,184
23,1	0,7682	1,301	28,0	0,8458	1,182
23,2	0,7699	1,298	28,1	0,8473	1,180
23,3	0,7715	1,296	28,2	0,8488	1,178
23,4	0,7732	1,293	28,3	0,8503	1,176
23,5	0,7748	1,290	28,4	0,8518	1,173
23,6	0,7765	1,287	28,5	0,8533	1,171
23,7	0,7781	1,285	28,6	0,8548	1,169
23,8	0,7798	1,282	28,7	0,8563	1,167

Länge in Zollen.	Schwingungszeit.	Anzahl der Schwingungen in 1 Sec.	Länge in Zollen.	Schwingungszeit.	Anzahl der Schwingungen in 1 Sec.
	s			s	
28,8	0,8578	1,165	34,2	0,9347	1,069
28,9	0,8593	1,163	34,3	0,9361	1,068
29,0	0,8607	1,161	34,4	0,9375	1,066
29,1	0,8622	1,159	34,5	0,9389	1,065
29,2	0,8637	1,157	34,6	0,9402	1,063
29,3	0,8652	1,155	34,7	0,9415	1,062
29,4	0,8667	1,154	34,8	0,9429	1,060
29,5	0,8682	1,152	34,9	0,9443	1,059
29,6	0,8696	1,150	35,0	0,9456	1,057
29,7	0,8711	1,148	35,1	0,9470	1,055
29,8	0,8726	1,146	35,2	0,9483	1,054
29,9	0,8741	1,144	35,3	0,9497	1,052
30,0	0,8755	1,142	35,4	0,9510	1,051
30,1	0,8769	1,140	35,5	0,9523	1,050
30,2	0,8784	1,138	35,6	0,9537	1,048
30,3	0,8798	1,136	35,7	0,9550	1,047
30,4	0,8813	1,135	35,8	0,9563	1,045
30,5	0,8827	1,133	35,9	0,9577	1,044
30,6	0,8842	1,131	36,0	0,9590	1,042
30,7	0,8856	1,129	36,1	0,9603	1,041
30,8	0,8870	1,127	36,2	0,9617	1,039
30,9	0,8885	1,125	36,3	0,9630	1,038
31,0	0,8899	1,123	36,4	0,9643	1,036
31,1	0,8914	1,121	36,5	0,9657	1,035
31,2	0,8928	1,120	36,6	0,9670	1,034
31,3	0,8942	1,118	36,7	0,9683	1,032
31,4	0,8956	1,116	36,8	0,9696	1,031
31,5	0,8971	1,114	36,9	0,9709	1,029
31,6	0,8985	1,112	37,0	0,9722	1,028
31,7	0,8999	1,111	37,1	0,9736	1,027
31,8	0,9013	1,109	37,2	0,9749	1,025
31,9	0,9027	1,107	37,3	0,9762	1,024
32,0	0,9042	1,105	37,4	0,9775	1,023
32,1	0,9056	1,104	37,5	0,9788	1,021
32,2	0,9070	1,102	37,6	0,9801	1,020
32,3	0,9084	1,100	37,7	0,9814	1,018
32,4	0,9098	1,099	37,8	0,9827	1,017
32,5	0,9112	1,097	37,9	0,9840	1,016
32,6	0,9126	1,095	38,0	0,9853	1,014
32,7	0,9140	1,094	38,1	0,9866	1,013
32,8	0,9154	1,092	38,2	0,9879	1,012
32,9	0,9168	1,090	38,3	0,6892	1,010
33,0	0,9182	1,089	38,4	0,9905	1,009
33,1	0,9196	1,087	38,5	0,9918	1,008
33,2	0,9210	1,085	38,6	0,9931	1,006
33,3	0,9224	1,084	38,7	0,9943	1,005
33,4	0,9237	1,082	38,8	0,9956	1,004
33,5	0,9251	1,080	38,9	0,9969	1,003
33,6	0,9265	1,079	39,0	0,9982	1,001
33,7	0,9279	1,077	39,1	0,9995	1,000
33,8	0,9293	1,076	39,2	1,0001	0,9993
33,9	0,9306	1,074			
34,0	0,9320	1,072			
34,1	0,9334	1,071			

Mittelpunct der Drehung, Grundsätze der Rotationsbewegung.

1. Der Abstand des Drehungsmittelpunctes R von dem Mittelpuncte oder der Axe der Bewegung C wird in einigen der wichtigsten Fälle wie folgt bestimmt:

Bei einem kreisrunden Rade von gleichförmiger Dicke
$CR =$ Halbmesser $\times \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Bei der Peripherie eines Kreises, der sich um den Durchmesser dreht $CR =$ Halbmesser $\times \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Bei der Ebene eines Kreises, ditto $CR = \frac{1}{2}$ Halbmesser.

Bei der Oberfläche einer Kugel, ditto $CR =$ Halbmesser $\times \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Bei einer soliden Kugel, ditto $CR =$ Halbmesser $\times \sqrt{\frac{2}{5}}$.

Bei einem ebenen Ringe von concentrischen Kreisen gebildet, deren Halbmesser R, r und wo die Axe durch den Mittelpunct geht, $CR = \sqrt{\frac{R^4 - r^4}{2R^2 - 2r^2}}$

Bei einem Kegel, der sich um seinen Scheitel dreht, $CR = \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{1}{5}a^2 + \frac{2}{5}r^2)}$

Bei einem Kegel, der sich um seine Axe dreht, $CR = r\sqrt{\frac{3}{10}}$.

Bei einem geraden Hebel, dessen Arme R und r sind, $CR = \sqrt{\frac{R^3 + r^3}{3(R + r)}}$.

2. Soll bei einem sich drehenden Körper die Masse genau so vertheilt werden, als ob sie sich in dem Drehungsmittelpuncte befände, so müßte dieselbe entweder in die Peripherie eines Kreises, dessen Halbmesser CR ist, oder in zwei Puncte R, R′ verlegt werden, die sich gerade entgegengesetzt sind, und von denen jeder von dem Mittelpuncte um CR absteht.

3. Durch die Theorie des Drehungsmittelpunctes und die daraus hergeleiteten Werthe von $CR = \varrho$ werden die Erscheinungen der Drehung an einer festen Axe mit den Erscheinungen, welche beschleunigte Kräfte bewirken, in Verbindung gebracht; denn wenn ein Gewicht oder eine andere bewegende Kraft P einem Körper in einer Entfernung r eine Drehungsbewegung zu ertheilen strebt, so gilt, das Gewicht mit W und den Abstand des Drehungsmittelpunctes von der Bewegungsaxe mit ϱ bezeichnet, für die beschleunigende Kraft der Ausdruck:

$$f = \frac{P r^2}{P r^2 + W \varrho^2};$$

folglich für den von dem wirkenden Gewichte oder der Kraft P in einer gegebenen Zeit t durchfallene Raum die gewöhnliche Formel

$$s = \tfrac{1}{2} f g t^2; \quad \ldots \ldots t = \sqrt{\frac{2s}{fg}}; \text{ u. s. w.}$$

wo man den obigen Werth von f einführen kann.

4. In den verwickelteren Fällen kann der Abstand des Drehungsmittelpunctes von der Bewegungsaxe am besten aus einem Versuche berechnet werden. Es werde dem Systeme eine Drehungsbewegung um eine horizontale Axe durch ein Gewicht P ertheilt, das vermittels einer Schnure über einer Rolle oder einem Rade von dem Halbmesser r an eben derselben Axe wirkt; s sey der Raum, durch den das Gewicht P in der Zeit t fällt, indem der Körper, dessen Gewicht W ist, sich um dieselbe Axe mit derselben Winkelgeschwindigkeit dreht; dann ist:

$$CR = \varrho = \sqrt{\frac{g P t^2 r^2 - 2s P r^2}{2s W}}.$$

Beispiel. Ein Körper, der 100 Pfund wiegt, dreht sich um eine horizontale Axe, indem ihm von einem Gewichte von 10 Pfund, das an einem sehr leichten Rade von einem Fuße Durchmesser hängt, Bewegung mitgetheilt wird. Das Gewicht fällt 2 Fuß in 3 Secunden; man sucht den Abstand des Drehungsmittelpunctes oder Kreises von der Bewegungsaxe.

Nimmt man hier $g = 32$ anstatt $32\frac{1}{6}$, so erhält man einen Annäherungswerth. Daher

$$CR = \sqrt{\frac{32 \times 10 \times 9 \times \frac{1}{4} - 4 \times 10 \times \frac{1}{4}}{4 \times 100}} = \sqrt{\frac{720 - 10}{400}}$$

$$= \tfrac{1}{20} \sqrt{710} = \frac{26{,}646}{20} = 1{,}3323 \text{ Fuß}.$$

5. Wenn der einem Körper mitgetheilte Stoß eine Richtung hat, die durch dessen Schwerpunct geht, so bewegen sich alle Puncte des Körpers mit derselben Geschwindigkeit und in Linien, die der Richtung des mitgetheilten Stoßes parallel sind. Geht aber die Richtung des Stoßes nicht durch den Schwerpunct, so erhält der Körper eine Drehungsbewegung um eine Axe und auch eine fortschreitende Bewegung, wodurch sein Schwerpunct in der nämlichen geraden Linie und mit derselben Geschwindigkeit fortgeführt wird, als wenn die Richtung des Stoßes durch den Schwerpunct gegangen wäre. Die fortschreitende und drehende Bewegung sind von einander unabhängig, da jede dieselbe ist, wenn auch die andere nicht da wäre.

6. Wenn ein Körper sich um eine Axe dreht, und es wirkt auf denselben eine Kraft, die ihn um eine andere zu drehen strebt, so bewegt er sich um keine von beiden, sondern um eine Linie, die mit beiden in derselben Ebene liegt, und den Winkel, den beide einschließen, so theilt, daß sich der Si-

nus der Theile umgekehrt wie die Winkelgeschwindigkeiten verhalten, mit denen der Körper sich um jede der beiden Axen besonders gedreht haben würde.

7. Ein Körper kann eine Drehungsbewegung um eine Axe, die durch seinen Schwerpunct geht, beginnen, er wird sich jedoch nicht beständig um diese Axe drehen, wenn nicht die entgegengesetzten Drehungskräfte einander genau das Gleichgewicht halten.

Dies kann durch einen sehr einfachen Versuch erläutert werden. Man hänge eine dünne Kreisscheibe von Holz oder Metall durch eine an ihrem Rande befestigte Schnur an einem Haken auf, dem eine schnelle Drehungsbewegung ertheilt werden kann. Die Scheibe wird sich zuerst um eine Axe drehen, die in der Verlängerung der Drehungsschnur liegt. Bei Vergrößerung der Geschwindigkeit wird sie aber sogleich diese Axe verlassen, und sich unaufhörlich um eine Axe drehen, die durch ihren Schwerpunct geht, sie selbst aber dabei eine horizontale Lage annehmen.

Dasselbe wird sich bei der Aufhängung eines Ringes ereignen, der auf gleiche Art eine Drehungsbewegung annimmt.

Wird eine biegsame Kette mit ihren Enden durch kleine Glieder zusammengefügt, an eine Schnur gebunden und derselben eine Drehungsbewegung ertheilt, so wird sie bald die Gestalt eines Ringes annehmen, und sich in einer horizontalen Ebene herumdrehen.

Wenn ferner ein abgeplattetes Sphäroid an einem Puncte, der nicht in der kleinen Axe zu liegen braucht, aufgehangen und ihm eine schnelle Drehungsbewegung ertheilt wird, so wird es sich zuletzt um seine kürzere, vertical liegende Axe drehen.

Dies bestätigt offenbar die Bewegung der Erde um ihre kürzere Axe.

8. Bei einem jeden Körper lassen drei Axen, die mit einander rechte Winkel bilden, eine unveränderte Bewegung zu. Diese heißen die Hauptaxen der Rotation; sie haben die merkwürdige Eigenschaft, daß in Bezug auf jede von ihnen das Moment der Trägheit entweder seinen größten oder kleinsten Werth hat.

Central-Kräfte.

Erklärung 1. Centripetal-Kraft ist eine Kraft, welche einen Körper immer gegen einen gewissen festen Punct oder Mittelpunct treibt.

2. Centrifugal=Kraft ist diejenige, vermöge welcher er sich von einem solchen Mittelpuncte entfernen würde, wenn ihn die Centripetalkraft nicht daran verhinderte.

3. Diese beiden Kräfte zusammen heißen Central=Kräfte.

4. Wenn ein Körper einen Kreis durch eine Kraft beschreibt, die nach dem Mittelpuncte desselben gerichtet ist, so ist seine Geschwindigkeit überall derjenigen gleich, die er erhalten würde, wenn er mit derselben gleichförmig wirkenden Kraft durch den halben Halbmesser fiele.

5. Diese Geschwindigkeit ist eben so groß als diejenige, die ein zweiter Körper erhalten würde, der durch den halben Halbmesser fiele, während der erste einen Theil des Umkreises beschreibt, der dem ganzen Halbmesser gleich ist.

6. Bei gleichen Kreisen verhalten sich die Kräfte umgekehrt wie die Quadrate der Zeiten.

7. Sind die Zeiten gleich, so verhalten sich die Geschwindigkeiten wie die Halbmesser; eben so auch die Kräfte.

8. Im Allgemeinen verhalten sich die Kräfte direct wie die Abstände oder Halbmesser der Kreise, und umgekehrt wie die Quadrate der Zeiten.

9. Die Quadrate der Zeiten verhalten sich direct wie die Abstände, und umgekehrt wie die Kräfte.

10. Wenn daher die Kräfte sich umgekehrt wie die Quadrate der Abstände verhalten, so verhalten sich die Quadrate der Zeiten wie die Würfel der Abstände. Das ist:

wenn $F : f = d^2 : D^2$, so verhält sich $T^2 : t^2 = D^3 : d^3$.

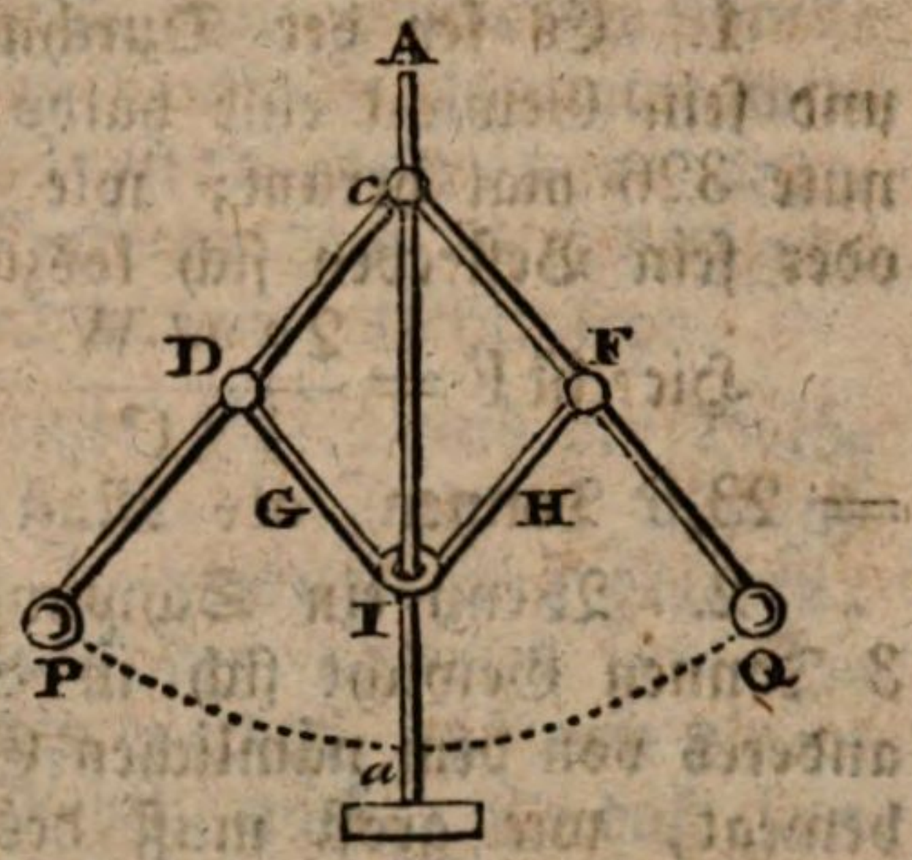
11. Die gerade Linie, welche einen sich umdrehenden Körper mit seinem Anziehungsmittelpuncte verbindet, und Zuglinie (Radius vector) genannt wird, beschreibt immer in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume; und die Geschwindigkeit des Körpers verhält sich umgekehrt wie die Senkrechte, die vom Anziehungsmittelpuncte aus auf die Tangente der Curve an demjenigen Puncte gezogen wird, in dem sich der bewegte Körper befindet.

12. Wenn ein Körper sich in einer elliptischen Bahn durch eine Kraft bewegt, die nach einen der Brennpuncte gerichtet ist, so verhält sich die Kraft umgekehrt wie das Quadrat des Abstandes; die mittlern Abstände und die Umlaufszeiten haben dasselbe Verhältniß wie in Art. 10. Dieser Fall enthält die Gesetze der Planetenbewegungen.

13. Wenn die Kraft, die einen Körper auf einer Curve erhält, in dem einfachen Verhältnisse mit dem Abstande wächst, so wird der Körper noch eine Ellipse beschreiben, aber die Kraft wird in diesem Falle nach den Mittelpunct der Ellipse gerich=

tet seyn; und bei jeder Umdrehung wird sich der Körper ihm zweimal nähern, und sich zweimal von ihm entfernen.

14. Von den Grundsätzen der Central=Kräfte hängt auch die Wirkung eines Kegel=Pendels ab, dessen man sich als eines Regulators bei Dampfmaschinen, Wassermühlen u. s. w. bedient.



Man wird diese Erfindung leicht aus der Figur kennen lernen, wo A a eine verticale Stange ist, die sich frei auf der Grundfläche a herumdrehen kann. c D, c F sind zwei Stangen, die sich frei um den Mittelpunct c drehen und an ihren untern Enden zwei gleiche Gewichte P und Q tragen, die Stangen c D, c F sind durch ein besonderes Gelenk mit den Stangen G, H verbunden, welche letztere an einem Ringe I befestigt sind, der an der verticalen Stange A a auf= und abgleiten kann. Wenn diese Stange A a und der damit verbundene Apparat herumgedreht wird, so werden die Kugeln P und Q, in Folge der Centrifugalkraft, mehr und mehr sich von dem Stabe A a entfernen, je nachdem die Drehungsgeschwindigkeit zunimmt; wenn dagegen die Drehungsgeschwindigkeit nachläßt, so fallen die Kugeln und nähern sich dem Stabe A a. Der Ring I steigt im erstern Falle, fällt aber im zweiten; und ein mit I verbundener Hebel kann so eingerichtet werden, daß er die Energie der bewegenden Kraft gehörig verbessert. So kann in der Dampfmaschine der Ring so gemacht werden, daß er auf das Ventil wirkt, durch das der Dampf in dem Cylinder gelassen wird; daß er dasselbe mehr öffnet, wenn die Bewegung nachläßt und umgekehrt dichter schließt, wenn die Bewegung sehr stark ist.

Die Einrichtung ist oft so abgeändert, daß das Divergiren der Kugeln den Ring niederdrückt und umgekehrt; aber das allgemeine Gesetz ist in beiden Fällen dasselbe.

Wird hier der verticale Abstand von P oder Q unter c mit d bezeichnet, die Zeit einer Umdrehung des Regulators mit t, und 3,141593 mit π, so giebt die Theorie der Centralkräfte

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{d}{32\frac{1}{6}}} = 1{,}10784\sqrt{d}.$$

Daher verändert sich die Umlaufszeit wie die Quadratwurzel aus der Höhe des Kegel=Pendels bei einem beliebigen Halbmesser der Grundfläche. Wenn ferner I C Q = I C P

= 45° ist, so ist die Centrifugalkraft jeder Kugel ihrem Gewichte gleich.

Untersuchungen, die mit der Umdrehung und den Centralkräften in Verbindung stehen.

1. Es sey der Durchmesser eines Mühlsteines 44 Zoll, und sein Gewicht eine halbe Tonne; er drehe sich in einer Minute 326 mal herum; wie groß wird seine Centrifugal-Kraft oder sein Bestreben sich loszureißen seyn?

Hier ist $F = \frac{2\varrho\pi^2 W}{\frac{1}{2} g t^2} = \frac{\frac{44}{12} \times 3{,}141593\, W}{16 \times (\frac{60}{326})^2} = 47{,}22\ W$

= 23,6 Tonnen, als Maß der gesuchten Kraft.

2. Wenn ein Schwungrad von 12 Fuß Durchmesser und 3 Tonnen Gewicht sich in 8 Secunden herumdreht, und ein anderes von dem nämlichen Gewichte sich in 6 Secunden herumbewegt, wie groß muß des letztern Durchmesser seyn, wenn ihre Centrifugalkraft gleich ist?

Nach Artikel 10. der Centralkräfte ist: $F : f = \frac{D}{T^2} : \frac{d}{t^2}$;

da nun F = f ist, so wird seyn $\frac{D}{T^2} = \frac{d}{t^2}$, oder $d = \frac{Dt^2}{T^2} = \frac{12 \times 36}{64} = 6\frac{3}{4}$ Fuß.

3. Wenn ein Schwungrad von 12 Fuß Durchmesser sich in 8 Secunden herumdreht, und ein anderes von dem nämlichen Durchmesser in 6 Secunden, was ist das Verhältniß ihrer Gewichte, wenn die Centralkräfte gleich sind?

Nach Artikel 6, Centralkräfte, verhalten sich die Kräfte umgekehrt, wie die Quadrate der Zeiten, wenn die Gewichte gleich sind: wenn dies daher nicht der Fall ist, so müssen sie sich direct wie die Quadrate der Zeiten verhalten, damit die Centralkräfte gleich seyn können.

Daher $w : W = 36 : 64 = 1 : 1\frac{7}{9}$.

Das heißt, es muß sich das Gewicht des sich schneller drehenden Rades zu dem Gewichte des sich langsamer drehenden in dem vorliegenden Falle verhalten, wie $1 : 1\frac{7}{9}$.

4. Wenn ein Schwungrad von 2 Tonnen Gewicht und 16 Fuß Durchmesser hinreicht, eine Maschine zu reguliren, wenn es sich in 4 Secunden herumdreht, wie groß muß das Gewicht eines andern Rades von 12 Fuß Durchmesser seyn, das sich in 2 Secunden herum dreht, so daß es auf die Maschine dieselbe Kraft äußert?

Hier muß man nach Artikel 8 Centralkräfte haben $\frac{WD}{T^2}$ $= \frac{wd}{t^2}$; daher $w = \frac{WDt^2}{dT^2} = \frac{40 \text{ Ct.} \times 16 \times 4}{12 \times 16} = \frac{160}{12}$ $= 13\frac{1}{3}$ Centner, als Gewicht des kleinern Rades.

Anmerkung. Ein Schwungrad muß immer für schnelle Bewegung eingerichtet seyn. Soll es blos als Regulator wirken, so müßte es in der Nähe des ersten Bewegers angebracht werden; soll es aber die Kraft in dem Wirkungspuncte verstärken, so muß es weit davon entfernt seyn.

5. Es ist der Halbmesser R eines Rades und der Halbmesser r seiner Axe, das Gewicht beider w und der Abstand des Drehungsmittelpunctes von der Bewegungsaxe ϱ gegeben; ferner wirkt eine bekannte Kraft P auf den Umkreis des Rades; es soll das Gewicht W gefunden werden, das von einem um die Axe geschlungenen Seile gehoben wird, so daß sein Moment einen größten Werth hat.

Hier ist $W = \frac{\sqrt{R^4 P^2 + 2R^2 P\varrho^2 w + \varrho^4 w^2 + PwRr\varrho^2 + P^2 R^3 r} - R^2 P - \varrho^2 w}{r^2}$.

Zusatz 1. Wenn $R = r$ wie in dem Falle der einfachen befestigten Rolle, so ist

$W = \sqrt{2P^2 R^3 + 2RP\varrho^2 w + \frac{\varrho^4}{R} w^2 + PwR\varrho^2} - \frac{\varrho^2}{R^2} w - P.$

Zusatz 2. Ist die Rolle ein Cylinder von gleichförmigem Material, so wird $\varrho^2 = \frac{1}{2} R^2$ und der Ausdruck wird $W = \sqrt{R^3 (2P^2 + \frac{3}{2} Pw + \frac{1}{4} w^2)} - \frac{1}{2} w - P.$

6. Eine gegebene Kraft P werde an dem Umkreise eines Rades angebracht, dessen Halbmesser R ist, um ein an seiner Axe, dessen Halbmesser r, befestigtes Gewicht W zu erheben; man verlangt das Verhältniß von R und r, wenn W mit dem größten Momente erhoben wird; wo die Buchstaben W und ϱ dasselbe bezeichnen, als in dem letzten Satze.

Hier ist $r = \frac{R\sqrt{P^2 W^2 + P^3 (q + W) PW}}{P (q + W)}$.

Zusatz. Wenn in Vergleich mit der Trägheit von $P + W$ die Trägheit der Maschine verschwindet, so ist $r = R\sqrt{(1 + \frac{P}{W})} - 1$.

7. Bei einer Maschine mit beschleunigter Bewegung wird das Gewicht mit der größten Geschwindigkeit bewegt werden,

wenn sich die Geschwindigkeit der Kraft zu der des Gewichtes verhält, wie $1 + P\sqrt{1 + \frac{P}{W}}$ zu 1; wo die Trägheit der Maschine nicht berücksichtigt ist.

8. Wenn bei einer Maschine mit beschleunigter Bewegung das Fallen eines Gewichtes das Aufsteigen eines andern bewirkt, und das herabfallende Gewicht gegeben ist, so wird, wenn man sich die Wirkung beständig erneuert denkt, die Wirkung in einer gegebenen Zeit am größten seyn, wenn sich das aufsteigende Gewicht zu dem fallenden verhält, wie 1 : 1,618 in dem Falle gleicher Höhen; in andern Fällen: wenn es zu dem genauen Gegengewichte in einem Verhältnisse steht, das sich immer zwischen 1 zu $1\frac{1}{2}$ und 1 zu 2 hält.

Stoß.

1. Erklärung. Bei der gewöhnlichen Theorie des Stoßes werden die Körper entweder als hart, weich oder elastisch betrachtet. Ein harter Körper ist derjenige, dessen Theile beim Stoße nicht nachgeben, sondern ihre Gestalt unverändert behalten. Ein weicher Körper ist, dessen Theile einem Stoße oder Eindrucke nachgeben, ohne ihre vorige Lage wieder einzunehmen, so daß die Gestalt des Körpers verändert bleibt. Ein elastischer Körper aber weicht zwar einem erhaltenen Stoße oder Eindrucke, nimmt aber sogleich die Gestalt wieder an, die er vor dem Stoße hatte. Wenn Körper, die einem Stoße oder Eindrucke nachgegeben haben, blos zum Theil ihre frühere Gestalt wieder erlangen, so ist die Elasticität unvollkommen; versetzen sie sich aber ganz wieder in ihren vorigen Zustand zurück und brauchen, um denselben wieder zu erhalten, gerade eben so viel Zeit, als zu dem Verluste desselben verwendet wurde, so ist ihre Elasticität vollkommen.

Man hat gewöhnlich blos von dem Stoße vollkommen harter oder vollkommen elastischer Körper gehandelt; da es aber in der Natur keine Körper (so weit wir sie kennen) weder von der einen, noch von der andern Art giebt, so sind die gewöhnlichen Theorieen für praktische Mechaniker von wenig Nutzen, ausgenommen insofern sie eine Anwendung auf wirkliche Gegenstände der Natur und Kunst erleiden.

2. Das allgemeine Gesetz zur Bestimmung der Bewegung von Körpern vermittels des Stoßes, das sich sowohl auf elastische als nicht elastische Körper bezieht, ist folgendes: Es findet bei den Körpern dasselbe Moment oder dieselbe Quantität der Bewegung in einer und derselben Richtung genommen

sowohl vor als nach dem Stoße Statt. Dieses Gesetz ist eine unmittelbare Folge des Naturgesetzes der Bewegung, daß die Wirkung der Gegenwirkung, und zwar in entgegengesetzter Richtung, gleich ist; daher kommt es, daß, was auch immer für eine Bewegung einem Körper durch die Wirkung eines andern mitgetheilt sey, der letzte Körper immer genau dieselbe Bewegung in derselben Richtung verliert, oder ihm vom ersten genau dieselbe Bewegung in entgegengesetzter Richtung mitgetheilt wird.

Aus diesem allgemeinen Gesetze ergiebt sich auch, daß, in Rücksicht auf den gemeinschaftlichen Schwerpunct beider Körper, durch ihre gegenseitige Wirkung auf einander keine Veränderung geschieht; sondern daß der gemeinschaftliche Schwerpunct in demselben Zustande, entweder der Ruhe oder gleichförmiger Bewegung, sowohl vor als nach dem Zusammentreffen beharrt.

3. Ist das Zusammentreffen zweier vollkommen harter Körper direct, so bleiben sie nach dem Stoße entweder in Ruhe, oder bewegen sich zusammen gleichförmig mit verschiednen Geschwindigkeiten, je nach den Umständen, unter denen sie sich treffen.

B und b mögen zwei vollkommen harte Körper vorstellen, V bezeichne die Geschwindigkeit von B, v die von b, die entweder positiv oder negativ genommen werden kann, je nachdem sich b mit B in derselben oder in entgegengesetzter Richtung bewegt; sie wird aber Null seyn, wenn b in Ruhe ist. Kennt man diese Bezeichnungen, so lassen sich alle Umstände der Bewegung zweier Körper nach dem Stoße durch die Formel:

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{BV + bv}{B + b},$$

ausdrücken, die auf alle drei Haupt-Werthe paßt, denen v unterworfen seyn kann:

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{BV + bv}{B + b}$$ bei Bewegung beider Körper nach einer Richtung;

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{BV - bv}{B + b}$$ bei Bewegung der Körper nach entgegengesetzten Richtungen.

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{B + b}{BV}$$ wenn der Körper b in Ruhe war.

Diese Formeln finden unter der Voraussetzung Statt, daß die Körper vollkommen hart sind, und sich folglich beide nach dem Stoße wie eine Masse gleichförmig fortbewegen. Für elastische Körper gelten andere Formeln, die die Bewegung jedes Körpers besonders ausdrücken, wie im folgenden Satze.

4. Ist der Stoß zweier vollkommen elastischer Körper direct, so sind ihre relativen Geschwindigkeiten sowohl vor als nach dem Stoße dieselben, oder sie werden sich mit derselben

Geschwindigkeit von einander entfernen, mit welcher sie sich trafen; das heißt, sie werden sowohl vor als nach dem Stoße in gleichen Zeiten gleich weit von einander entfernt seyn, obgleich jedes Körpers absolute Geschwindigkeit sich verändert haben kann. Die Umstände, die diesen Wechsel der Bewegung in den beiden Körpern begleiten, werden, mit Beibehaltung obiger Bezeichnung, in folgenden Formeln ausgedrückt:

$\frac{2bv + (B-b)V}{B+b}$ die Geschwindigkeit von B

$\frac{2BV + (B-b)v}{B+b}$ die Geschwindigkeit von b;

welche keine Abänderungen für den Fall erleiden, daß sich b und B in denselben Richtungen bewegen.

5. In dem andern Falle der Bewegung des Körpers b werden die allgemeinen Formeln

$\frac{-2bv + (B-b)V}{B+b}$ die Geschwindigkeit von B

$\frac{2BV - (B-b)v}{B+b}$ die Geschwindigkeit von b,

wenn b und B sich in entgegengesetzter Richtung bewegen, wo man v negativ nehmen muß. Und

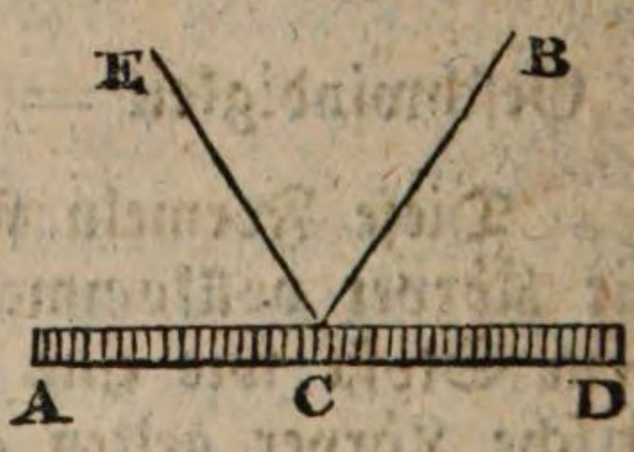
$\frac{(B-b)V}{B+b}$ die Geschwindigkeit von B

$\frac{2Bv}{B+b}$ die Geschwindigkeit von b

wenn b vor dem Stoße in Ruhe, also $v = 0$ war.

6. Wenn ein vollkommen harter Körper B schief gegen eine vollkommen harte und unbewegliche Ebene AD trifft, so wird er sich nach dem Stoße längs der Ebene in der Richtung CA fortbewegen. Und es verhält sich seine Geschwindigkeit vor dem Stoße zu seiner Geschwindigkeit nach demselben, wie der Halbmesser zu den Cosinus des Winkels BCD.

Ist aber der Körper elastisch, so wird er von der Ebene in der Richtung CE mit derselben Geschwindigkeit und unter demselben Winkel abspringen, unter dem er gegen sie traf, das heißt der Winkel ACE wird dem Winkel BCD gleich seyn.



7. Im Falle eines directen Zusammentreffens, wenn B der stoßende, b der gestoßene Körper, V und v ihre beziehungsweisen Geschwindigkeiten vor, U und u dieselben nach

dem Stoße bezeichnen, finden folgende zwei allgemeine Formeln statt:

$$U = V - n\left(\frac{V - v}{B + b}\right) b$$

$$u = v + n\left(\frac{V - v}{B + b}\right) B.$$

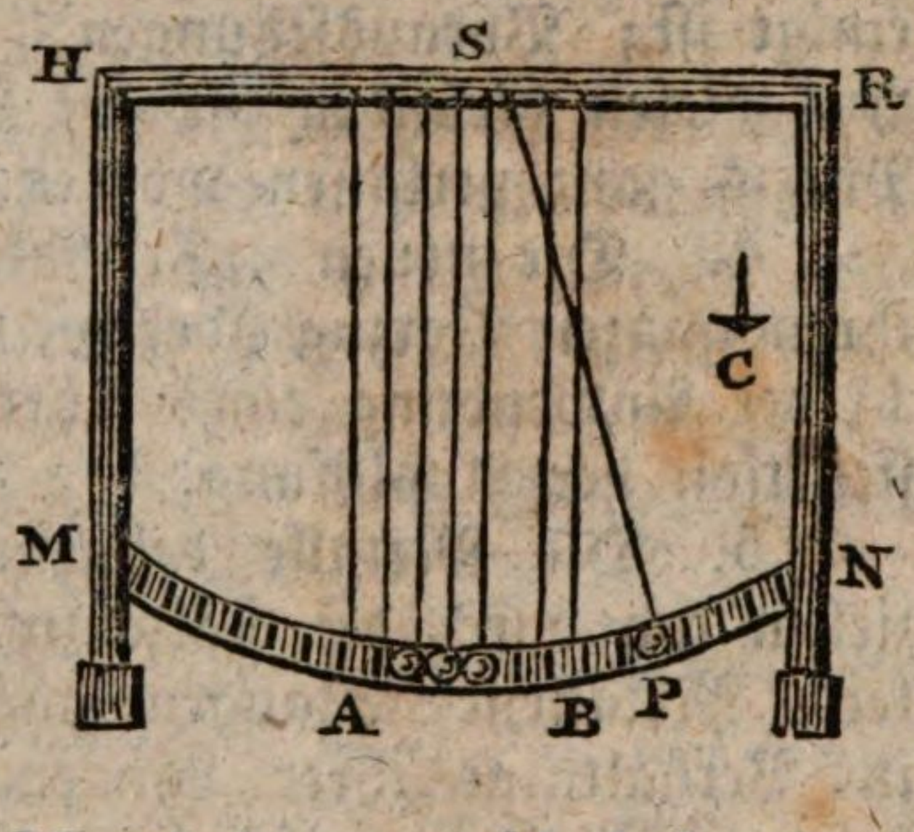
Ist hier $n = 1$, so dienen sie für nicht-elastische Körper; ist $n = 2$, für vollkommen elastische. Für nicht vollkommen elastische Körper hat n dazwischen liegende Werthe.

Wenn der gestoßene Körper in Ruhe ist, so werden die vorhergehenden Gleichungen folgende:

$$U = V - \frac{n\,V\,b}{B+b};\quad u = \frac{n\,V\,B}{B+b};\quad n = \frac{u\,(B+b)}{BV};$$

woraus der Werth von n durch Versuche bestimmt werden kann.

8. Bei dem gewöhnlichen Apparate für Versuche über den Stoß werden Kugeln von verschiedner Größe und verschiednen Bestandtheilen an mehrere Aufhängepuncte einer horizontalen Stange HR gehangen. MN ist ein Kreisbogen, dessen Mittelpunct S ist; und seine Eintheilungen 1, 2, 3, 4, 5 u. s. w. zeigen die Länge von Sehnen, von dem untersten Puncte aus gemessen, an. Es kann daher eine Kugel, P zum Beispiel, aus der verticalen Richtung gezogen werden, und mit einer bestimmten Geschwindigkeit gegen eine andere Kugel stoßen, welche an dem tiefsten Puncte hängt; die Höhe, bis zu welcher sich die gestoßene Kugel auf der Seite AM erhebt, gewährt ein Maß ihrer Geschwindigkeit; und durch dieselbe kann aus der letzten Gleichung der Werth von n bestimmt werden. Kugeln, die nicht mit in einen Versuch gezogen werden sollen, können hinter den Rahm gelegt werden, wie A und B.



An eine Schnure kann die Schale C befestigt werden, um, wenn es verlangt wird, eine Kugel von Thon u. s. w zu tragen.

Beispiel. Eine Kugel von 4 Unzen Gewicht trifft gegen eine andere von 3 Unzen mit einer Geschwindigkeit 10, und ertheilt ihr eine Geschwindigkeit von $8\frac{1}{4}$; welches wird in diesem Falle der Werth von n seyn?

Hier ist $n = \frac{u\,(B+b)}{BV} = \frac{8\frac{1}{4} \times 7}{4 \times 10} = \frac{57\frac{3}{4}}{40} = 1{,}44375$ als

Anzeiger des Grades der Elasticität; vollkommne Elasticität würde durch 2 angezeigt werden.

Grundlehren von den Chronometern.

1. Ein Uhrwerk, das von einer einfachen Unruhe regulirt wird, ist zur genauen Zeitmessung nicht passend.

2. Ein Uhrwerk, das von einem Pendel regulirt wird, welches in einem Kreisbogen schwingt, ist ebenfalls zur genauen Zeitmessung untauglich. Erstlich, weil die Schwingungen in größern und kleinern Bogen nicht in gleichen Zeiten geschehen. Zweitens, weil die Länge des Pendels mit der Wärme und Kälte zu- und abnimmt.

3. Ein Uhrwerk, das von einem Pendel regulirt wird, welches in einem Cykloidenbogen schwingt, ist zur genauen Zeitmessung untauglich.

Der Isochronismus der Schwingungen eines Cykloidenpendels ist nur unter der Voraussetzung richtig, daß das Pendel sich in einem nicht Widerstand leistenden Mittel bewegt, und daß die ganze Masse des Pendels in einem Puncte vereinigt ist; Voraussetzungen, die nicht wirklich Statt finden. Aus diesen Gründen ist die Anwendung der Cykloide in der Praxis ganz verlassen worden.

4. Die neuen „Zeithalter" (time-keepers) verdanken ihren ganzen Vorzug über die früheren fast nur zwei Umständen: 1) der Anwendung eines Thermometers; 2) der besondern Construction der Auslösung.

5. Die Metalle dehnen sich durch die Wärme aus, und ziehen sich durch die Kälte zusammen; dies zeigt das Pyrometer. Metallene Stangen aus demselben Material dehnen sich im Verhältnisse ihrer Längen aus. Metalle verschiedner Art dehnen sich nach verschiednen Verhältnissen aus; so verhält sich die Ausdehnung des Eisens und Stahls wie 3, des Kupfers wie $4\frac{1}{2}$, des Messings wie 5, des Zinns wie 6, des Blei's wie 7. Daher afficiren Pendelstangen, indem sie sich durch den Wechsel der Temperatur ausdehnen und zusammenziehen, den Gang der Uhren, an denen sie angebracht sind.

Zur Verbesserung der Fehler der Pendel durch Zusammenziehen und Ausdehnen bei Kälte und Wärme hat man verschiedne Erfindungen gemacht. Die hauptsächlichsten derselben sind oben bei dem Pendel Seite 255 beschrieben worden.

6. Die Unruhe einer Taschenuhr ist dem Pendel in ihren Eigenschaften und ihrem Gebrauche analog.

Die einfache Unruhe ist ein Ring, der in allen seinen Theilen gleich schwer, und mit den Zapfen der Axe, an die sie

angebracht, concentrisch ist. Diese Unruhe wird, nach einer sinnreichen Erfindung Hook's, von einer Spiralfeder, in Bewegung gesetzt.

7. Das Pendel erfordert eine geringere erhaltende (maintaining) Kraft, als die Unruhe.

Daher wird der natürliche Isochronismus des Pendels durch die verhältnißmäßig kleinen Ungleichheiten der erhaltenden Kraft weniger gestört.

8. Die Elasticität der Feder, welche auf den Umkreis der Unruhe wirkt, verhält sich direct wie ihre Spannung; das heißt, die Gewichte, welche erforderlich sind, um der Kraft einer Spiralfeder das Gleichgewicht zu halten, wenn die Unruhe in verschiednen Abständen vom Ruhepuncte schwingt, stehen im directen Verhältnisse der Bogen, durch die sie schwingt.

9. Die Schwingungen einer Unruhe sowohl durch große als kleine Bogen werden in derselben Zeit vollzogen.

Denn die beschleunigende Kraft verhält sich direct wie der Abstand vom Ruhepuncte; daher ist die Bewegung der Unruhe der Bewegung eines Pendels analog, das in Cykloidenbogen schwingt.

10. Die Schwingungszeit einer Unruhe ist eben so groß, als wenn eine Quantität Materie von gleicher Trägheit wie diejenige, durch welche die Masse, die in der Unruhe enthalten ist, der Bewegung des Umkreises widersteht, vermittels einer beschleunigenden Kraft gleich derjenigen der Unruhe einen Cykloidenbogen beschriebe, dessen Länge dem Schwingungsbogen gleich wäre, den der Umkreis beschreibt.

Weil in beiden Fällen die beschriebenen Räume gleich sind, so wie auch die beschleunigenden Kräfte in den entsprechenden Puncten, so sind es daher auch die Schwingungszeiten.

11. Bezeichnet 1 die beschleunigende Kraft der Schwere, L die Länge eines Secundenpendels, das in einer Cykloide schwingt, a den halben Schwingungsbogen der Unruhe, T die Schwingungszeit und F die beschleunigende Kraft der Unruhe, so wird seyn $T = \sqrt{\frac{a}{L \times F}}$.

12. Es sey $\frac{1}{2}$ g der Raum, den ein aus dem Zustande der Ruhe frei fallender Körper in der ersten Secunde beschreibt, und $\pi = 3{,}141593$ die Peripherie eines Kreises, dessen Durchmesser die Einheit ist, dann wird seyn:

$$T = \sqrt{\frac{a\,\pi^2}{g\,F}}.$$

In dieser Formel bezeichnet der Buchstabe a die Länge des halben Schwingungsbogens; sollte dieser Bogen durch eine

Anzahl Grade c^o ausgedrückt werden, und r der Halbmesser der Unruhe seyn, so ist $a = \frac{r \pi c^o}{180^o}$; und wird diese Größe für a substitutirt, so wird die Schwingungszeit seyn:

$$T = \sqrt{\frac{3 \pi c^o}{gF \times 180^o}};$$

Ist aber der Bogen 90°, so ist in diesem Falle

$$T = \sqrt{\frac{r \pi c}{2 g F}}.$$

13. Wenn die elastische Kraft der Feder, die durch den gegebenen Winkel oder Bogen $= 90^o$ von der Lage der Ruhe an gerechnet, $= P$ ist; das Gewicht der Unruhe und der Theile, welche mit ihr schwingen $= W$, der Abstand des Drehungsmittelpunctes von der Bewegungsaxe $= \varrho$, so wird seyn

$$T = \sqrt{\frac{W \pi^3 \varrho^2}{2 P r g}}.$$

Diese Formeln gelten für die Zeit einer Schwingung bei beliebiger Gestalt der Unruhe; die übrigen Bedingungen bleiben dieselben, wie sie oben aufgestellt wurden. Ist die Unruhe ein Ring oder eine Cylinderscheibe, so ist $\varrho = \frac{r}{\sqrt{2}}$, und die Schwingungszeit $T = \sqrt{\frac{W \pi^3 r}{4 P g}}$.

14. Die Schwingungszeiten verschiedner Unruhen stehen in einem Verhältnisse, das aus dem directen Verhältnisse der Quadratwurzeln aus den Producten ihrer Gewichte und Halbmesser, und dem umgekehrten Verhältnisse der Quadratwurzeln aus den Spannungen der Federn oder den Gewichten, welche ihnen das Gleichgewicht halten, wenn sie um einen gegebenen Winkel gewunden sind, zusammengesetzt ist.

15. Die Schwingungszeiten verschiedener Unruhen stehen in einem Verhältnisse, das aus dem directen einfachen Verhältnisse der Halbmesser, dem directen Verhältnisse der Quadratwurzeln ihrer Gewichte, und dem umgekehrten Verhältnisse der Quadratwurzeln der absoluten Kräfte der Federn bei einer gegebenen Spannung zusammengesetzt ist.

16. Daher verhält sich die absolute Kraft der Spiralfeder bei gleichem Gewichte und Durchmesser umgekehrt wie das Quadrat der Zeit einer Schwingung.

17. Die absolute Kraft der Spiralfeder verhält sich bei gleicher Schwingungszeit und gleichem Gewichte der Unruhe wie das Quadrat des Durchmessers der Unruhe.

18. Das Gewicht der Unruhe verhält sich bei gleicher Fe-

derkraft und Schwingungszeit umgekehrt wie das Quadrat des Durchmessers.

Daher ist eine große Unruhe weit leichter als eine kleine, mit der sie in derselben Zeit und mit derselben Feder schwingt.

19. Wenn der Reif der Unruhe überall von derselben Breite und Dicke ist, so daß das Gewicht sich wie der Halbmesser verhalten muß, so muß die Federkraft sich wie die dritte Potenz des Durchmessers der Unruhe verhalten, wenn die Schwingungszeit immer dieselbe bleiben soll.

20. Wenn eine Unruhe durch zwei Kugeln gebildet wird, die durch einen Stab verbunden sind, und die Gewichte und Abstände dieser Kugeln von ihrem gemeinschaftlichen Bewegungsmittelpuncte ungleich sind, jedoch so, daß jede besonders in derselben Zeit schwingen würde, so wird der Schwerpunct dieser Kugeln nicht mit ihrem Bewegungsmittelpuncte zusammenfallen, noch werden sie einander das Gleichgewicht halten.

21. Das Moment der Unruhe wird besser durch Vergrößerung ihres Durchmessers als ihres Gewichts vergrößert.

22. Eine stärkere Spiralfeder ist einer schwächern vorzuziehen; weil, indem die Kraft dieser Feder auf die Unruhe dieselbe bleibt, während die störende Kraft eine Aenderung erleidet, die Fehler, die aus der Veränderung entstehen, um so kleiner werden, je größer die constante Kraft ist.

23. Je länger eine isolirte Unruhe ihre Bewegung fortsetzt, desto besser ist sie.

Weil 1) die Reibung in diesem Falle geringer ist, und daher der natürliche Isochronismus der Schwingung weniger gestört wird. 2) Wird sie in die Uhr gesetzt, so erfordert sie eine geringere erhaltende Kraft, und es werden daher die Veränderungen in der Intensität dieser Kraft kleiner seyn. 3) Ist diese Kraft kleiner, so wird die Reibung des Räderwerks geringer, und daher die Bewegung regelmäßiger. 4) Wird auch der Druck auf die Auslösung kleiner seyn, und die Schwingungen der Unruhe werden daher weniger gestört werden.

24. Je größer die Anzahl der Schwingungen ist, die eine Unruhe in einer gegebenen Zeit macht, desto weniger ist sie äußern Störungen unterworfen.

25. Langsame Schwingungen sind schnellen vorzuziehen, jedoch in einer bestimmten Grenze; denn sind die Schwingungen zu langsam, so ist die Uhr in Gefahr, stehen zu bleiben.

Berücksichtigte man die Wirkung äußerer Störungen allein, so würden Unruhen, welche schnell schwingen, denen welche langsam schwingen, vorgezogen werden müssen; allein dergleichen sind mit größern Unannehmlichkeiten begleitet, als die, welche man vermeiden will. 1) Bei zwei Unruhen von dem-

selben Gewichte und Durchmesser wächst die Reibung an den Zapfen mit der Anzahl der Schwingungen. 2) Die Erfahrung zeigt, daß dieselbe freie Unruhe länger fortfährt zu schwingen, wenn ihre Schwingungen langsam als wenn sie schnell sind.

26. Eine Unruhe muß so große Bogen als möglich als von 240°, 260°, 300° oder einen ganzen Kreis beschreiben.

Erstlich, weil auf diese Art das Moment der Trägheit vergrößert wird, und daher die Ungleichheiten in der Energie der erhaltenden Kraft damit in einem kleinern Verhältnisse stehen, und folglich weniger Einfluß darauf äußern werden. Zweitens, weil die Unruhe äußeren Störungen weniger unterworfen ist. Drittens, weil eine gegebene Veränderung in der Größe der Schwingungen eine geringere Aenderung in dem Gange der Uhr hervorbringt. Man muß aber Sorge tragen, daß bei diesen großen Schwingungen die Feder weder auf ein Hinderniß trifft, noch ihre Windungen bei dem Zusammenziehen einander berühren.

27. Die Schwingungszeiten bei größern Bogen sind bisweilen kürzer, bisweilen länger als bei kleineren Bogen.

28. Eine gleichförmige Spiralfeder kann vollkommen isochronisch gemacht werden, wenn man ihre Länge und Anzahl der Windungen gehörig justirt.

Dieß ist Berthoud's Meinung; sein Raisonnement scheint folgendes zu seyn: Wenn die Feder, welche eine Spirale von einer gewissen Art bildet, so eingerichtet wird, daß, wenn sie um verschiedne Winkel gewunden wird, die beschleunigenden elastischen Kräfte der Windungen von dem Mittelpuncte gegen den Umkreis stärker wachsen, als sie es sollten, um die Schwingungen isochronisch zu machen, so kann man auf andere Art, nämlich dadurch, daß man die aufeinander folgenden Windungen der Gleichheit näher bringt, bewirken, daß das Gesetz der Veränderung ganz so ist, wie es der absolute Isochronismus verlangt. So wie nun die Grund-Eigenschaft der Federn, daß sich nämlich die Kraft wie die Spannung verhält, durch Versuche bestätigt ist, so kann auf gleiche Weise jene Eigenschaft auf eben dieselbe Art erprobt werden. Berthoud erzählt, daß er an einer Unruhe eine Spiralfeder, deren Durchmesser 15 Linien war, und die nur drei Schwingungen machte, so angebracht habe, daß sie nach und nach durch Winkel von 5°, 10°, 15°, 20°, 25°, 30°, 35°, 40°, 45°, 60°, 120° gewunden worden sey, und dann die Gewichte, welche das Gleichgewicht gehalten hätten, in Granen gewesen wären $10\frac{1}{2}$, 21, 32, 42, 54, 65, 76, 88, 99, 134, 278. Als aber dieselbe Feder sehr kleine Windungen und bei acht Linien Durchmesser fünf Drehungen gemacht habe, so

seyen bei gleichen Winkeln, durch die sie gewunden war, die Gegengewichte in Granen gewesen: 11, 22, 33, 45, 56, 67, 78, 89, 100, 133, 250. Diese Versuche sind, wie er versichert, mit großer Sorgfalt angestellt worden; und sie beweisen, daß dieselbe Spirale bei unveränderter Länge in großen und kleinen Windungen einen bedeutenden Unterschied in der fortschreitenden Veränderung ihres Isochronismus zeigt; nach dem ersten Versuche sind bei großen Windungen die Schwingungen in größern Bogen beschleunigt, langsamer aber sind sie nach dem zweiten Versuche bei engern Windungen.

29. Eine Spiralfeder kann durch besondere Ajustirung ihrer Stärke und Dicke in verschiednen Theilen isochronisch gemacht werden.

30. Eine Spiralfeder, welche nicht isochronisch ist, kann es dadurch gemacht werden, daß man zwei Hülfsfedern hinzufügt, deren Ruhepuncte besonders bestimmt werden.

Dieß war die sinnreiche Erfindung von Mudge; eine Theorie dieser Einrichtung hat Atwood in den Philosoph. Transact. for 1794 gegeben.

31. Der Einfluß der erhaltenden Kraft auf die Unruhe bei Erneuerung der Bewegung, die durch Reibung oder andere Ursachen verloren geht, kann entweder ununterbrochen, oder unterbrochen seyn.

Dieß hängt von der Auslösung ab; wenn die Wirkung jener Kraft ununterbrochen ist, so heißt die Auslösung entweder eine zurückspringende (escapement recoil) oder eine todte, ruhende (escapement dead-beat); ist sie aber unterbrochen, so heißt die Auslösung eine freie.

32. Unter Auslösung versteht man die Art und Weise, wie die Wirkung der Räder angewendet wird, um die Unruhe im Schwingen zu erhalten; sie besteht aus dem Steigrade und Paletten.

33. Paletten sind kleine Platten oder Hebel, die an die Axe oder den Rand der Unruhe angebracht sind, die den Impuls des Steigrades, der von der erhaltenden Kraft erzeugt wird, aufnehmen, und auf diese Art die Bewegung unaufhörlich erneuern, die die Unruhe durch Reibung oder andern Widerstand verliert.

Wenn bei der zurückspringenden Auslösung ein Zahn des Steigrades über die erste Palette hinweggleitet, so fällt der andere wirkende Zahn auf die geneigte Ebene der andern Palette, die schräg gegen ihn trifft, und bewirkt, daß das Steigrad zurückspringt, woher auch diese Auslösung ihren Namen hat.

Wenn bei der ruhenden oder todten Auslösung ein Zahn des Steigrades über die geneigte Ebene der ersten Palette hinweggleitet, so fällt sogleich der andere wirkende Zahn auf die convexe Oberfläche der andern Palette, und da diese Oberfläche mit der Axe der Unruhe einen gemeinschaftlichen Mittelpunct hat, so bleibt das Rad in Ruhe, bis durch die Bewegung der Palette oder des Cylinders die geneigte Ebene des Zahnes auf die Fläche dieser letztern Palette oder auf den Rand des Cylinders wirkt, dann durch ihren Druck auf diesen Rand den Cylinder herumdreht, und so die Unruhe in Bewegung setzt; hierauf greift der Zahn in den Einschnitt des Cylinders ein, fällt auf die concave Fläche, und bleibt aus ebenderselben Ursache, wie vorher, in Ruhe, bis die Spiralfeder den Cylinder in einer entgegengesetzten Richtung, als es vorher geschah, herumzieht, so daß die geneigte Ebene des Zahnes auf den andern Rand des Cylinders wirken kann; dieser Druck dreht den Cylinder in der entgegengesetzten Richtung herum, der Zahn tritt aus der Höhlung heraus, und in demselben Augenblicke fällt der folgende Zahn auf die convexe Oberfläche, und so fort. Von dem Stillstande des Steigrades während des Zeitintervalles, das zwischen dem Fallen des wirkenden Zahnes auf die Oberfläche und seinem Drucke auf den Rand des Cylinders vergeht, heißt diese Auslösung die ruhende.

Bei der freien Auslösung wird die Bewegung der erhaltenden Kraft fast während der ganzen Schwingungszeit aufgehoben; sobald aber die Unruhe zurückgekehrt ist, macht sie sogleich das Räderwerk frei, indem sie auf die Palette wirkt, und die Bewegung, die die Unruhe verloren hatte, erneuet; nach ertheiltem Stoße wird das Räderwerk sogleich wieder gehemmt, und die Unruhe vollzieht ihre Schwingung frei und ohne alle Verbindung mit den andern Theilen der Maschine.

34. Bei der zurückspringenden Auslösung sind die Schwingungen schneller, als wenn die Unruhe oder das Pendel frei schwingt.

Bei der zurückspringenden Auslösung wird der aufsteigende Theil der Schwingung wegen Zusammenziehung des Bogens kürzer; und die Gegenwirkung des Rades beschleunigt den fallenden Theil der Schwingung.

35. Bei einer ruhenden Auslösung sind die Schwingungen kürzer, als im freien Zustande. Denn der Druck des Zahnes auf die Oberfläche des Cylinders hemmt den Theil der Schwingung, die sich ereignet, während der Cylinder durch die Bewegung der Spiralfeder sich so weit herumdreht, bis sein Rand den Zahn berührt; durch Vermehrung der erhaltenden

Kraft kann der Druck des Zahnes auf den Cylinder so groß werden, daß die Bewegung völlig gehemmt wird. Hat der Zahn dem Rande des Cylinders einen Impuls ertheilt, so bewegt sich derselbe fast ganz frei; und da der Zahn noch nicht mit seiner ganzen Kraft auf die nächste Oberfläche drückt, so wird der Cylinder in der That einen größern Bogen beschreiben, und daher in dieser Rücksicht die Zeit abgekürzt werden; hat er aber den ganzen Impuls des Rades aufgenommen, so kehrt er blos kraft der Elasticität zurück; nun erzeugt der Druck des Rades eine Reibung, die das Streben zu dem Ruhepuncte zurückzukehren vermindert, so daß die Unruhe kürzere Schwingungen vollzieht.

36. Wenn bei der zurückspringenden Auslösung die erhaltende Kraft verstärkt wird, so werden die Schwingungen in längeren Bogen aber in kürzerer Zeit vollzogen werden.

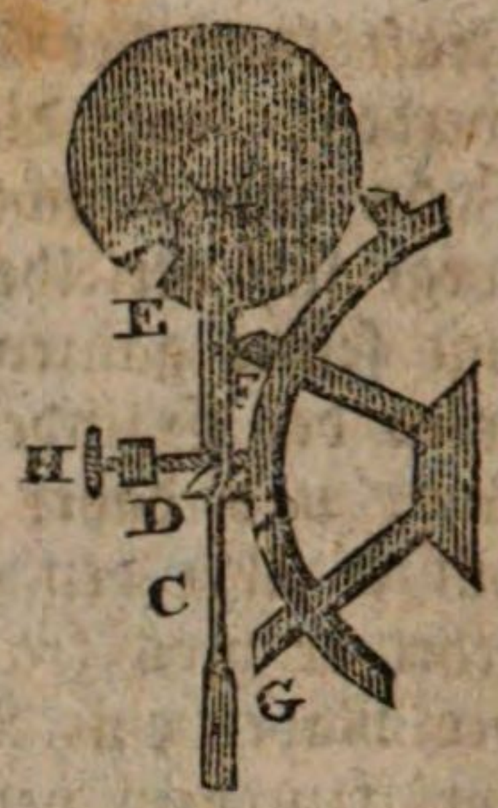
Daher wird der größere Druck des Kronrades auf die Palette bewirken, daß die Unruhe in größeren Bogen schwingt, und die Zeit wird in dieser Hinsicht weniger verlängert werden, als sie durch die Beschleunigung der Unruhe durch diesen Druck und die Verminderung der Zeit des Zurückspringens verkürzt wird.

37. Bei der Auslösung mit dem Cylinder oder der ruhenden Auslösung macht eine Vergrößerung der erhaltenden Kraft die Schwingungen größer und zu gleicher Zeit langsamer.

Daher bewegt der größere Druck des Zahnes auf den Rand des Cylinders denselben durch einen größeren Bogen, und sein vergrößerter Druck auf beide Oberflächen des Cylinders hemmt seine Bewegung.

Der obere Theil der ersten Figur stellt die zurückspringende Ankerauslösung, der untere Theil Graham's ruhende Auslösung dar.

Die zweite Figur stellt Arnold's Taschenuhren-Auslösung dar. Der Stift A, der von der Axe der Unruhe hervor-



ragt, bewegt sich gegen B, und treibt die Feder B zugleich mit der härteren Feder C vor sich her, so daß dadurch der Zahn D, der auf einer Palette, die von der Feder hervorragt, ruht, ausgelöst wird. Der Einschnitt E der Haupt-Palette ist dann eben an dem Zahn F vorübergegangen, und wird so lange von ihm getrieben, bis der Zahn G an die Spannfeder (den Einfall detent) gelangt. Bei der Rückkehr der Unruhe geht der Stift A bequem bei der Spannfeder vorbei, da der untere Theil der Feder B zurückgedrückt ist. Die Schraube H, welche gegen die Spannfeder drückt, dient dazu ihre Lage gehörig zu berichtigen.

38. Die Auslösung kann die Schwingungen nur insofern isochronisch machen, als ihre Ungleichheit von der erhaltenden Kraft ausgeht, jedoch nicht in wiefern sie von äußern Störungen erzeugt werden.

39. Die Wirkung äußerer Störungen auf die Unruhe kann durch die doppelte Auslösung verhindert werden.

Bei dieser Auslösung werden zwei gleiche Unruhen so verbunden, daß sie durch gleiche Winkel, jedoch in entgegengesetzten Richtungen schwingen, wodurch die eine beinahe eben so sehr beschleunigt werden muß, als die andere, wenn diese durch eine äußere Ursache gestört wird. Wenn aber, wie Cummins bemerkt, Unruhen durch Räder verbunden werden, so entsteht ein Widerstand, der, wenn er auch gering ist, doch, da er in diesen höchst empfindlichen Theilen angebracht wird, streben wird das Moment der Unruhen zu schwächen.

40. Am besten ist die Auslösung, bei der die Dauer der Wirkung des Steigrades auf die Paletten im Vergleich mit der Schwingungszeit die kleinste ist.

Daher ist die beste die freie Auslösung, welche eine Erfindung des sinnreichen Künstlers Mudge zu seyn scheint, der auf diese Art eine Uhr für den verstorbenen König von Spanien, Ferdinand VI., in dem Jahre 1755 fertigte.

41. Die Schwingungszeit der Unruhe wird durch Hitze vergrößert, durch Kälte vermindert.

Erstlich, weil die Länge der Spiralfeder durch Hitze verlängert, ihre Kraft daher vermindert wird; das Gegentheil aber bei der Kälte statt findet. Zweitens wird der Durchmesser der Unruhe, und daher auch die Schwingungszeit durch Hitze vergrößert; bei der Kälte findet wieder das Gegentheil statt.

42. Die beste Unruhe ist die, die ohne die Compensation

des Thermometers am meisten dem Einflusse der Hitze und Kälte unterworfen ist.

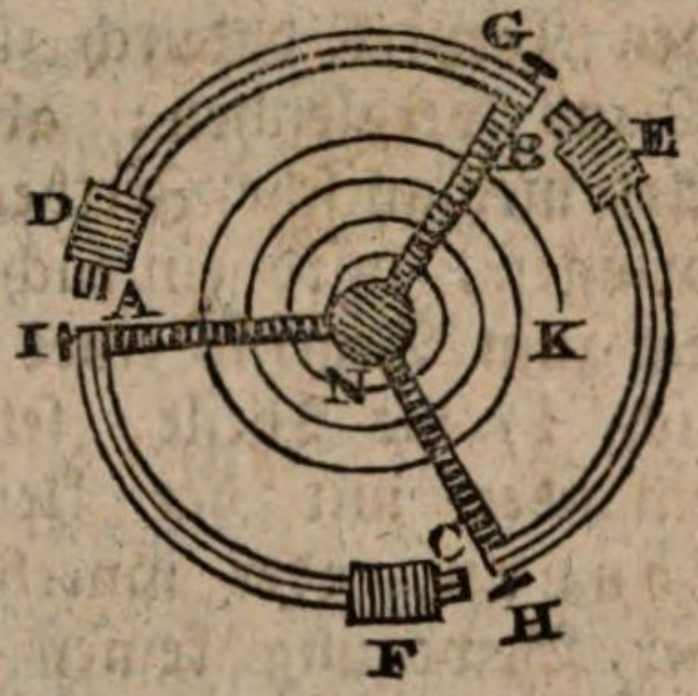
Da die Hindernisse, die Oel und Reibung erzeugen, auf die Ausdehnung und die Zusammenziehung der Feder und der Unruhe compensirend wirken, so ist die Unruhe, die am meisten afficirt wird, am wenigsten dem Einflusse des Oels und der Reibung unterworfen.

43. Die Fehler in dem Gange einer Uhr, die von dem Wechsel der Temperatur herrühren, können durch Veränderung der Länge der Spiralfeder verbessert werden.

Da es jedoch sehr schwer ist, eine isochronische Spirale zu verfertigen, so ist eine Veränderung ihrer Länge sehr bedenklich, weil man auf diese Art leicht den Punct verliert, der ihren Isochronismus bestimmt.

44. Die Fehler in dem Gange einer Uhr, die durch die Veränderung der Temperatur erzeugt werden, können verbessert werden, wenn man den Durchmesser der Unruhe verändert.

Dies kann dadurch bewirkt werden, daß man den Rand der Unruhe in zwei oder mehr besondere Theile GD, IF, HE theilt, deren jeder aus zwei zusammengenieteten Metallplatten von verschiedner Ausdehnbarkeit zusammengesetzt ist, so jedoch, daß die am wenigsten ausdehnbaren dem Mittelpuncte N am nächsten sind, und an einem Ende D, F, E ein Gewicht führen, während das andere entweder mit dem Rande der Unruhe oder einem ihrer Halbmesser verbunden ist. Wächst nun die Temperatur, so wird, da sich die äußere Platte mehr als die innere ausdehnt, die Verbindung auf der Seite des Mittelpunctes concaver werden; das Ende folglich, welches das Gewicht trägt, wird sich dem Mittelpuncte der Unruhe annähern, und aus diesem Grunde werden die Schwingungen beschleunigt werden. Am Ende eines jeden Thermometers befindet sich eine Schraube, G, I, H, durch die der Dürchmesser der Unruhe vergrößert oder verkleinert werden kann, so daß die Zeit, die das Chronometer hält, auf diese Art verändert wird, ohne daß eine Collision mit dem Ajustement für Hitze und Kälte erzeugt werden kann; und ist die Größe und Lage der Gewichte passend eingerichtet, so werden sie den Fehler verbessern, der aus der durch Temperaturwechsel entstandenen Veränderung des Durchmessers erzeugt wird. (Young's Analysis). Wer sich über die-



sen Gegenstand praktische Kenntnisse erwerben will, kann sich mit Nutzen „Hutton's Einleitung in den mechanischen Theil der Uhrwerke" bedienen.

XI. Kapitel.

Hydrostatik.

1. Die Hydrostatik ist die Lehre von dem Drucke und dem Gleichgewichte unelastisch-flüssiger Körper, wie Wasser, Queckſilber u. dgl.; auch handelt sie von dem Gewichte und dem Drucke fester Körper, die in flüssige eingetaucht werden.

2. Erklärung. Ein flüssiger Körper ist der, dessen Theile sehr klein sind, einer auch kleinen drückenden Kraft nachgeben, und durch dieses Nachgeben sich leicht unter einander bewegen.

Manche versuchen einen mechanischen Begriff eines flüssigen Körpers dadurch zu geben, daß sie ihn mit einem Haufen Sand vergleichen; aber die Unmöglichkeit durch irgend eine Art mechanische Zertheilung fester Körper Flüssigkeit hervorzubringen, wird einleuchten, wenn man zwei Umstände bedenkt, die zum Begriffe eines flüssigen Körpers gehören: daß nämlich 1) die Theile, selbst zusammengedrückt, in Beziehung auf einander mit der kleinsten merklichen Kraft bewegt werden können, oder innerhalb der Masse in irgend einer Richtung der Bewegung keinen merklichen Widerstand leisten; 2) daß die Theile auf einander einen Druck ausüben, wobei ein beständiges Bestreben, sich um einen gemeinschaftlichen Mittelpunct zu ordnen, und einen sphärischen Körper zu bilden, statt findet, welches bei kleinen Körpern leicht geschehen kann, da die Theile der Bewegung keinen Widerstand leisten. Daher kommen Tropfen zum Vorschein, wenn ein Fluidum sich selbst überlassen wird; offenbar kann aber ein Sandkörper diese Gestalt nicht freiwillig annehmen.

Verschiedne Fluida haben verschiedne Grade des Flüssigseyns, je nach der Leichtigkeit, mit der die Theilchen unter einander bewegt werden können. Wasser und Queckſilber gehören unter die am meisten flüssigen Körper. Manche Flüssigkeiten haben einen sehr merklichen Grad von Starrheit, und heißen daher zähflüssige oder unvollkommen flüssige Körper.

3. Erklärung. Die Flüssigkeiten können in compressible und incompressible oder elastische und anelastische eingetheilt werden. Eine compressible oder elastische

Flüssigkeit ist eine solche, deren Volumen sich im Verhältnisse zu dem Drucke, der darauf ausgeübt wird, vermindert, und bei einer Verminderung des Druckes sich vergrößert. Hierher gehören die Luft und die verschiednen Arten Dämpfe. Ein incompressibler oder nicht elastischer Körper ist ein solcher, dessen Dimensionen durch Vergrößerung des Drucks wenigstens nicht merkbar verändert werden. Wasser, Queckſilber, Wein u. s. w. gehören in diese Classe.

Vor einigen Jahren brachte man in Vorschlag, die Anwendung des Wortes Fluidum auf diejenigen Körper zu beschränken, welche elastisch sind, Liquida hingegen die nichtelastischen zu nennen. Es ist dies aber eine unnöthige Beschränkung.

4. Erklärung. Das specifische Gewicht eines festen oder flüssigen Körpers ist das absolute Gewicht eines bekannten Volumens dieser Substanz, nämlich desjenigen, das man bei dem Messen des Inhalts von Körpern als Einheit annimmt.

Vergleicht man diese Erklärung mit der der Dichtigkeit (Dynamik Erklärung 2), so drücken offenbar beide Wörter dieselbe Sache in verschiednen Beziehungen aus.

1. Abschnitt. Druck anelastischer Flüssigkeiten.

1. Flüssigkeiten drücken gleichmäßig in allen Richtungen aufwärts, niederwärts, schief, seitwärts.

Dies bestimmt einen wesentlichen Unterschied zwischen flüssigen und festen Körpern, indem feste Körper nur niederwärts oder in der Richtung der Schwere drücken.

2. Die Oberfläche einer schweren Flüssigkeit, die sich in Ruhe befindet, ist horizontal.

3. Der Druck einer Flüssigkeit auf jedes Theilchen des Gefäßes, in dem es enthalten ist, oder einer andern Oberfläche, die mit ihr in Berührung steht, es mag dieselbe wirklich, oder eingebildet seyn, ist dem Gewichte einer Säule der Flüssigkeit gleich, deren Grundfläche diesem Theilchen und deren Höhe seiner Tiefe unter der Oberfläche der Flüssigkeit gleich ist.

4. Wenn daher ein Theil in den oberen Schichten der Flüssigkeit durch einen Theil des Gefäßes ersetzt wird, so ist der Druck dagegen von unten eben so groß, als der, den vorher das Gewicht der weggenommenen Flüssigkeit ausübte, und bleibt jeder Theil im Gleichgewichte, so wird der Druck auf den Boden derselbe seyn als er seyn würde, wenn das Gefäß ein Cylinder oder Prisma wäre.

5. Daher kann man bewirken, daß die kleinste gegebene Quantität einer Flüssigkeit einen Druck hervorbringt, der im Stande ist, jedes gegebene Gewicht zu tragen; dies kann sowohl durch Verkleinerung des Durchmessers der Säule und Vergrößerung ihrer Höhe, als durch Vergrößerung der horizontalen Oberfläche geschehen, welche das Gewicht trägt.

6. Der Druck einer Flüssigkeit auf eine verticale, schiefe oder horizontale Fläche ist dem Gewichte einer Säule dieser Flüssigkeit gleich, deren Grundfläche der gedrückten Fläche, und deren Höhe dem Abstande des Schwerpunctes dieser Fläche, von der obern Horizontal-Fläche der Flüssigkeit gleich ist.

7. Flüssigkeiten von verschiednen specifischen Gewichten, die sich nicht vermischen, werden in einer gebogenen Röhre einander das Gleichgewicht halten, wenn ihre Höhen über den Flächen, in denen sich beide berühren, sich umgekehrt wie ihre specifischen Gewichte verhalten.

Eine Flüssigkeit in einer gebogenen Röhre wird in Ruhe bleiben, wenn die Oberfläche derselben in beiden Schenkeln der Röhre in derselben Horizontalebene liegt, oder von dem Mittelpuncte der Erde gleich weit absteht. Wird nun Wasser in einen solchen Schenkel der Röhre gegossen, (die überall von gleichem Durchmesser seyn kann oder nicht), so wird es in dem andern bis zu derselben Höhe steigen, wie in dem ersten.

Auf diese Art kann Wasser durch Röhren aus einer Quelle an der Seite eines Hügels in einen Behälter von gleicher Höhe auf einem andern Hügel geleitet werden.

8. Das Aufsteigen eines Körpers in einer Flüssigkeit von einem größern specifischen Gewichte, als er selbst besitzt, rührt von dem aufwärts gehenden Drucke der Flüssigkeit gegen die untere Fläche des Körpers her.

9. Erklärung. Der Mittelpunct des Druckes ist derjenige Punct einer Oberfläche, gegen die eine Flüssigkeit drückt, der, wenn an ihm eine dem ganzen Drucke gleiche Kraft angebracht wäre, die Oberfläche in Ruhe erhalten, oder ihrem Streben sich zu drehen, oder sich nach irgend einer Richtung zu bewegen das Gleichgewicht halten würde.

10. Wenn man eine ebene Fläche, die von einer Flüssigkeit gedrückt wird, bis zur horizontalen Oberfläche derselben erweitert und ihren gemeinschaftlichen Durchschnitt als die Aufhängeaxe betrachtet, so werden die Mittelpuncte des Stoßes und des Drucks denselben Abstand von der Axe haben.

11. Der Mittelpunct des Drucks eines Parallelogramms, dessen obere Seite in dem Horizontal-Niveau der Flüssigkeit

liegt, befindet sich auf $\frac{2}{3}$ der Linie (wenn man niederwärts mißt), welche die Mittelpuncte der beiden horizontalen Seiten des Parallelogramms verbindet.

12. Wenn die Grundlinie einer Dreieckfläche mit der Oberfläche des Wassers zusammenfällt, so ist der Mittelpunct des Drucks auf der Mitte der Linie, die von der Mitte der Grundlinien nach der Spitze des Dreiecks gezogen wird. Liegt aber die Spitze des Dreiecks in der Oberfläche des Wassers, während die Grundlinie horizontal ist, so liegt der Mittelpunct des Druckes auf $\frac{3}{4}$ der Linie, die von der Spitze nach der Mitte der Grundlinie gezogen wird.

Erläuterungen und Anwendungen.

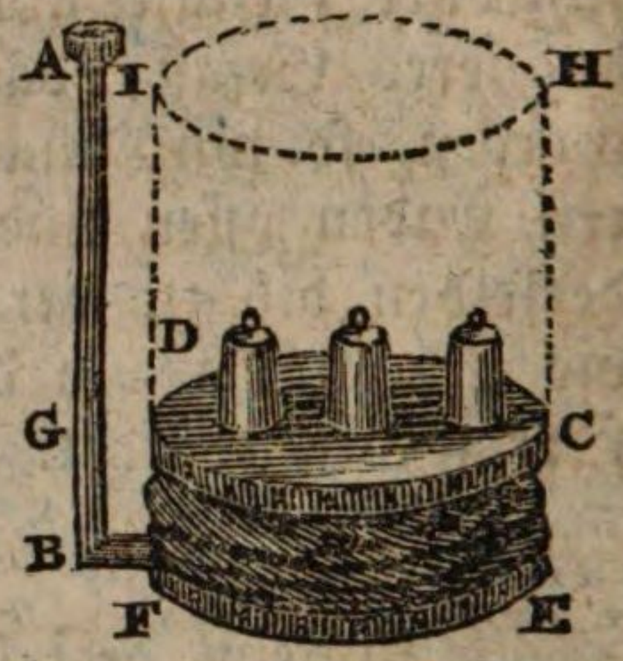
1. Wenn verschiedne Glasröhren von verschiedner Gestalt und verschiedner Größe in ein größeres Gefäß, das Wasser enthält, gebracht werden, so wird man, wenn die Röhren an ihren Enden offen sind, das Wasser sich in jeder derselben bis zu der Höhe erheben sehen, als die Oberfläche a c der Flüssigkeit in dem größerem Gefäße steht.

2. Wenn drei Gefäße, ein cylindrisches, ein anderes, das oben beträchtlich breiter als unten, ein drittes, das oben beträchtlich enger als unten ist, wo bei den beiden letztern die Neigung der Seiten gegen die obere oder untere Fläche regelmäßig oder unregelmäßig ist, an ihrem Boden beweglich, jedoch durch die Wirkung eines Gewichts auf einen Hebel verschlossen sind, so wird sich finden, daß wenn dasselbe Gewicht in demselben Abstande auf den Hebel wirkt, Wasser in jedes Gefäß bis zu derselben Höhe hineingegossen werden kann, bevor der Druck den Boden nöthigen wird, sich zu öffnen.

3. Man nehme eine an beiden Enden offene Glasröhre (sie mag nun cylindrisch seyn oder nicht), an dem einen Ende mit einem Stück Blase so verschlossen, daß sie mit diesem Ende abwärts aufgehangen, die Blase herabhängt, oder diese sich innerhalb der Röhre erhebt, wenn von außen ein Druck darauf wirkt. Hierein gieße man etwas rothgefärbtes Wasser, so daß es sieben bis acht Zoll hoch steht; hierauf tauche man die Röhre mit ihrem gefärbten Wasser vertical in ein beinahe ganz mit ungefärbtem Wasser angefülltes Glasgefäß, so wird die Blase an dem untern Ende als ein beweglicher Boden der Röhre

dienen. Dann wird man bemerken, daß, wenn die Tiefe des Wassers in der Röhre die in dem größeren Gefäße übertrifft, die Blase der Röhre wegen des größeren inneren als äußeren Drucks wird niederwärts gedrückt werden; ist aber das äußere Wasser tiefer als das innere, so wird die Blase in der Röhre wegen des größern äußern Drucks heraufgedrückt werden; sind aber die Wasseroberflächen der Röhre und des Gefäßes in gleicher Höhe, so wird die Lage der Blase horizontal seyn. Der Erfolg dieses Versuchs hängt nicht von der Tiefe des Wassers in der Röhre ab, sondern von dem Verhältnisse der Tiefen des äußern und innern Wassers der Röhre; auch zeigt er, daß in allen Fällen das tiefere Wasser an seinem Boden den größern Druck aushält, er mag auf- oder niederwärts gehen.

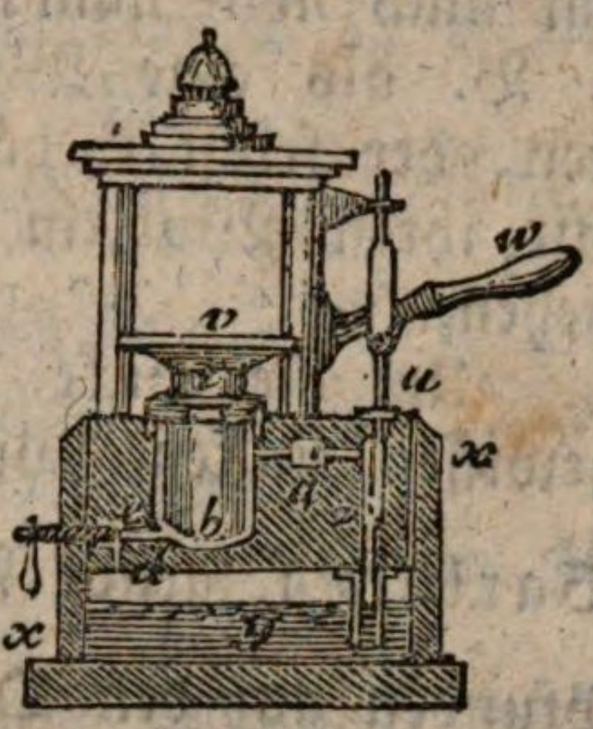
4. Das Hydrostatische Paradoxon, wie man es nennt, entsteht aus dem Gesetze, daß eine auch kleine Quantität nicht elastischer Flüssigkeit einer andern Quantität oder anderm beliebig großem Gewichte, das Gleichgewicht halten kann. Dies kann durch den hydrostatischen Blasebalg erläutert werden, der aus zwei dicken Bretern DC, FE, jedes von ungefähr 16 oder 18 Zollen Durchmesser, besteht, die mit Leder an den Kanten fest und dicht verbunden sind, so daß er sich wie der gewöhnliche Blasebalg öffnen und verschließen kann, ohne jedoch Klappen zu haben; nur ist noch eine ungefähr drei Fuß hohe Röhre bei F an den Blasebalg befestigt. Nun gieße man Wasser bei A in die Röhre, so wird es in den Blasebalg laufen, und allmälig die Breter trennen, indem es das obere erhebt. Werden dann mehrere Gewichte auf das obere Bret gelegt, so wird, wenn man Wasser hineingießt, bis die Röhre voll ist, das ganze Gewicht getragen werden, obgleich das Wasser in der Röhre nicht ein Viertel-Pfund wiegt; denn die Röhre kann so klein seyn, als man will, vorausgesetzt, daß sie nur lang genug ist, da die ganze Wirkung von ihrer Höhe und nicht von ihrer Dicke abhängt; denn immer findet folgende Proportion Statt:



Die Fläche der Röhrenmündung verhält sich zu der Fläche des Blasebalg-Bretes, wie das Gewicht des Wassers über DC zu dem Gewichte, das von dem Brete getragen wird.

5. Anstatt dieses Apparats, dessen Leder keinem bedeutenden Drucke Widerstand zu leisten vermag, bediente sich der verstorbene Bramah eines sehr starken metallnen Cylinders, in

dem sich ein Stempel vollkommen luft- und wasserdicht bewegt, indem er durch lederne Ringe geht, und anstatt einer hohen Wassersäule nahm er eine sehr kleine Druckpumpe, an die eine Kraft angebracht werden konnte; auf diese Art wird die drückende Säule beliebig lang, obgleich der ganze Apparat sehr klein ist und wenig Raum einnimmt. Beistehende Figur ist ein Durchschnitt einer solchen Presse', wo t der Stempel des weiten Cylinders, aus einem ganz cylindrisch gedrehten Stücke Metall gemacht, ist und die untere Platte v der Presse trägt; u ist der Stempel der kleinen Druckpumpe, ebenfalls ein metallner Cylinder, und kann durch eine Kurbel oder einen Hebel w hinauf- und hinabbewegt werden. Der ganze untere Theil der Presse kann in ein Gehäuse x x gebracht werden, das bei y mehr als hinreichend Wasser enthält, um beide Cylinder anzufüllen; die Saugröhre der Druckpumpe u aber, die in dies Wasser geht, ist beständig angefüllt. So oft daher die Kurbel aufwärts bewegt wird, erhebt sich das Wasser durch die conische Metallklappe z, die sich aufwärts in den Boden der Pumpe u öffnet; wird aber die Kurbel niedergedrückt, so wird dieses Wasser durch eine andere ähnliche Klappe a gedrängt werden, die sich in einer entgegengesetzten Richtung in der Verbindungsröhre zwischen der Pumpe und dem großen Cylinder b öffnet, der nun das Wasser aufnimmt, durch welches die Stempelstange t bei jedem Zuge der Pumpe u erhoben wird. Ein anderes kleines conisches Ventil ist vermittels einer Schraube an eine Oeffnung in dem untern Theile des großen Cylinders angebracht, um den Druck zu vermindern, wenn es nöthig ist; bei dem Oeffnen dieses Ventils wird das Wasser, was in dem großen Cylinder b enthalten war, durch d in den Behälter y gehen, und der Stempel t herabfallen, so daß dasselbe Wasser abermals gebraucht wird. Die Kraft einer solchen Maschine ist ungeheuer groß, denn bringt man die Hand an die Kurbel w mit einer Kraft von nur 10 Pfund, und diese Kurbel ist so eingerichtet, daß sie die Kraft nur verfünffacht, so wird die Kraft, mit der der Stempel u herabgeht, gleich 50 Pfund seyn; es sey ferner die Größe des Stempels t so, daß der Flächenraum seines Horizontal-Schnittes einen ähnlichen Flächenraum des kleineren Stempels u 50mal enthält, so erhält man $50 \times 50 = 2500$ Pfund als die Kraft, mit der der Stempel t und der Drücker v sich erheben werden. Ein Mann kann jedoch auf eine kurze Zeit eine zehnmal stärkere Kraft



ausüben und daher 25000 Pfund erheben; er würde bei einem ungleicheren Verhältnisse zwischen den beiden Stempeln t und u und dem Hebel w, das für die Anwendung seiner Kräfte vortheilhafter wäre, noch mehr leisten.

Diese Maschine wirkt nicht nur wie eine Presse, sondern hat auch noch manche andere nützliche Anwendungen; sie dient z. B. als eine Winde bei der Erhebung von schweren Lasten oder selbst Gebäuden; auch gebraucht man sie um Bäume mit ihren Wurzeln oder Pfähle bei Brückenbauten herauszuziehen.

Um die Dicke des Metalles bei Bramah's Presse um gewissen Lasten Widerstand zu leisten, zu bestimmen, giebt Barlow folgende Formel: $t = \frac{pr}{c-p}$, wo p den Druck in Pfunden auf den Quadratzoll, r den Halbmesser des Cylinders, t dessen Dicke und $c = 18000$ Pfund, die Cohäsionskraft eines Quadratzolles gegossenen Eisens bezeichnet.

Beispiel. Es soll die Dicke des Metalles bei zwei Pressen bestimmt werden, jede von 6 Zoll Halbmesser, wo bei der einen der Druck sich auf 4278 Pfund, bei der andern auf 8556 Pfund auf den Quadratzoll erstreckt.

Hier ist in dem ersten Falle

$$t = \frac{4278 \times 6}{18000 - 4278} = 1{,}87 \text{ Zoll Dicke.}$$

Im zweiten

$$t = \frac{8556 \times 6}{18000 - 8556} = 5{,}43 \text{ Zoll Dicke.}$$

Die gewöhnlichen Regeln, die unten (Art. 10) erklärt werden, würden die letztere Dicke doppelt so groß als die erstere geben; es sind hierbei ausgedehnte Versuche nöthig, um zu bestimmen, welche Methode den Vorzug verdient.

6. Ist b die Breite, d die Tiefe einer rechtwinklichen Oeffnung oder anderen Oberfläche, die dem Drucke des Wassers von oben nach unten ausgesetzt ist, so ist der ganze Druck dem Gewichte eines Wasserprismas gleich, dessen Inhalt $\frac{1}{2} b d^2$ ist. Oder ist b und d in Fußen gegeben, so ist der ganze Druck gleich $31\frac{1}{4} b d^2$ in Pfunden, oder beinahe gleich $\frac{8}{11} b d^2$ in Centnern.

7. Wenn die Oeffnung die Gestalt eines Trapez hat, das oben am weitesten ist, so wird, wenn B und b die Breite oben und unten, und d die Tiefe ist, seyn:

der ganze Druck in Pfunden $= 31\frac{1}{4} [\frac{1}{3} (B - b) + b] d^2$
der ganze Druck in Centnern $= \frac{8}{11} [\frac{1}{3} (B - b) + b] d^2$ nahe.

8. Das Gewicht eines Cubikfußes Regen- oder Flußwasser ist beinahe gleich $\frac{6}{11}$ Centner.

Der Druck auf einen Quadratzoll in der Tiefe von 30 Fuß ist sehr nahe 13 Pfund.

Der Druck auf einen Quadratfuß ist in der Tiefe von 36 Fußen beinahe eine Tonne. (Die wahre Tiefe ist 35,84 Fuß.)

Das Gewicht einer Biergallone Regenwassers ist beinahe $10\frac{1}{5}$ Pfund, das einer Reichsgallone 10 Pfund.

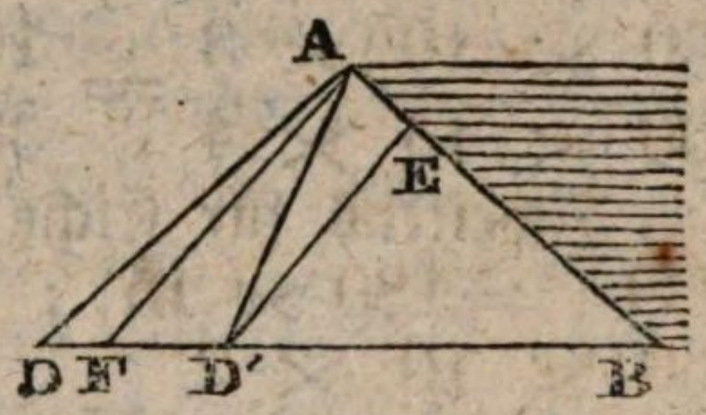
Das Gewicht eines Cubikfußes Seewassers ist beinahe $\frac{4}{7}$ eines Centners.

Dies sind alles nützliche Näherungswerthe.

Es ist ferner der Druck des Regenwassers auf einen Quadratzoll in der Tiefe von 3000 Fußen 1300 Pfund.

Der Druck auf einen Quadratfuß in der Tiefe von 108 Fußen ist beinahe = 3 Tonnen.

9. Bei dem Bauen von Canälen und Dämmen sollten sowohl die Oberflächen als Abhänge Ebenen seyn, und die äußeren und inneren Abhänge sollten einen Winkel von nicht weniger als 90° bilden. Denn wenn AD′ der äußere Abhang und der Winkel D′AB spitzig, ED′ senkrecht auf AB die Richtung des Druckes darauf ist, so wird der Theil D′AB wahrscheinlich umgerissen werden. Ist aber DA die äußere Fläche, die mit AB einen stumpfen Winkel bildet, so fällt die Richtung des Druckes in die Grundfläche und vermehrt daher ihre Stabilität.



10. Die Stärke eines runden Wasser-Bassins erfordert die Betrachtung anderer Gesetze.

Der senkrechte Druck gegen die Wand hängt bloß von der Höhe der Flüssigkeit ab, ohne daß das Volumen einigen Einfluß äußerte. Wie aber Professor Leslie bemerkt, wird der longitudinale Effect des Stoßes oder sein Streben, das Gefüge des Mauerwerks zu lösen, durch den Halbmesser des Kreises gemessen. Um diese Wirkung in sehr weiten Gefäßen zu beschränken, muß die Mauer verhältnißmäßig mehr nach Innen als nach Außen verstärkt werden. Wenn überdies eine widerstehende Oberfläche dem Wasserdrucke eine convexe Fläche entgegensetzt, so wird der resultirende Längenzug zur engern Schließung der Gefüge und zur Befestigung des Gebäudes beitragen. Bei dem Baue von Dämmen wird daher eine solche umgekehrte Krümmung häufig angewendet.

Auf gleiche Art muß sich die Dicke der Wasserleitungs-

Röhren in Verhältniß zu $\frac{h\,d}{c}$ umändern, wo h die Höhe des Wassers, d der Durchmesser der Röhre, und c das Maß der Cohäsion einer Stange von demselben Materiale als die Röhre auf einen Quadratzoll ist.

Eine Röhre von gegossenem Eisen, 15 Zoll im Durchmesser und von $\frac{3}{4}$ Zoll Dicke wird für eine Höhe von 600 Fußen hinreichen.

Eine eichene Röhre von demselben Durchmesser und 2 Zollen Dicke würde eine Höhe von 180 Fuß tragen.

Bei gleicher Cohäsion verändert sich t wie h d, oder HD : T = hd : t bei der Vergleichung zweier Fälle. *)

Beispiel. Was müssen die zugehörigen Dicken von Röhren von gegossenem Eisen oder Eiche von 10 Zollen Durchmesser seyn, um Wasser von einer Höhe von 360 Fuß zu leiten.

Hier ist erstlich für gegossenes Eisen:

$$HD\ (=600\times 15) : T\ (=\tfrac{3}{4}) = hd\ (=360\times 10) : t = \frac{360\times 10\times 3}{600\times 15\times 4} = \frac{10800}{36000} = \tfrac{3}{10}\text{ Zoll.}$$

Zweitens für Eiche:

$$HD\ (=180\times 15) : T\ (=2) = hd\ (=360\times 10) : t = \frac{360\times 10\times 2}{180\times 15} = \tfrac{40}{15} = \tfrac{8}{3} = 2\tfrac{2}{3}\text{ Zoll.}$$

2. Abschnitt. Schwimmende Körper.

1. Wenn ein Körper in einer Flüssigkeit schwimmt, so drückt er eine seinem Gewichte gleiche Quantität aus ihrer Stelle.

2. Es müssen ferner die verrückten Schwerpuncte des Körpers und der Flüssigkeit in derselben Verticale seyn, wenn der Körper in Ruhe ist.

---

*) Um zu bestimmen, ob eine Röhre stark genug ist, einen Druck auszuhalten oder nicht, ist es bei Praktikern ein gutes Mittel, sich eines Sicherheitsventils zu bedienen, und es mit dem gegebenen Gewichte und einer durch Erfahrung bestimmten Zulage zu belasten. Wenn dann der Druck innerlich durch eine Druckpumpe, oder auf irgend eine andere Art angewendet wird, und die Röhre in allen ihren Theilen, nachdem das Sicherheitsventil ausgewichen ist, unversehrt bleibt, so kann man eine solche Röhre als stark genug betrachten.

Die wirklichen Drucke auf eine Röhre von gegebenem Durchmesser und Höhe können offenbar auf eine ähnliche Art bestimmt werden.

3. Enthält ein Gefäß zwei Flüssigkeiten, die sich nicht vermischen, (wie Wasser und Queckſilber), und es wird ein Körper von einem mittleren specifischen Gewichte unter die Oberfläche der leichteren Flüssigkeit, die auf der schwereren schwimmt, hineingetaucht, so verhält sich der Theil des in die schwerere Flüssigkeit eingetauchten Körpers zu dem ganzen Körper, wie die Differenz zwischen den specifischen Gewichten des Körpers und der leichteren Flüssigkeit sich zu der Differenz zwischen den specifischen Gewichten der beiden Flüssigkeiten verhält.

4. Die Schwimmkraft von Fässern, oder die Last, mit der sie schwimmen werden ohne zu sinken, kann so geschätzt werden, daß man 10 Pfund Avoir dupoids-Gewicht auf die Biergallone oder $8\frac{1}{3}$ Pfund auf die Weingallone rechnet.

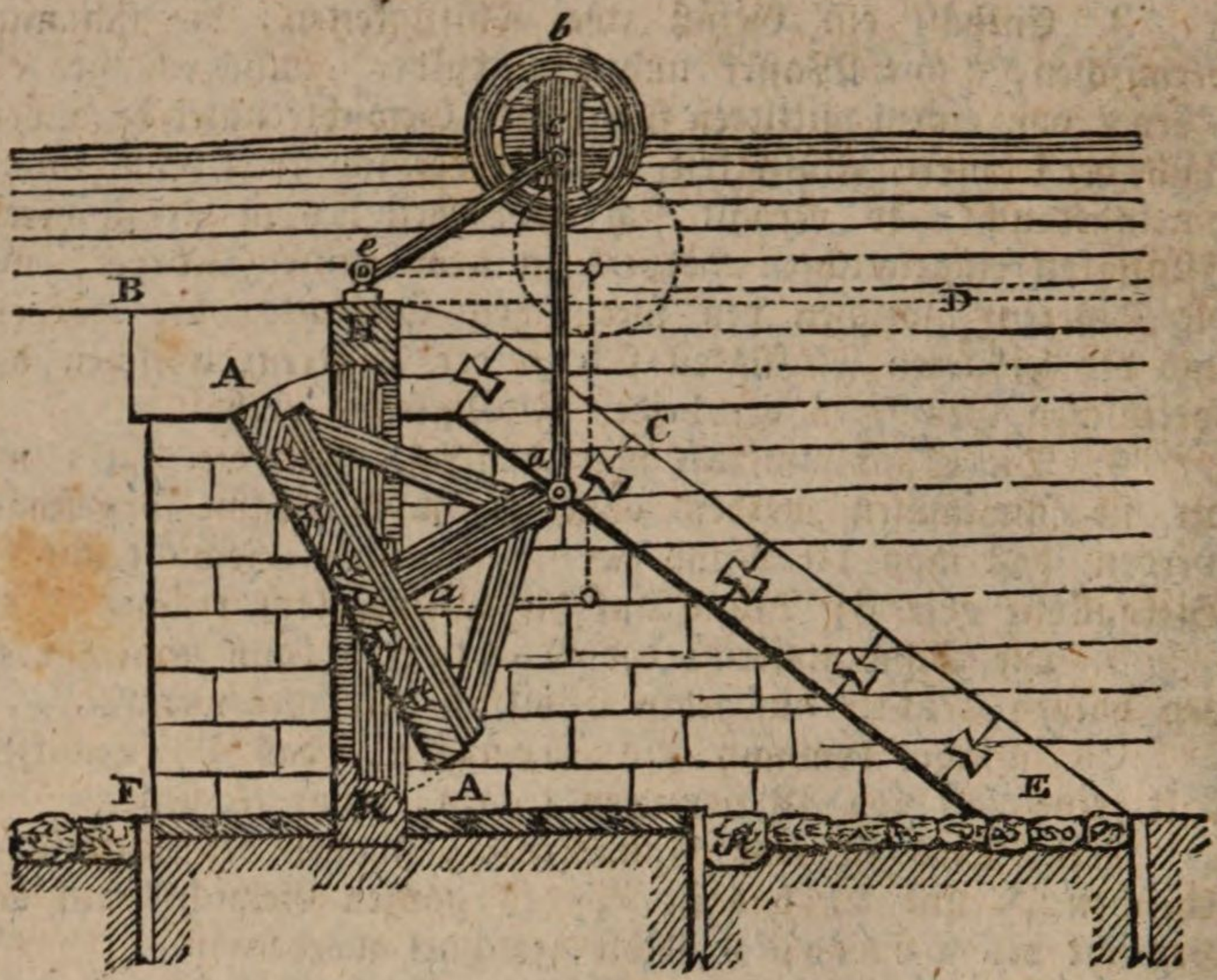
5. Die Schwimmkraft der Ponton's kann ungefähr einen halben Centner auf jeden Cubikfuß gerechnet werden.

Es würde demnach ein Ponton, das 96 Cubikfuß hält, eine Last von 48 Centnern tragen, bevor es sinkt.

NB. Dies ist eine Annäherung, wobei der Unterschied zwischen $\frac{6}{11}$ und $\frac{1}{2}$, das ist $\frac{1}{22}$ des ganzen Gewichts auf das Gewicht des Ponton's selbst gerechnet worden ist.

6. Die Grundsätze der Schwimmkraft sind sehr sinnreich bei Farey's selbstwirkenden Schleussen angewendet. Wenn bei gewöhnlichen Schleussen eines Mühlteiches plötzlich eine Fluth kommt, so können doch, auch wenn der Müller die Thüren in der Nacht öffnet, die benachbarten Felder überschwemmt werden; und dagegen, wenn er bei dem Fallen der Fluth die Thüren auch wieder verschließt, so kann doch der Mühlteich ausgeleert und Wasser verloren werden, das den andern Tag gebraucht wird. Um jeden dieser Nachtheile zu verhindern, schlug Johann Farey, dessen Talente und Scharfsinn sehr wohl bekannt sind, eine selbstwirkende Schleusse vor, von der in dem wöchentlichen Journal für Mechanik folgende Beschreibung gegeben worden ist:

AA stellt einen verticalen Schnitt einer Schleussen-Thüre dar, die an einer Horizontal-Axe befestigt ist, welche sich oberhalb des Mittelpunctes des Drucks der Thüre befindet, so daß sie derselben ein Bestreben ertheilt, sich zu verschließen. aa ist ein Hebel, der senkrecht auf die Thüre befestigt ist, und durch eine Eisenstange mit einem Fasse b in Verbindung steht, das auf der Oberfläche des Wassers schwimmt, wenn es sich bis zu der Höhe BD erhebt, welche als das Niveau des Mühldammes B, C, E, F, in dem die Schleusse sich befindet, angenommen wird. Wenn nun das Wasser sich über den Damm erhebt, so hebt es durch diese Vorrichtung das Faß, öffnet die Thüre, und läßt das Wasser herausgehen, bis sein Niveau bis



auf BD gekommen ist; nun wirkt das Faß, wenn es nicht mehr vom Wasser getragen wird, durch sein Gewicht, verschließt die Thüre und verhindert den Wassermangel. Die Thüre muß in eine Einfassung von Balken HK genau passen, die in das Mauerwerk des Dammes eingesetzt ist. Der obere Balken H der Einfassung liegt gerade in der oberen Fläche des Dammes, so daß das Wasser, wenn es durch die Thüre läuft, zugleich über dieselbe weg abfließt; um das heftige Anströmen, wodurch das Faß verrückt werden könnte, zu vermeiden, so ist dieses durch einen kleinen Stab e an jedem Ende mit dem oberen Balken H der Einfassung so verbunden, daß es nur eine Bewegung nach verticaler Richtung annehmen kann.

Ein geschickter Mechanicus wird die Einrichtung aus diesem kurzen Berichte hinlänglich begreifen, um sie nöthigen Falls ausführen zu können.

7. Nach demselben Princip des Schwimmvermögens wird auch eine hohle Kupferkugel an einem metallnen Hebel von ungefähr einem Fuß Länge befestigt, sich in einer mit irgend einer Flüssigkeit gefüllten Wanne erheben, und auf diese Art den Hahn verschließen, und das Nachlaufen aus der Röhre gerade dann verhindern, wenn das Wasser sich sonst über den Rand des Gefäßes ergießen würde.

8. Dieses Princip ist auch mit Erfolg bei dem Herausziehen alter Pfähle aus einem Flusse angewendet worden, wo

Ebbe und Fluth Statt findet. Beim Steigen des Wassers wird über den Pfahl ein Boot von beträchtlicher Größe gebracht; eine starke Kette, die durch einen Ring u. s. w. hinlänglich an den Pfahl befestigt ist, wird mit dem Boote verbunden. Bei dem Steigen des Wassers erhebt sich das Boot auch, und zieht zugleich durch seine Schwimmkraft den Pfahl mit.

Bei einem wirklichen Falle wurde ein Boot von 50 Fuß Länge, 12 Fuß Breite und 6 Fuß Tiefe, das zwei Fuß aus dem Wasser ragte, angewendet. Hier ist $50 \times 12 \times (6-2) \times \frac{4}{7} = \frac{50 \times 12 \times 16}{7} = 192 = 7\frac{1}{7} = 1344 + 27\frac{3}{7} = 1371\frac{3}{7}$ Centner $= 66\frac{1}{2}$ Tonnen annäherungsweise das Maß der Kraft, mit der das Boot auf den Pfahl wirkte.

3. Abschnitt. Specifisches Gewicht.

1. Wenn ein Körper in einer Flüssigkeit schwimmt, so verhält sich der eingetauchte Theil zu dem ganzen Körper, wie das specifische Gewicht des Körpers zu dem specifischen Gewichte der Flüssigkeit.

Wenn daher der Körper ein viereckiges oder dreieckiges Prisma ist, und er wird auf die Flüssigkeit gelegt, so wird das Verhältniß des eingetauchten Theiles der Seitenfläche zu der ganzen Seitenfläche dienen, das specifische Gewicht des Körpers zu bestimmen.

2. Wenn derselbe Körper auf zwei Flüssigkeiten nach einander schwimmt, so werden sich die eingetauchten Theile umgekehrt wie die specifischen Gewichte dieser Flüssigkeiten verhalten.

3. Das Gewicht, das ein Körper verliert, wenn er ganz in eine Flüssigkeit getaucht wird, ist dem Gewichte eines gleichen Volumens der Flüssigkeit gleich.

Wenn man sagt, daß ein Körper einen Theil seines Gewichts in einer Flüssigkeit verliert, so denkt man sich nicht dabei, daß sein absolutes Gewicht geringer als es vorher war, sondern daß es zum Theil durch die Gegenwirkung des Fluidums, das sich darunter befindet, aufgehoben wird, so daß eine geringere Kraft zum Gleichgewichte erforderlich ist.

4. Ein in eine Flüssigkeit eingetauchter Körper steigt oder fällt mit einer Kraft, die dem Unterschiede zwischen seinem eigenen Gewichte und dem Gewichte einer gleichen Quantität der Flüssigkeit gleich ist, ohne Rücksicht auf den Widerstand oder die Zähigkeit der Flüssigkeit.

5. Das specifische Gewicht einer Flüssigkeit oder eines festen Körpers zu finden. An einen Arm einer Waage hänge man eine Bleikugel vermittels eines feinen Fadens auf, und an das andere befestige man ein gleiches Gewicht, das jener in der freien Luft gerade das Gleichgewicht hält. Man tauche hierauf die Kugel in eine Flüssigkeit, und bemerke, welches Gewicht ihr dann das Gleichgewicht hält, und welches Gewicht daher dem specifischen Gewichte, wie oben bemerkt, proportional verloren geht. Auf diese Art wird das Verhältniß des specifischen Gewichts einer Flüssigkeit zu dem einer andern bestimmt, wenn man die Kugel nach und nach in alle Flüssigkeiten taucht, und die in jeder verlornen Gewichte bemerkt, woraus sich die Verhältnisse der gesuchten specifischen Gewichte ergeben.

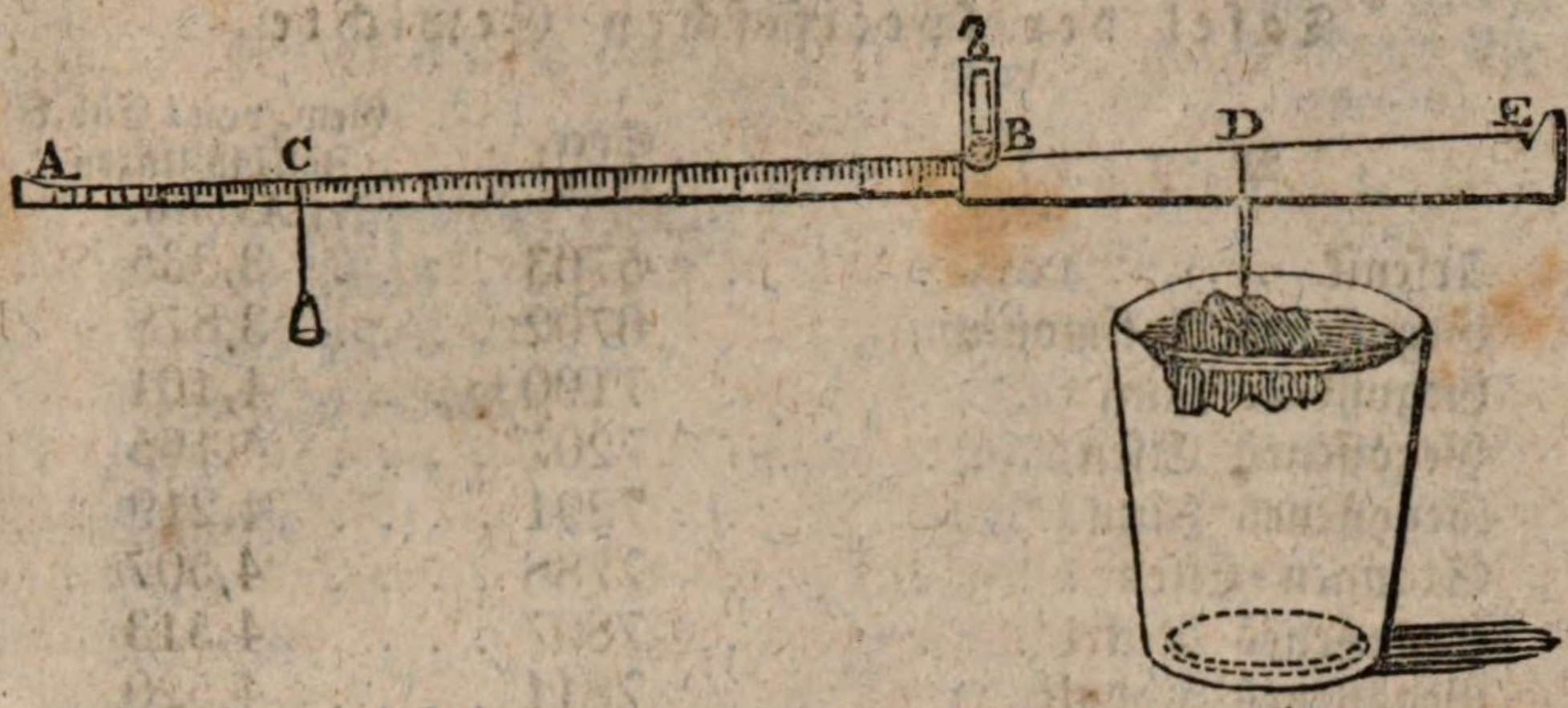
Dieselbe Operation bestimmt auch das specifische Gewicht des eingetauchten festen Körpers, er mag nun in Kugel- oder anderer Gestalt seyn, wenn man dasjenige der Flüssigkeit als bekannt annimmt. Dann aber verhält sich das specifische Gewicht der Flüssigkeit zu der des festen Körpers, wie das verlorne Gewicht zu dem ganzen.

Man kann auch das specifische Gewicht eines Körpers, der leichter ist als die Flüssigkeit, auf folgende Art finden.

6. Das specifische Gewicht eines festen Körpers zu finden, der leichter ist als die Flüssigkeit, z. B. als Wasser, in das er getaucht wird. — An den leichteren Körper befestige man einen anderen, der viel schwerer als die Flüssigkeit ist, so daß die zusammengesetzte Masse in der Flüssigkeit sinkt. Hierauf wäge man den schwereren Körper und die zusammengesetzte Masse besonders, sowohl in als außer dem Wasser; bestimme, wieviel jedes im Wasser verliert, indem man das Gewicht in Wasser von dem Gewichte außer Wasser abzieht; dann subtrahire man den kleineren dieser Reste von dem größern, so verhält sich dieser letzte Rest zu dem Gewichte des leichten Körpers in Luft, wie das specifische Gewicht der Flüssigkeit zu dem specifischen Gewichte dieses Körpers.

7. Die specifischen Gewichte von Körpern von gleichem Gewichte sind umgekehrt den Quantitäten des in derselben Flüssigkeit verlornen Gewichts proportional. Daher findet man das Verhältniß der specifischen Gewichte von Körpern, wenn man in derselben Flüssigkeit Massen von ihnen wägt, die in der Luft gleich viel wiegen, und die verlornen Gewichte bemerkt.

8. Anstatt einer gewöhnlichen hydrostatischen Waage bedient man sich jetzt häufig einer hydrostatischen Schnellwaage. Diese eignet sich zum Abwägen, wenn man den



kürzeren Arm breiter macht, und diese Breite gegen das Ende hin zunehmen läßt. Der kürzere Arm wird nicht eingetheilt, der längere aber enthält gleiche kleine Theile; wenn daher dieser längere Arm 8 Zoll lang ist, so kann er, von A ausgehend, in 400 Theile getheilt werden. Bei dem Gebrauche dieses Instruments wird ein beliebiges Gewicht vermittels eines Hakens in einem Einschnitte am Ende der Scale A aufgehängt. Der Körper, dessen specifisches Gewicht bestimmt werden soll, wird am anderen Ende vermittels eines Pferdehaares aufgehängt, und hin- und hergeschoben, bis Gleichgewicht statt findet. Ohne hierauf seine Lage bei D zu ändern, wird er in Wasser getaucht, und ein zweites Mal Gleichgewicht erzeugt, indem man das Gegengewicht von A nach C schiebt.

Hier verhält sich offenbar das Gewicht im Wasser zu dem Gewichte in der Luft wie BC zu AB; folglich Verlust des Gewichts im Wasser : Gewicht in der Luft = AC : AB; also $\frac{\text{Gewicht in Luft}}{\text{Verlust}} = \frac{AB}{AC}$ dem = specifischen Gewichte.

Wägt man mit diesem Instrumente auf einem passenden Fußgestelle, so findet sich, daß die specifischen Gewichte von Körpern mit größerer Leichtigkeit und Richtigkeit als mit einer hydrostatischen Waage bestimmt werden können. *)

*) Man verdankt diese Erfindung dem Dr. Coates von Philadelphia.

Tafel der specifischen Gewichte.

Metalle.	Spec. Gew.	Gew. von 1 Cubik-Zoll. in Unzen Avoird.
Arsenik	5763	3,335
Gegossenes Antimonium	6702	3,878
Gegossenes Zink	7190	4,161
Gegossenes Eisen	7207	4,165
Gegossenes Zinn	7291	4,219
Stangen-Eisen	7788	4,507
Gegossenes Nickel	7807	4,513
Gegossenes Kobalt	7811	4,520
Harter Stahl	7816	4,523
Weicher Stahl	7833	4,533
Gegossenes Messing	8395	4,858
Gegossenes Kupfer	8788	5,085
Gegossener Wismuth	9822	5,684
Reines gegossenes Silber	10474	6,061
Dasselbe gehämmert	10510	6,082
Gegossenes Blei	11352	6,569
Queckfilber	13568	7,872
Flittergold	15709	9,091
Gemünztes Gold	17647	10,212
Reines gegossenes Gold	19258	11,145
Dasselbe gehämmert	19361	11,212
Reines Platina	19500	11,285
Dasselbe gehämmert	20336	11,777
Platina-Draht	21041	12,176
Platina in dünne Plättchen geschlagen	22069	12,763

Alle Metalle werden durch Hämmern dichter oder schwerer.

Steine, Erden u. s. w.	Spec. Gew.	Wiegt ein Cubik-Fuß Pfd. Avoird.
Ambra	926	
Bernstein	1078	
Phosphor	1714	
Mauerstein	2000	125,00
Schwefel	2033	127,06
Opal	2114	
Undurchsichtiger Gyps	2168	135,50
Pflaster-Stein	2416	151,00
Gewöhnlicher Stein	2520	157,50
Feuerstein und Feldspath (Spar)	2594	162,12

Steine u. s. w.	Spec. Gew.	Gewicht in Cubik-Fußen Pfd. Avoird.
Krystall	2653	
Rother ägyptischer Granit	2654	165,87
Grünes Glas	2642	
Weißes Glas	2892	
Bouteillen-Glas	2733	
Kiesel	2664	166,50
Schiefer	2672	167,00
Perle	2684	
Alabaster	2730	
Marmor	2742	171,38
Porphyr	2765	172,81
Smaragd	2775	
Chrysolith (der Juweliers)	2782	
Kreide	2784	174,00
Jaspis	2816	
Basalt (vom Riesendamm)	2864	179,00
Wetzstein	2876	179,75
Kalkstein	3179	198,68
Diamant	3521	
Beryl	3549	
Saphir	3994	
Topas	4011	
Granat	4189	
Rubin	4283	

Harze, Gummi u. s. w.	Spec. Gew.
Wachs	897
Talg	945
Bienenwachs	965
Campher	989
Honig	1456
Knochen von einem Stiere	1659
Elfenbein	1822

Flüssigkeiten.	Spec. Gew.
Luft an der Oberfläche der Erde ungefähr	1 2/7
Schwefel-Aether	716
Reiner Alkohol	792
Flüssiges Bitumen	848
Terpentinöl	870
Salz-Aether	874
Olivenöl	915

Flüssigkeiten.	Spec. Gew.
Burgunderwein	991
Bourdeaux-Wein	994
Destillirtes Wasser	1000
See-Wasser	1028
Milch	1030
Bier	1034
Salpeter-Säure	1218
Wasser vom todten Meere	1240
Salpetrige Säure	1550
Schwefel-Säure	1841

Hölzer.	Spec. Gew.	Gewicht eines Cubik-Fußes Pfd. Avoird.
Kork	240	15,00
Pappel	383	23,94
Lerchenbaum	544	34,00
Ulme und Weyhmouthskiefer	556	34,75
Mahagony (Honduras)	560	35,00
Weide	585	36,56
Ceder	596	37,25
Harz-Fichte	660	41,25
Birnbaum	661	41,31
Wallnußbaum	671	41,94
Sumpf-Wald-Tanne	694	43,37
Fliederbaum	695	43,44
Buche	696	43,50
Orangen-Holz	705	44,06
Kirschbaum	715	44,68
Teak	745	46,56
Ahorn und Riga-Tanne	750	46,87
Esche und Danziger Eiche	760	47,50
Holländischer Eibenbaum	788	49,25
Aepfelbaum	793	49,56
Erle	800	50,00
Spanischer Eibenbaum	807	50,44
Spanisches Mahagony-Holz	852	53,25
Eiche von Canada	872	54,50
Französischer Buchsbaum	912	57,00
Campeschenholz	913	57,06
Englische Eiche	970	51,87
Dasselbe, 60 Jahr alt	1170	73,12
Ebenholz	1331	83,18
Guajacholz (Lignum vitae)	1333	83,31

9. Da ein Cubikfuß Wasser bei der Temperatur von 40° Fahrenheit 1000 Unzen Avoird. oder 62½ Pfund wiegt, so geben die Zahlen unter der Ueberschrift Spec. Gewicht sehr nahe die zugehörigen Gewichte in Avoirdupoids-Unzen eines Cubikfußes von den verschiednen Stoffen an.

Auch ist in der andern Reihe das Gewicht eines Cubikzolles von jedem der verschiednen Metalle in Unzen gegeben; und in Rücksicht auf verschiedne Arten von Holz und Stein das Gewicht in Avoirdupoids-Pfunden von dem Cubikfuße eines jeden. Dies sind natürlich mittlere specifische Gewichte; denn esfinden oft zwischen den specifischen Gewichten verschiedner Gattungen derselben Substanz beträchtliche Verschiedenheiten statt.

Diese beigefügten Columnen sind bei der Aufgabe die Größe eines Körpers aus seinem Gewichte oder das Gewicht eines Körpers aus seiner Größe zu bestimmen, von sehr vortheilhaftem Gebrauche. In dieser Beziehung wird auch noch Folgendes von häufigem Nuzzen seyn.

10. (1) 430,25 Cubikzolle gegossenes Eisen wiegen 1 Ctr.
397,60 . . . . . Stangen-Eisen,
368,88 . . . . . gegossenes Messing,
352,41 . . . . . gegossenes Kupfer,
272,8 . . . . . gegossenes Blei.
(2) 14,835 Cubikfuß Pflasterstein wiegen eine Tonne,
14,222 . . . . . gewöhnlicher Stein,
13,505 . . . . . Granit,
13,070 . . . . . Marmor,
12,874 . . . . . Kreide,
11,273 . . . . . Kalkstein,
64,460 . . . . . Ulme,
64,000 . . . . . Honduras-Mahagony,
51,650 . . . . . Sumpf-Wald-Tanne,
51,494 . . . . . Buche,
47,762 . . . . . Riga-Tanne,
47,158 . . . . . Esche und Danziger Eiche,
42,066 . . . . . Spanisches Mahagonyholz,
36,205 . . . . . Englische Eiche.

11. Aufgabe. Den innern Durchmesser einer gleichförmigen Haar- oder andern kleinen Röhre zu finden.

Man wäge die Röhre, wenn sie leer ist, und dann wieder, wenn sie mit Queckfilber gefüllt ist, w sey die Differenz dieser Gewichte in Troy-Granen, l die Länge der Röhre in Zollen

Dann ist der gesuchte Durchmesser $d = 0{,}019252 \sqrt{\frac{w}{l}}$.

Wenn der Unterschied der Gewichte 500 Granund die Länge der Röhre 20 Zoll wäre, so würde man auf diese Art erhalten:

$$d = 0{,}019252 \sqrt{\frac{500}{20}} = 0{,}019252 \times 5 = 0{,}09626 \text{ Zoll.}$$

12. Aufgabe. Das Gewicht einer Bleiröhre zu finden.

Es sey l die Länge in Fußen, d der innere Durchmesser, t die Dicke beides in Zollen und dessen Theilen, W das Gewicht in Centnern, dann ist

$$W = 0{,}1382\ l t\ (d + t).$$

Für eine gegossene eiserne Röhre wird diese Formel:

$$W = 0{,}0876\ l t\ (d + t)$$

oder beinahe $\frac{7}{11}$ des vorigen Ausdrucks.

Beispiel. Der innere Durchmesser einer Bleiröhre sey 4 Zoll, die Dicke $\frac{1}{4}$ Zoll; es wird das Gewicht von 12 Fußen in der Länge gesucht.

Hier hat man $1{,}382 \times 12 \times \frac{1}{4} \times 4\frac{1}{4} = 0{,}1382 \times 12\frac{3}{4} = 1{,}1762$ Centner.

13. Aufgabe. Das Gewicht des Ringes oder des Randes eines gegossenen eisernen Schwungrades zu finden.

Sieht man diesen Ring als einen Theil einer sehr weiten Röhre an, so wird der Ausdruck für sein Gewicht dem obigen ähnlich seyn; es ist aber vortheilhaft, die Bezeichnung zu verändern. Es sey daher D der innere Durchmesser des Schwungrades in Zollen, d der halbe Unterschied des äußern und innern Durchmessers, T die Dicke von einer Seite des Schwungrades zur andern und W sein Gewicht in Centnern, dann ist:

$$W = 0{,}0073\ T d\ (D + d)$$

Beispiel. Es sey D = 100 Zoll, d = 5 Zoll, oder der äußere Durchmesser = 110 und T die Dicke gleich 4 Zoll.

Dann ist $0{,}0073\ T d\ (D + d) = 0{,}0073 \times 4 \times 5 \times 105 = 0{,}0073 \times 2100 = 15{,}33$ Centnern als verlangtes Gewicht des cylindrischen Randes.

Anmerkung. Der Leser wird bemerken, daß diese Methode weit kürzer ist als die gewöhnliche, selbst wenn man schon berechnete Kreistafeln dabei anwendet.

* * * Man sehe weiter über ähnliche Gegenstände die Approximationsregeln bei Ausmessung Seite 201.

XII. Kapitel.

Hydrodynamik.

1. Hydrodynamik ist der Theil der mechanischen Wissenschaften, der die Bewegung nicht-elastischer Flüssigkeiten und die Kräfte betrachtet, mit denen sie auf Körper wirken.

Dieser Zweig der Mechanik ist der schwierigste und am wenigsten angebaute; alle unsere Kenntnisse darin verdanken wir erst neueren Untersuchungen.

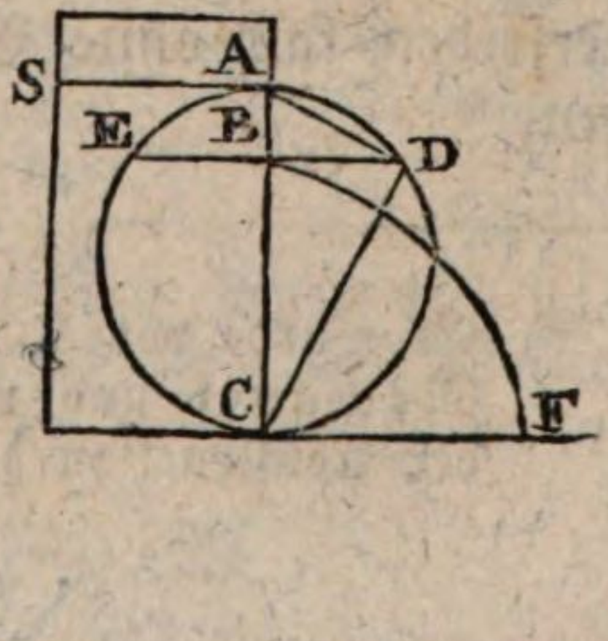
Könnten wir mit Gewißheit die Masse, Gestalt und Anzahl der Theilchen einer sich bewegenden Flüssigkeit wissen, so könnten die Gesetze ihrer Bewegung durch die Aufgabe bestimmt werden: die Bewegung eines gegebenen Systems kleiner freier Körper zu finden, die in Folge einer gegebenen äußeren Kraft auf einander wirken. Wir sind jedoch bei weitem nicht im Besitz der Data, die für die Lösung dieser Aufgabe erfordert werden. Wir werden daher nur einige wenige der gebräuchlichsten theoretischen Ableitungen darstellen, und dann die Regeln bestimmen, die sich aus einer geschickten Anwendung der Theorie auf Versuche ergeben.

1. Abschnitt. Bewegung und Ausfluß von Flüssigkeiten.

1. Ein Strahl Wasser, der aus einer Oeffnung von passender Form herausgeht, und aufwärts gerichtet ist, erhebt sich unter günstigen Umständen beinahe bis zur Höhe des Wasserstandes im Behälter; und da jedes Theilchen nur wenig Einfluß auf die benachbarten äußert, so können sie als unabhängige Körper betrachtet werden, die sich anfänglich mit der Geschwindigkeit bewegen, die durch den Fall von der Höhe des Behälters erlangt werden würde. Die Geschwindigkeit des Strahles ist bei jeder Richtung dieselbe.

2. Wenn daher ein Strahl horizontal aus irgend einem Theile der Wand eines Gefäßes, das auf einer horizontalen Ebene steht, herausspringt und ein Kreis beschrieben wird, der die ganze Höhe der Flüssigkeit zu seinem Durchmesser hat, so wird die Flüssigkeit die Ebene in einem Abstande von dem Gefäße erreichen, der der Chorde des Kreises gleich ist, in der sich der Strahl anfänglich bewegte.

Wenn daher AS die Oberfläche der Flüssigkeit in dem Gefäße, B die Stelle der Oeffnung, CF die Horizontal-Ebene ist, auf welche die Flüssigkeit spritzt, so ist CF gleich ED der horizontalen Sehne des Kreises, dessen Durchmesser, AC durch B geht.

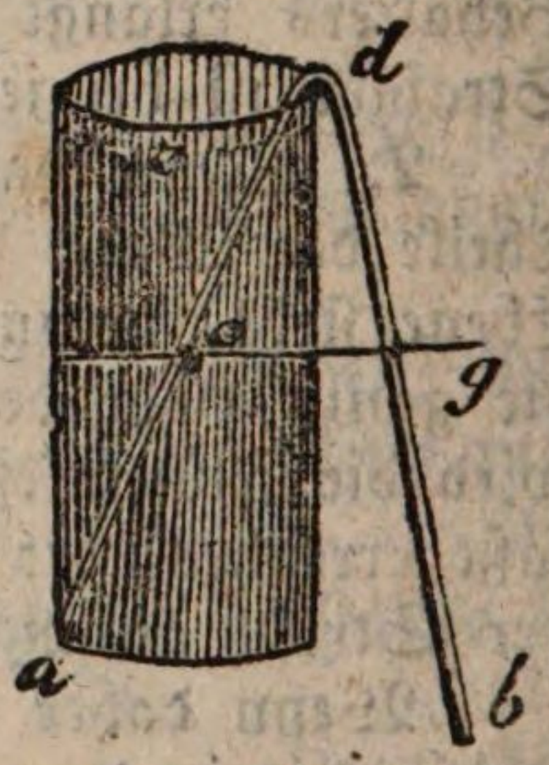


3. Wenn ein cylindrisches oder prismatisches Gefäß sich durch eine kleine Oeffnung ausleert, so wird die Geschwindigkeit an der Oberfläche gleichmäßig vermindert; und während der Zeit der Entleerung würde die doppelte Quantität herausgeflossen seyn, wenn immer neuer Zuschuß hinzugekommen wäre.

4. Aber die ausgeflossene Quantität ist keinesweges derjenigen gleich, die aus der ganzen Oeffnung mit gegebener Geschwindigkeit fließen müßte. Wenn nämlich die Oeffnung bloß in einer dünnen Platte gemacht ist, so strebt die Seitenbewegung der Theilchen gegen die Oeffnung die Längenbewegung zu verhindern, und den Strom, der die Oeffnung verlassen hat, beinahe in dem Verhältnisse von zwei zu drei zusammen zu schnüren, so daß, um die ausgeleerte Quantität zu finden, man die Oeffnung sich von 100 auf 62 bei einer einfachen Oeffnung, auf 82 für eine Röhre, deren Länge gleich dem doppelten Durchmesser ist, und nach andern Verhältnissen bei andern Umständen vermindert denken muß.

5. Wenn ein Heber oder eine gebogene Röhre mit einer Flüssigkeit angefüllt ist, und seine Mündungen werden in die Flüssigkeiten verschiedener Gefäße getaucht, so bleibt das Ganze in Ruhe, wenn beide Oberflächen der Flüssigkeiten gleich hoch sind; ist dies aber nicht der Fall, so behält die längere Säule der Flüssigkeit in dem Heber das Uebergewicht und das Gewicht der Atmosphäre drückt auf die Flüssigkeit des höher angefüllten Gefäßes, bis das Gleichgewicht hergestellt ist; die Bewegung ist dann desto stärker, je größer der Unterschied der Niveau's ist, vorausgesetzt, daß die größte Höhe der Röhre über der Oberfläche nicht größer ist als es das Gegengewicht gegen den Druck der Atmosphäre erfordert.

6. Läßt man das niedrige Gefäß sich entleeren, so wird der Heber so lange laufen, als das obere Gefäß die abgelaufene Flüssigkeit ersetzt, und desto schneller, je weiter er in das obere eingetaucht ist. Auf dieselbe Art kann die Schnelligkeit, mit der eine Röhre, die von der Seite oder dem Boden eines gegebenen Gefäßes herabgeht, dieses entleert, durch Verlängerung derselben fast ohne Grenzen vermehrt werden. *)



*) Es wurde vor Kurzem in dem Glasgow'schen Magazin für Mechanik und von Hr. Buntem zu Paris eine Verbesserung in der Construction des Hebers vorgeschlagen. Sie dürfte sehr vor-

7. Wenn in die verticale Seite eines mit Wasser oder einer andern Flüssigkeit angefüllten Gefäßes ein Einschnitt in Gestalt eines Rechtecks gemacht wird, so ist die dadurch herausfließende Quantität gleich $\frac{2}{3}$ von derjenigen, welche in derselben Zeit durch eine gleiche Oeffnung fließen würde, die horizontal in der ganzen Tiefe angebracht wäre, wenn nämlich das Gefäß beständig vollgehalten würde.

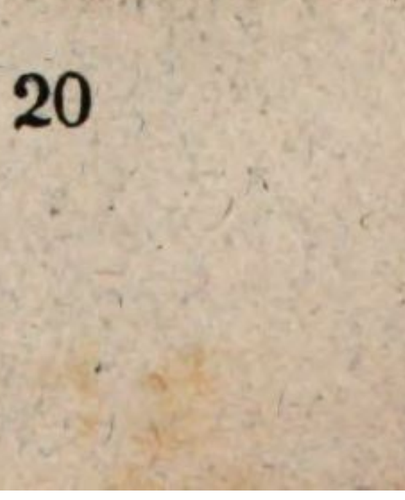
8. Wenn eine kurze Röhre, die in einer beliebigen Richtung in eine Oeffnung als Leitungsröhre schief eingesetzt ist, das Wasser in einer parabolischen Curve bis zu dem Abstande R, auf eine durch die Oeffnung gehende Horizontalebene wirft, und die größte Höhe des spritzenden Wassers über dieser Ebene H ist, so kann die Höhe des Wasserstandes über dieser Leitungsröhre annäherungsweise gefunden werden, wenn man erstlich $2 \cot. E = \frac{R}{2H}$, und zweitens die Höhe des Wasserstandes $A = \frac{1}{2} R \times \text{cosec. } 2E$ nimmt.

Beispiel. Es sey $R = 40$ Fuß, und $H = 18$ Fuß; dann ist $\frac{R}{2H} = \frac{40}{36} = 1{,}1111111 = 2 \cot. 60° 57'$ und $A = \frac{1}{2} R \times \text{cosec. } 2E = 20 \times \text{cosec. } 121° 54' = 20 \times 1{,}177896 = 23{,}55792$ Fuß als gesuchte Höhe.

Anm. Dieses Resultat der Theorie beträgt ohngefähr $\frac{4}{5}$ von dem, was Versuche geben.

2. Abschnitt. Bewegung des Wassers in Röhren, offenen Canälen ꝛc.

1. Wenn das Wasser aus einem Behälter in langen horizontalen Röhren von derselben Oeffnung geleitet wird, so stetheilhaft in Anwendung gebracht werden können, wenn sie nach einem großen Maßstabe ausgeführt würde, um das Wasser in Mühlteichen oder Canälen zu vermindern. Die Verbesserung des gegenwärtigen Hebers ist, daß die Entleerungsröhre von demselben Durchmesser, als der Heber verfertigt wird, und ihre Mündung wie ein Trichter ausgeschweift ist. (Siehe die Figur).



Bei Anwendung dieses Hebers wird der kürzere Arm in das Wasser getaucht, wie es bei dem gewöhnlichen geschieht, die Mündung des langen Armes wird verschlossen, dann wird die Röhre durch die trichterartige Mündung gefüllt. Wird nun die untere Mündung des langen Armes geöffnet, so fließt das Wasser heraus und treibt die Luft aus dem Heber, da es in einem ununterbrochenen Strome ausfließt.

hen die in gleichen Zeiten erfolgenden Entleerungen nahe im umgekehrten Verhältnisse der Quadratwurzeln aus den Längen.

Jedoch setzt man voraus, daß die Röhren, auf die diese Regel angewendet wird, nicht sehr ungleich sind; es ist eine Annäherung, die nicht aus einem Gesetze, sondern unmittelbar aus einem Versuche abgeleitet ist. (Bossüt, Theil 2, §. 647, 648. In §. 673 giebt er eine Tafel der wirklichen Entleerungen von Wasserröhren bis auf die Länge von 2340 Toisen oder 14950 engl. Fußen.)

2. Wenn Wasser in offenen Canälen oder Flußbetten läuft, so wird es in Folge der Tiefe derselben und des Abhangs, auf dem es läuft, beschleunigt, bis der Widerstand, der mit der Geschwindigkeit wächst, der Beschleunigung gleich, und die Bewegung des Stromes gleichförmig wird.

Es leuchtet ein, daß aus schon bekannten Grundsätzen schwer bestimmt werden kann, wie hoch sich der Widerstand der Kräfte beläuft, und es bleibt daher nichts übrig, als durch Versuche die Geschwindigkeit bei verschiednen Abhängen und Tiefen des Wassers zu bestimmen, und durch Vermehrung und Ausdehnung dieser Experimente zu versuchen, das Gesetz, das ihnen allen gemein ist, ausfindig zu machen.

Der Chevalier Dü Büat hat diese Untersuchungen mit Glück verfolgt und eine Formel gegeben, um die Geschwindigkeit von Wasser zu berechnen, das in verschlossenen Röhren, offenen Canälen, oder Flußbetten läuft, und obgleich diese Formel empirisch ist, so ist sie doch in der Praxis äußerst nützlich. Man vergleiche seine Principes d'Hydraulique, wovon der Professor Robison in seiner vortrefflichen Abhandlung über Flüsse und Wasserwerke in der Encyclopaedia Britannica eine kurze Nachricht gegeben hat.

Es sey V die Geschwindigkeit des Stromes in Zollen, die er in einer Secunde durchläuft, R sey eine beständige Größe, nämlich der Quotient, den man erhält, wenn man den Queerdurchschnitt des Stromes, in Quadratzollen ausgedrückt, durch den Umfang dieses Schnittes weniger der Breite der Oberfläche des Stromes, in Längen-Zollen ausgedrückt, dividirt.

Die mittlere Geschwindigkeit ist die, bei welcher, wenn sie allen Theilchen gemein wäre, die Entleerung dieselbe wäre, als es die wirkliche ist.

Die Linie R heißt bei Dü Büat der Halbmesser, und bei Dr. Robison die mittlere hydraulische Tiefe. Da sie aber dem Halbmesser eines Kreises ähnlicher ist, als der Tiefe eines Flusses, so werden wir sie mit dem ersteren den Halbmesser des Schnittes nennen.

Endlich sey S der Nenner eines Bruches, der den Abhang

ausdrückt und wo der Zähler die Einheit ist, das heißt, es sey der Quotient, den man erhält, wenn man die Länge des Stromes, den man sich in einer geraden Linie ausgedehnt denkt, durch den Unterschied der Niveau's an seinen beiden Enden dividirt, oder was beinahe dasselbe ist, es sey die Cotangente der Neigung oder des Abhangs.

3. Hat man obige Bezeichnungen aufgefaßt, und man nimmt den Schnitt sowohl, als die Geschwindigkeit gleichförmig an, so wird V in englischen Fußen:

$$= \frac{307\sqrt{(R-\frac{1}{10})}}{S^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\log.(S+\frac{16}{10})} - \frac{3}{10}\sqrt{(R-\frac{1}{10})};$$

$$\text{oder } V = \sqrt{R-\frac{1}{10}}\left(\frac{307}{S^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\log.(S+\frac{16}{10})}-\frac{3}{10}\right).$$

Wenn R und S sehr groß sind,

$$V = R^{\frac{1}{2}}\left(\frac{307}{S^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\log. S}-\frac{3}{10}\right) \text{ annäherungsweise.}$$

Unter den Logarithmen sind hier die natürlichen zu verstehen, und man findet sie, indem man die künstlichen mit 2,3025851 multiplicirt.

Bei gleichem Abhange verhalten sich die Geschwindigkeiten wie $\sqrt{R-\frac{1}{10}}$.

Die Geschwindigkeiten zweier großen Flüsse, die denselben Abfall haben, verhalten sich wie die Quadratwurzeln aus den Halbmessern ihrer Schnitte.

Ist R so klein, daß $\sqrt{R-\frac{1}{10}} = 0$ oder $R = \frac{1}{10}$, so ist die Geschwindigkeit Null, was mit Versuchen zusammenstimmt; denn ist in einer cylindrischen Röhre $R = \frac{1}{2}$, so ist der Halbmesser gleich $\frac{2}{10}$; so daß die Röhre beinahe ein Haarröhrchen ist, und die Flüssigkeit daher nicht durchfließt.

Die Geschwindigkeit kann auch nicht verschwinden, wenn der Abhang so klein wird, daß

$$\frac{307}{S^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\log.(S+\frac{16}{10})}-\frac{3}{10} = 0;$$

wenn aber $\frac{1}{S}$ kleiner als $\frac{1}{500000}$, oder als das Verhältniß von $\frac{1}{10}$ Zoll zu einer englischen Meile ist, so wird das Wasser eine bemerkbare Bewegung haben.

4. Bei einem Flusse findet die größte Geschwindigkeit an der Oberfläche und in der Mitte des Stroms statt, von wo an sie sich gegen den Boden und die Seiten, wo sie am geringsten ist, vermindert. Versuche haben nachgewiesen, daß wenn von der Quadratwurzel der Geschwindigkeit in der Mitte

des Stromes in Zollen für jede Secunde ausgedrückt, die Einheit abgezogen wird, das Quadrat des Restes die Geschwindigkeit am Boden ist.

Ist daher die erstere Geschwindigkeit $= v$, so ist die Geschwindigkeit am Boden $= v - 2\sqrt{v} + 1$.

5. Die mittlere Geschwindigkeit, oder die, bei der, wenn sie dem ganzen Strom gemein wäre, der Abfluß eben so groß als die wirkliche seyn würde, ist gleich der halben Summe der größten und kleinsten Geschwindigkeiten, wie sie vorher berechnet wurden.

Die mittlere Geschwindigkeit ist daher $= v - \sqrt{v} + \frac{1}{2}$.

Auch die Versuche des Dü Büat zeigen dies.

6. Es habe ein Fluß ein rechteckiges Bette, und es ergieße sich in denselben ein anderer gleich großer, man sucht die Vergrößerung der Tiefe und der Geschwindigkeit, wenn der Abhang derselbe bleibt.

Es sey b die Breite des Flusses, die Tiefe vor der Verbindung d und darnach x; auf gleiche Weise seyen die mittlern Geschwindigkeiten vor und nachher v und v'; ist ferner $\frac{bd}{b+2d}$ der Halbmesser vor, $\frac{bx}{b+2x}$ nach der Verbindung, so ist $v = \frac{307\ R^{\frac{1}{2}}}{S^{\frac{1}{2}}}$, wenn man eine solche Breite des Flusses annimmt, daß die kleine Größe, die von R abgezogen wird, (Art. 3), weggelassen werden kann; und eben so ist

$$v' = \frac{307\ R'^{\frac{1}{2}}}{S^{\frac{1}{2}}}.$$

Substituirt man nun die Werthe für R und R', so erhält man:

$$v = \frac{307}{S^{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{bd}{v+2d}}, \text{ und}$$

$$v' = \frac{307}{S^{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{vx}{v+2x}}.$$

Multiplicirt man diese Geschwindigkeiten in die Flächeninhalte der Schnitte bd und bx, so erhält man den Abfluß, nämlich:

$$bdv = \frac{307}{S^{\frac{1}{2}}} \times \frac{bd\sqrt{bd}}{\sqrt{b+2d}}, \text{ und:}$$

$$bxv' = \frac{307}{S^{\frac{1}{2}}} \times \frac{bx\sqrt{bx}}{\sqrt{b+2x}}.$$

Nun ist der letztere Werth doppelt so groß als der erstere, daher:

$$\frac{bx\sqrt{bx}}{\sqrt{b+2x}} = \frac{2bd\sqrt{bd}}{\sqrt{b+2d}}, \text{ oder } \frac{x^3}{b+2x} = \frac{4d^3}{b+2d}, \text{ und}$$

$$x^3 - \frac{3d^3}{b+2d}x = \frac{4bd^3}{b+2d}, \text{ eine cubische Gleichung, die}$$

durch die Cardanische Regel oder durch die Approximationsmethode Seite 83 immer aufgelöst werden kann.

Als ein Beispiel sey $b = 10$ Fuß und $d = 1$, dann ist $x^3 - \frac{2}{3}x = \frac{10}{3}$ und $x = 1{,}4882$, welches die Tiefe des vergrößerten Flusses ist. Daher hat man $1{,}448 \times v' = 2v$ und $1{,}488 : 2 = v : v'$ oder $v : v' = 37 : 50$ ziemlich nahe.

Wenn das Wasser in einem Flusse beständig vermehrt wird, so werden die Tiefe und die Geschwindigkeit, wie in dem obigen Beispiele, zuerst vermehrt. Die Vergrößerung der Geschwindigkeit vergrößert die Wirkung auf die Seiten und den Boden, weswegen auch die Breite und bisweilen, wiewohl seltner, die Tiefe vermehrt wird. Die Geschwindigkeit vermindert sich so lange, bis die Zähigkeit des Schlammes oder die Härte des Felsens der Kraft des Wassers einen hinreichenden Widerstand leisten. Das Flußbette ändert sich dann nur in unmerklichen Graden, und ist nach der gewöhnlichen Sprache der Hydraulik permanent, ob dieser Ausdruck gleich nicht auf einen Fluß mit Strenge angewendet werden kann.

7. Wenn bei gleichbleibender Wassermenge die Schnitte eines Flusses sich verändern, so verhalten sich die mittleren Geschwindigkeiten umgekehrt wie die Flächenräume der Schnitte.

Dies muß statt finden, wenn immer dieselbe Quantität des Abflusses erhalten werden soll. (S. Playfair's Outlines.)

8. Folgende abgekürzte Tafel des Dr. Robison dient, auf einmal die Oberfläche, den Boden und die mittleren Geschwindigkeiten nach den Grundsätzen der Artikel 4, 5, zu vergleichen.

Geschwindigkeiten der Flüsse in Zollen.

Oberfläche.	Boden.	Mittel.	Oberfläche.	Boden.	Mittel.
4	1,	2,5	56	42,016	49,008
8	3,342	5,67	60	45,509	52,754
12	6,071	9,036	64	49,	56,5
16	9,	12,5	68	52,505	60,252
20	12,055	16,027	72	56,025	64,012
24	15,194	19,597	76	59,568	67,784
28	18,421	23,210	80	63,107	71,553
32	21,678	26,839	84	66,651	75,325
36	25,	30,5	88	70,224	79,112
40	28,345	34,172	92	73,788	82,894
44	31,742	37,871	96	77,370	86,685
48	35,151	41,570	100	81,	90,5
52	38,564	45,282			

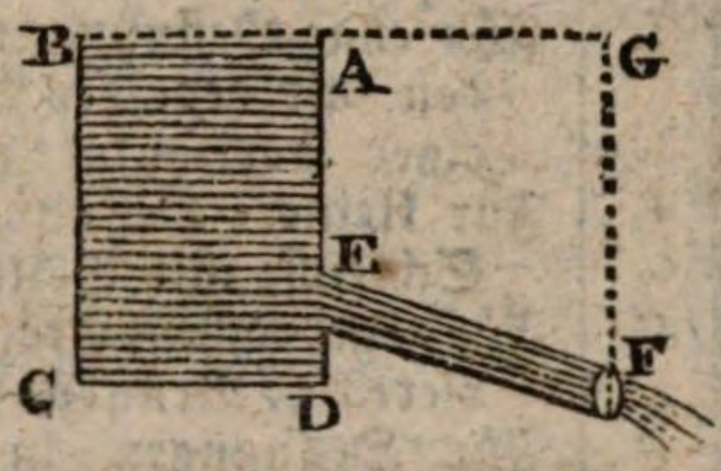
9. Die Kenntniß der Geschwindigkeit am Boden ist von der größten Wichtigkeit, um uns in den Stand zu setzen, über die Wirkung des Stromes auf sein Bette zu urtheilen.

Jede Art von Boden hat eine gewisse Geschwindigkeit, die mit der Stabilität des Bettes in Zusammenhang steht. Bei einer größeren Geschwindigkeit würde das Wasser den Boden aufreißen, und eine geringere Geschwindigkeit würde gestatten, daß mehr bewegliche Theilchen von oben abgesetzt werden könnten. Zur Stabilität eines Flusses ist es nicht genug, daß die beschleunigenden Kräfte der Größe und Gestalt des Bettes so angemessen sind, daß die Strömung im Zuge erhalten wird; sie müssen auch mit der Haltbarkeit (tenacity) des Bettes im Gleichgewicht seyn.

Aus den Beobachtungen des Dû Buât und anderer ersieht man, daß eine Geschwindigkeit von drei Zollen in der Secunde am Boden gerade anfangen wird, auf feinen Töpferthon zu wirken, und ihn, auch wenn er fest und zusammenhängend ist, aufzureißen. Keine Flußbetten aber haben mehr Stabilität, als die von Thon, wenn nämlich die Geschwindigkeit jene nicht übersteigt; das Wasser nimmt nämlich bald die unmerklichen Theilchen des obersten Thonlagers weg, läßt aber die Sandtheilchen zurück, die auf den zurückgelassenen Thon fallen, denselben decken, und so einen festen Boden erzeugen, wenn der Strom nicht Kies oder groben Sand herzuschwemmt, der diese sehr dünne Kruste wegnehmen, und so jede andere

Schicht wieder fortführen wird; eine Geschwindigkeit von sechs Zollen wird feinen Sand erheben; acht Zolle erheben so groben Sand, wie Leinsaamen; zwölf Zolle schwemmen feinen Kies weg; 24 Zolle wälzen runde Steine von einem Zoll Durchmesser mit fort; um aber lockere, eckige Steine von der Größe eines Eies wegzuschwemmen, bedarf es einer Geschwindigkeit von drei Fuß in der Secunde. (Robison über Flüsse.)

10. Hr. Eytelwein, ein deutscher Mathematiker, hat auf Untersuchungen in der Hydrodynamik viel Zeit verwendet. Er berücksichtigte dabei die gegenseitige Cohäsion der flüssigen Theilchen, ihre Adhärenz an den Wänden des Gefäßes, in dem das Wasser sich bewegte, und die Zusammenzichung, die der Wasserstrahl erlitt, wenn er unter gewissen Umständen aus dem Gefäße heraustrat. Er erhielt Formeln von der größten Allgemeinheit, und wandte sie dann auf die Bewegung des Wassers in einer cylindrischen Röhre und einem offenen Canale an.



11. Es sey d der Durchmesser der Cylinderröhre EF, h die Totalhöhe FG des Wasserstandes in dem Behälter über der Oeffnung F, und l die Länge EF der Röhre; dann ist die Geschwindigkeit in Zollen, mit der die Flüssigkeit aus der Oeffnung heraustritt,

$$v = 23\tfrac{1}{3}\sqrt{\frac{57\,h\,d}{l + 57\,d}}$$ (englisches Maß),

dies in den Flächenraum der Oeffnung multiplicirt, giebt die Quantität in der Secunde.

12. Für offene Canäle. Es sey v die mittlere Geschwindigkeit des Wassers in englischen Fußen, a der Flächenraum des verticalen Durchschnitts des Stromes, p der Umfang des Schnittes, oder die Summe des Bodens und zweier Seiten, l die Länge des Bettes des Canals, die dem Abfalle h, alles in Fußen, entspricht; dann ist

$$v = -0{,}109 + \sqrt{9582\,\frac{a\,h}{p\,l} + 0{,}0111}.$$

Die Versuche des Hrn. Bidone von Turin über die Bewegung des Wassers in Canälen, stimmen bis auf den 80sten Theil mit den Resultaten, die man durch Rechnung aus den vorhergehenden Formeln erhält, überein.

13. Die folgende Tafel stellt auch Eytelwein's Coefficienten für Oeffnungen von verschiednen Arten dar; ihre Genauigkeit ist in mehreren Fällen hinlänglich bestätigt worden.

Nr.	Art der gebrauchten Oeffnungen.	Verhältniß zwischen den theoretischen und wirklichen Entleerungen.	Coefficienten um die Geschwindigkeit in engl. Fußen zu finden.
1	Für die ganze Geschwindigkeit, die der Höhe zukommt	1 zu 1,00	8,04
2	Für weite Oeffnungen, deren Boden mit dem des Behälters in gleicher Horizontal-Fläche liegt	1 zu 0,961	7,7
3	Für Schleussen mit Wänden in einer Linie mit der Oeffnung.	1 zu 0,961	7,7
4	Für Brücken mit zugespitzten Pfeilern	1 zu 0,961	7,7
5	Für enge Oeffnungen, deren Boden mit dem des Behälters in einer Horizontal-Fläche liegt	1 zu 0,861	6,9
6	Für kleinere Oeffnungen in einer Schleusse mit Seitenwänden .	1 zu 0,861	6,9
7	Für abgebrochene Projectionen und viereckige Brücken-Pfeiler . . .	1 zu 0,861	6,9
8	Für Oeffnungen in Schleussen ohne Seitenwände	1 zu 0,635	5,1

14. Wenn eine Röhre an einer oder mehr Stellen gebogen ist, und es werden die Quadrate der Sinus der verschiednen Richtungsveränderungen in eine Summe s zusammengezogen, so wird nach Langsdorf die Geschwindigkeit:

$v = \sqrt{\frac{548\ d\,h}{d + \frac{1}{45}\,l + \frac{1}{6}\,ds}}$; wo l, h, d und v alle in englischen Zollen gegeben sind.

Abgekürzte Tafel von Hrn. Smeaton, die die Höhe des Wasserstandes angiebt, wodurch die Reibung des Wassers in horizontalen Röhren überwunden wird.

Geschwindigkeit des Wassers in den Röhren in einer Secunde.																				Caliber der Röhren.
Fuß.	Zoll.	Fuß.	Zoll.	Fuß.	Zoll.	Fuß.	Zoll.	Fuß.	Zoll.	Fuß.	Zoll.	Fuß.	Zoll.	Fuß.	Zoll.	Fuß.	Zoll.	Fuß.	Zoll.	
0	6	1	0	1	6	2	0	2	6	3	0	3	6	4	0	4	6	5	0	
0	4,5	1	4,7	2	11,0	4	9,7	7	1,7	10	1,0	13	8,0	17	10,0	22	6,7	28	0,2	$\frac{1}{2}$ Zoll.
0	3,0	0	11,1	1	11,3	3	2,5	4	9,2	6	8,6	9	1,3	11	10,6	15	0,5	18	8,1	$\frac{3}{4}$ =
0	2,2	0	8,4	1	5,5	2	4,9	3	6,9	5	0,5	6	10,0	8	11,0	11	3,4	14	0,0	1 =
0	1,8	0	6,7	1	2,0	1	11,1	2	10,3	4	0,4	5	5,6	7	1,6	9	0,3	11	2,5	$1\frac{1}{4}$ =
0	1,5	0	5,6	0	11,7	1	7,2	2	4,6	3	4,3	4	6,7	5	11,3	7	6,2	9	4,1	$1\frac{1}{2}$ =
0	1,3	0	4,8	0	10,0	1	4,5	2	0,5	2	10,6	3	10,9	5	1,1	6	5,4	8	0,1	$1\frac{3}{4}$ =
0	1,1	0	4,2	0	8,7	1	2,4	1	9,4	2	6,2	3	5,0	4	5,5	5	7,7	7	0,0	2 =
0	1,0	0	3,7	0	7,8	1	0,8	1	7,0	2	2,9	3	0,4	3	11,6	5	0,1	6	2,7	$2\frac{1}{4}$ =
0	0,9	0	3,3	0	7,0	0	11,5	1	5,1	2	0,2	2	8,8	3	6,8	4	6,1	5	7,2	$2\frac{1}{2}$ =
0	0,7	0	2,8	0	5,0	0	9,6	1	2,3	1	8,2	2	3,3	2	11,7	3	9,1	4	8,0	3 =
0	0,6	0	2,4	0	5,0	0	8,2	1	0,2	1	5,3	1	11,4	2	6,6	3	2,7	4	0,0	$3\frac{1}{2}$ =
0	0,6	0	2,1	0	4,4	0	7,2	0	10,7	1	3,1	1	8,5	2	2,7	2	9,8	3	6,0	4 =
0	0,5	0	1,9	0	3,9	0	6,4	0	9,5	1	1,4	1	6,2	1	11,8	2	6,1	3	1,4	$4\frac{1}{2}$ =
0	0,4	0	1,7	0	3,5	0	5,8	0	8,6	1	0,1	1	4,4	1	9,4	2	3,1	2	9,6	5 =
0	0,4	0	1,4	0	2,9	0	4,8	0	7,1	0	10,1	1	1,7	1	5,8	1	10,6	2	4,0	6 =
0	0,3	0	1,2	0	2,5	0	4,1	0	6,1	0	8,6	0	11,7	1	3,3	1	7,3	2	0,0	7 =
0	0,3	0	1,0	0	2,2	0	3,6	0	5,4	0	7,6	0	10,2	1	1,4	1	4,9	1	9,0	8 =
0	0,25	0	0,9	0	1,9	0	3,2	0	4,8	0	6,7	0	9,1	0	11,9	1	3,0	1	6,7	9 =
0	0,2	0	0,8	0	1,7	0	2,9	0	4,3	0	6,0	0	8,2	0	10,7	1	1,5	1	4,8	10 =
0	0,2	0	0,8	0	1,6	0	2,6	0	3,9	0	5,5	0	7,5	0	9,7	1	0,3	1	3,3	11 =
0	0,19	0	0,7	0	1,5	0	2,4	0	3,6	0	5,0	0	6,8	0	8,9	0	11,3	1	2,0	12 =

Um die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre zu finden, sehe man in die obere Reihe und in die Colonne darunter, dann wird man dem gegebenen Durchmesser der Röhre, der in der letzten Colonne steht, gegenüber in Fußen, Zollen und Zehnteln die senkrechte Höhe einer Säule finden, die für die Reibung einer solchen Röhre auf 100 Fuß in der Länge, und die gegebene Geschwindigkeit erfordert wird.

Tafel, enthaltend die Quantität Wasser, welche über einen verticalen Schnitt von einem Zolle eines Wehrs abfließt.

Tiefe des oberen Randes des Schutzbretes unter der Oberfläche in engl. Zollen.	Cubikfuß Wasser, die in einer Minute durch einen Zoll des Schutzbretes nach Dû Buat's Formeln abfließen.	Cubikfuß Wasser, die in einer Minute durch einen Zoll des Schutzbretes nach Versuchen, die in Schottland angestellt wurden, abfließen.	Gallonen von 282 Zollen, die mit den Resultaten von Colonne 3 übereinstimmen.
1	0,403	0,428	2,621
2	1,140	1,211	7,417
3	2,095	2,226	13,634
4	3,225	3,427	20,990
5	4,507	4,789	29,332
6	5,925	6,295	38,357
7	7,466	7,933	48,589
8	9,122	9,692	59,364
9	10,884	11,564	70,826
10	12,748	13,535	83,164
11	14,707	15,632	95,746
12	16,758	17,805	109,055
13	18,895	20,076	122,965
14	21,117	22,437	137,427
15	23,419	24,883	152,408
16	25,800	27,413	167,905
17	28,258	30,024	183,897
18	30,786	32,710	200,350

Der obigen Tafel, die von Hrn. Dû Buat herrührt, ist eine dritte Colonne hinzugefügt, die die Quantitäten abgeflossenen Wassers enthält, wie sie in Schottland angestellte Versuche ergeben, die Dr. Robison prüfte; derselbe fand, daß sie im Allgemeinen einen Abfluß geben, der $\frac{1}{16}$ größer ist als derjenige, der aus Dû Buat's Formeln abgeleitet wurde. Wir

würden daher Praktikern die dritte Colonne empfehlen, oder die vierte, wenn sie das Resultat in Gallonen haben wollen.

Sind einzelne Viertel eines Zolles dabei, so nehme man aus der Tafel so viele Zolle, als die Tiefe Viertel enthält, und dividire das, was man gefunden hat, durch acht. So nehme man für $3\frac{3}{4}$ Zolle den achten Theil von 24,883, welches 15 Zollen entspricht; dies ist 3,110.

15. Die abgeflossene Quantität wächst schneller als die Breite; um ein correctes Maß davon zu erhalten, nehme man, wenn n die Breite oder Länge des Schutzbretes in Zollen ist, $(n + \frac{1}{20} n)$ mal die Quantität für einen Zoll des Schutzbretes von der gegebenen Tiefe nach der vorhergehenden Tafel.

In derselben wurde vorausgesetzt, daß das Wasser, von welchem der Abfluß geschieht, vollkommen in Ruhe ist, wenn es aber etwa die Oeffnung mit einer Geschwindigkeit erreicht, so hat man nur den Flächenraum des Schnittes mit der Geschwindigkeit des Stromes zu multipliciren.

16. Wenn die Quantität Wasser Q, die über ein Wehr abläuft, bekannt ist, so findet man die Tiefe des Randes des Schutzbretes H annäherungsweise aus folgenden Formeln, wo l die Länge des Schutzbretes ist.

$$H = \left(\frac{Q}{11{,}4172\, l}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{Q}{11\frac{1}{2}\, l}\right)^{\frac{2}{3}} \text{ annäherungsweise.}$$

Dagegen ist $Q = 11\frac{1}{2}\, l \,.\, H^{\frac{3}{2}}$ annäherungsweise; oder genauer, wenn man die Correction in Art. 15. hinzufügt.

17. Die für eine gegebene Breite abgeflossenen Quantitäten verhalten sich wie die Potenz $\frac{3}{2}$ der Tiefe oder wie $H^{\frac{3}{2}}$.

Um daher den Gebrauch der Tafeln auf größere Tiefen auszudehnen, nehme man für die

2fache	Tiefe	. . . .	Q	×	2,828
3	=	. . . .	Q	×	5,196
4	=	. . . .	Q	×	8,000
5	=	. . . .	Q	×	11,180
6	=	. . . .	Q	×	14,697
7	=	. . . .	Q	×	18,520
8	=	. . . .	Q	×	22,627
9	=	. . . .	Q	×	27,000
10	=	. . . .	Q	×	31,623

die Resultate werden nahe richtig seyn.

Um sie noch correcter zu machen, füge man, wenn große Genauigkeit erfordert wird, noch ihren tausendsten Theil hinzu.

Beispiele vom Gebrauche der Tafeln und Regeln.

Beispiel. 1. Es sey die Tiefe 10 Zoll unter der Oberfläche des Wassers und die Breite 8 Zoll. Wieviel Cubikzoll Wasser werden in einer Minute abfließen?

	Cubikfuß.
Nach der Tafel gehört zur Tiefe 10, Breite 1 =	13,535
Dies mit n multiplicirt = ...	8
	106,280
$\frac{1}{20}$ des Products hinzugefügt	5,314
Abfluß in einer Minute = ...	111,594

Beispiel 2. Die Tiefe sey 9 Fuß, die Breite 1 Fuß. Man verlangt die in einer Minute abgeflossenen Cubikfuße Wasser.

Nach der Tafel gehört zu 12 Zoll Tiefe und 1 Zoll Breite = ...	17,805
Der Factor für die neunfache Tiefe ist 27 = 3 × 9	3
	53,415
	9
Quantität für einen Zoll Breite	480,735
Mit n multiplicirt = ...	12
	5768,802
$\frac{1}{20}$ des Products hinzugefügt	286,441
Total-Quantität in Cubikfußen = . . .	6055,261

Beispiel 3. Es sey eine quadratische Oeffnung von 6 Zollen in einer Schleussen-Thüre, deren oberer Theil 4 Fuß unter der Oberfläche des Wassers ist; wieviel wird in einer Minute auslaufen?

Hier muß man die Quantität, die durch eine Oeffnung in der Tiefe von 48 Zollen ausläuft, von einer, die in einer Tiefe von 54 Zollen auslaufen würde, abziehen.

	Cubikfuß.
Für 54 multiplicire man Q = 6 mit $9\frac{3}{4}$ oder 27 .	169,965
Für 48 multiplicire man Q = 12 mit $4\frac{3}{4}$ oder 8 .	142,440
Unterschied	27,525

$27{,}525 \times (6 + \frac{6}{20}) = 173{,}4$ Cubikfuß, als ausgelaufene Quantität.

Anmerkung. In einem Beispiele wie dieses ist es eine gute Annäherung, immer den Flächeninhalt

der Oeffnung, die Zahl 336 (= 66 + 5,6) und die Quadratwurzel aus der Tiefe der Mitte der Oeffnung in Fußen miteinander zu multipliciren.

So wird in dem vorhergehenden Beispiele seyn $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 336 \times \sqrt{4,25} = \frac{1}{4} \times 336 \times 2,062 = 173,2$ Cubikfuß.

Je geringer die Höhe der Oeffnung in Vergleich mit ihrer Tiefe unter dem Wasser ist, desto näher wird das so erhaltene Resultat der Wahrheit seyn.

Ist die Höhe so, wie es die Betrachtung erfordert, so kann das Gesetz von Artikel 7 des vorhergehenden Abschnitts mit dieser Regel vertauscht werden.

Wendet man daher diese Regel auf Beispiel 2 an, so erhält man Flächenraum $\times \sqrt{}$ Tiefe $\times 336 \times \frac{2}{3} = 9 \times 3 \times 224 = 6048$ für die ausgelaufenen Cubikfuße. Dies ist ungefähr um den 900sten Theil weniger als das vorige Resultat. In Rücksicht auf Einfachheit ist es daher eine gute Annäherung, und überhebt bisweilen der Nothwendigkeit, zu den Tafeln seine Zuflucht zu nehmen.

18. Aufgabe. Es ist der verticale Schnitt eines Flusses oder Stromes gegeben; das Anschwellen, das durch die Pfeiler einer Brücke oder die Seiten einer Abführungsschleusse, die den Durchgang um eine gegebene Quantität verengt, für eine nur kurze Länge des Bettes zu bestimmen, wenn die Geschwindigkeit des Stromes ebenfalls bekannt ist. v sey die Geschwindigkeit des Stromes, die von der Wirkung der Brücke unabhängig ist, r der Durchschnitt des Flusses, und a die Fläche der Durchschnitte zwischen den Pfeilern; man nehme $2g = 58,6$ anstatt $64\frac{1}{3}$, damit es mit der Wirkung der erfahrungsmäßigen Zusammenziehungen durch Brückenbogen u. s. w. übereinstimme; s sey der Abfall des Flußbettes, oder der Sinus seines Winkels mit dem Horizonte; dann giebt Dü Büat (Th. I. S. 225) für das Anschwellen oder das Erheben des Stromes in Fußen, das durch die Verstopfung erzeugt wird, die Formel $\left(\frac{v^2}{58,6} + s\right)\left(\left[\frac{r}{a}\right]^2 - 1\right)$: durch die man in jedem gegebenen Falle einen Näherungswerth finden kann.

Der Werth von s wird folglich in verschiednen Fällen verschieden seyn; wenn man aber $\frac{1}{20}$ oder 0,05 als einen mittleren Werth annimmt, so wird man Resultate berechnen und in Tafeln bringen können, die, ob sie gleich nicht als vollkommen correct aufgestellt werden können, doch einen mittleren Werth von denen, die gewöhnlich vorkommen, angeben; auch werden

sie dazu dienen, Folgerungen über Strömungen von gewissen Geschwindigkeiten zu machen, wenn sie genöthigt werden, mit größerer oder geringerer Zusammenziehung durch Brücken zu gehen.

Tafel des Erhebens des Wassers durch Brückenpfeiler und andere Zusammenziehungen erzeugt. *)

Geschwindigkeit des Stromes in Fußen, für die Sec.	Aufsteigen durch Verstopfungen, mit dem verticalen Schnitte des Flusses verglichen.									
	Verhältnißmäßiges Aufsteigen des Wassers in Fußen und Decimalen.									
	1 : 10	2 : 10	3 : 10	4 : 10	5 : 10	6 : 10	7 : 10	8 : 10	9 : 10	
1	Fuß. 0,0157	Fuß. 0,0377	Fuß. 0,0698	Fuß. 0,1192	Fuß. 0,2012	Fuß. 0,3521	Fuß. 0,6780	Fuß. 1,6094	Fuß. 6,6389	
2	0,0277	0,0665	0,1231	0,2102	0,3548	0,6208	1,1955	2,8378	11,7058	
3	0,0477	0,1144	0,2118	0,3618	0,6107	1,0687	2,0580	4,8850	20,1504	
4	0,0760	0,1822	0,3372	0,5759	0,9719	1,7008	3,2755	7,7750	32,0720	
5	0,1165	0,2793	0,5168	0,8782	1,4895	2,6066	5,0202	11,9160	49,1535	
6	0,1558	0,3736	0,6912	1,1807	1,9925	3,4868	6,7154	15,9398	65,7518	
7	0,2078	0,4983	0,9221	1,5750	2,6578	4,6511	8,9578	21,2626	87,7080	
8	0,2678	0,6423	1,1884	2,0299	3,4255	5,9947	11,5454	27,4042	113,0422	
9	0,3359	0,8054	1,4903	2,5566	4,2956	7,5172	14,4777	34,3646	141,7541	
10	0,4119	0,9877	1,8276	3,1218	5,2680	9,2190	17,7551	42,1440	173,844	
										Gewöhnlicher Strom.
										Heftiger Strom.
										Ungewöhnlich heftiger Strom.

19. Bei dem ersten Anblicke dieser Tafel leuchtet ein, daß selbst in dem Falle gewöhnlicher Strömungen alte Brücken mit

*) Eine ähnliche Tafel gab vor mehr als 50 Jahren Hr. Wright von Durham, die in Dr. Hutton's Abhandlung von den Brücken eingerückt ist; sie ist jedoch nach einer unrichtigen Theorie berechnet.

Pfeilern und Eisbrechern, die 6 oder 7 Zehntel des Durchschnittes des Flusses einnehmen, ein Anschwellen von 2, 3 oder mehr Fuß erzeugen werden, wodurch die Dämme des Flusses überschwemmt werden, und viel Unglück entsteht. Bei heftigen Strömungen wird auch eine Verstopfung, die sich auf ungefähr sieben Zehntel des Bettes beläuft, ein Erheben um 7 oder 8 Fuß erzeugen, wodurch wahrscheinlich die Bogen erschüttert werden, was die Zerstörung der Brücke nach sich zieht. Größere Geschwindigkeiten und größere Zusammenziehungen erzeugen eine starke Vergrößerung der Gefahr und der Unglücksfälle wie die Tafel beiläufig zeigt.

20. Dieselben Gesetze und tabellarischen Resultate sind auch brauchbar, um den Fall von der höheren auf die niedere Seite einer Brücke in Rücksicht auf eine ablaufende Fluth u. s. w. zu bestimmen. So beläuft sich bei der Londoner Brücke, wo die Breite der Themse 926 Fuß, und die Summe der Wasserdurchgänge bei niedrigem Wasser nur 236 Fuß ist, die Verstopfungen auf 690 Fuß, ungefähr $7\frac{1}{2}$ Zehntel des ganzen Schnitts; so daß eine Geschwindigkeit von $3\frac{1}{2}$ Fuß in der Secunde einen Fall von beinahe $4\frac{3}{4}$ Fuß geben würde, was mit dem wirklichen Resultate übereinstimmt.

Bei der Rochester-Brücke geben die Pfeiler und Eisbrecher vor der Oeffnung des Mittelbogens eine Verstopfung von sieben Zehnteln, und zur Zeit des größten Falles ist die Geschwindigkeit 100 Yards oberhalb der Brücke größer als 6 Fuß in der Secunde. Dies würde nach der Tafel einen Fall von mehr als 6,7 Fuß hervorbringen; die aufgezeichneten Resultate variiren zwischen $6\frac{1}{2}$ und 7 Fuß.

Bei der Westminster-Brücke, wo die Verstopfungen ungefähr ein Sechstel des ganzen Bettes betragen, ist der Fall, wenn die Geschwindigkeit $2\frac{1}{2}$ Fuß ist, nur wenig größer als ein halber Zoll; ein Resultat, das man nach der Tafel erwarten konnte.

3. Abschnitt. Erfindungen, um die Geschwindigkeit laufenden Wassers zu messen.

1. Zu diesem Zwecke sind verschiedne Erfindungen vorgeschlagen worden, von denen hier zwei oder drei beschrieben werden sollen.

Es werde die Geschwindigkeit des Wassers in einem Flusse gesucht, oder vielmehr die Geschwindigkeit und die Quantität des Wassers, das in einer gegebenen Zeit in demselben fortfließt. Man suche eine Stelle, wo die Ufer des Flusses steil und beinahe parallel sind, so daß sie für das durchlaufende Wasser eine Art

Trog bilden, und nehme an verschiednen Stellen die Tiefe, indem man queer durch einen wirklichen Durchschnitt des Flusses macht. Dann ziehe man ein Seil rechtwinklig darüber, und in einiger Entfernung ein anderes, dem ersteren parallel. Hierauf nehme man einen Apfel, eine Pomeranze oder eine andere kleine Kugel, die so leicht ist, daß sie auf dem Wasser schwimmt, oder eine Flasche, die zum Theil mit Wasser angefüllt ist, und werfe sie oberhalb der Seile in das Wasser. Dann bemerke man, vermittels eines Viertel-Secunden-Pendels, einer Taschenuhr oder eines andern passenden Instruments, wenn sie an das erste Seil kommt; auf gleiche Weise gebe man dann Acht, wann sie an das zweite Seil kommt. Auf diese Art erhält man die Geschwindigkeit der Oberfläche, die in der Praxis gewöhnlich für die des ganzen Flusses genommen wird. Nun muß der Durchschnitt des Flusses an dem zweiten Seile dadurch bestimmt werden, daß man, wie vorher, die verschiednen Tiefen nimmt. Ist dieser Durchschnitt eben so groß, wie der erste, so kann er als der mittlere Schnitt genommen werden; wenn nicht, so addire man beide zusammen, und halbire die Summe, um den mittleren Durchschnitt zu erhalten. Multiplicirt man dann den Flächenraum des mittleren Durchschnitts in Quadratfußen mit dem Abstande beider Seile von einander in Fußen, so erhält man den Rauminhalt des Wassers in Cubikfußen, das während der Beobachtungszeit von einem Seile zum andern fließt; und dies kann durch die Regeldetri auch für andere Zeittheile berechnet werden. Die Operation kann häufig dadurch sehr abgekürzt werden, daß man die Ankunft des schwimmenden Körpers auf zwei entgegengesetzten Standpuncten am Ufer beobachtet, vorzüglich wenn ein Seil nicht gut queerüber ausgespannt werden kann. Ein Brückenbogen ist für einen Versuch dieser Art ein guter Standort, weil er einen sehr regelmäßigen Schnitt und zwei feste Beobachtungsorte gewährt; in manchen Fällen kann die Belastung des Körpers vortheilhaft seyn, was man vorzüglich auf der See anwendet. Wo eine genaue Uhr nicht bei der Hand ist, kann ein Beobachter sich leicht nach den Regeln und der Tafel für Pendel in der Dynamik ein Viertel-Secunden- oder anderes Pendel verfertigen.

2. Hr. Pitot erfand einen Strommesser von einer einfachen Construction, durch den die Geschwindigkeit eines Theiles eines Stromes leicht gefunden werden konnte. Dieses Instrument besteht aus zwei langen Glasröhren, die an beiden Enden offen sind; eine von diesen Röhren ist durchaus cylindrisch; bei der andern ist das eine Ende in einem fast rechten Winkel gebogen, und wird nach und nach weiter wie ein

Trichter oder die Mündung einer Trompete; dieſe beiden Röhren ſind an einem dreieckigen hölzernen Prisma in Einkehlungen befeſtigt, ſo daß ihre unteren Enden beide in gleicher Höhe, die eine neben der anderen, und beide ziemlich gut vor Beſchädigung geſichert ſind. Die Einfaſſung, in der ſich die Röhren befinden, iſt ihnen dicht zur Seite in Zolle und Linien eingetheilt.

Um dieſes Inſtrument zu gebrauchen tauche man es ſo in das Waſſer, daß die Oeffnung des Trichters an dem unteren Theile der einen Röhre völlig der Richtung des Stromes entgegengeſetzt iſt, und das Waſſer frei durch den Trichter in der Röhre aufſteigt. Dann bemerke man, bis zu welcher Höhe ſich das Waſſer in jeder Röhre erhebt, und zeichne den Unterſchied derſelben auf; denn dieſer Unterſchied wird die Höhe ſeyn, die der Geſchwindigkeit des Stromes zukommt. Es leuchtet ein, daß das Waſſer in der cylindriſchen Röhre durch den hydroſtatiſchen Druck bis zur Oberfläche des Waſſers ſteigen wird, während das Waſſer, was von der Strömung durch den Trichter in die andere Röhre tritt, genöthigt wird, ſich um einen Raum, in dem es durch den Impuls der bewegten Flüſſigkeit erhalten wird, über dieſe Oberfläche zu erheben: das heißt, das Moment des Stromes wird mit einer Waſſerſäule im Gleichgewicht ſeyn, die in der einen Röhre über der Oberfläche der Waſſerſäule in der andern gehalten wird.

Schätzt man mit dieſem Inſtrumente die Geſchwindigkeit, ſo muß man eine durch Verſuche berichtigte Theorie anwenden. Iſt daher h die Höhe der von dem Strome getragenen Säule oder der Unterſchied der Höhen in beiden Röhren in Fußen, ſo erhält man $v = 6{,}5 \sqrt{h}$ mehr als die Geſchwindigkeit des Stromes in der Secunde; iſt h in Zollen, ſo iſt $v = 22{,}47 \sqrt{h}$ ziemlich nahe; fernere mit dieſem Inſtrumente angeſtellte Verſuche können dieſe Coefficienten ein wenig abändern.

Es wird leicht ſeyn, den Trichter in den ſchnellſten Theil des Stromes zu legen, indem man ihn ſo lange auf verſchiedne Stellen bringt, bis der Höhenunterſchied in beiden Röhren am größten iſt. In manchen Fällen wird es ſich ereignen, daß das Eintauchen des Inſtruments einen kleinen Wirbel in dem Waſſer erzeugt, der die Genauigkeit des Verſuches ſtört; allein dieſer Umſtand wird verbeſſert, wenn man das Inſtrument nur zwei Secunden eingetaucht läßt. Auch der Wind würde auf die Genauigkeit der Verſuche Einfluß haben; es iſt daher anzurathen, ſie dann anzuſtellen, wenn wenig oder gar kein Wind iſt. Mit dieſem Inſtrumente kann leicht eine große Anzahl genauer und nützlicher Verſuche angeſtellt werden; ſo kann die Geſchwindigkeit des Waſſers bei

verschiednen Tiefen in einem Canale oder Flusse und ein Mittel aus dem Ganzen mit genügender Genauigkeit gefunden werden; auch können die Versuche dazu dienen, die Theorie des Laufes des Wassers bei schwachem Abfalle zu verbessern. Auf gleiche Art können diese Beobachtungen gebraucht werden, um zu bestimmen, ob die Vergrößerungen der Geschwindigkeiten mit der Vermehrung des Wassers, das in demselben Canale läuft, im Verhältnisse stehen, oder welche andere Beziehungen zwischen ihnen statt finden u. s. w.

Wo man nicht große Genauigkeit fordert, wird die Röhre mit dem Trichter am Boden allein hinreichen, da die Oberfläche des Wassers mit ziemlicher Genauigkeit von dem Theile der prismatischen Einfassung der Röhre angezeigt wird, die durch Eintauchen befeuchtet worden ist; und die Geschwindigkeiten können den Höhen in der Röhre, die dieselben anzeigen, gegenüber angemerkt werden.

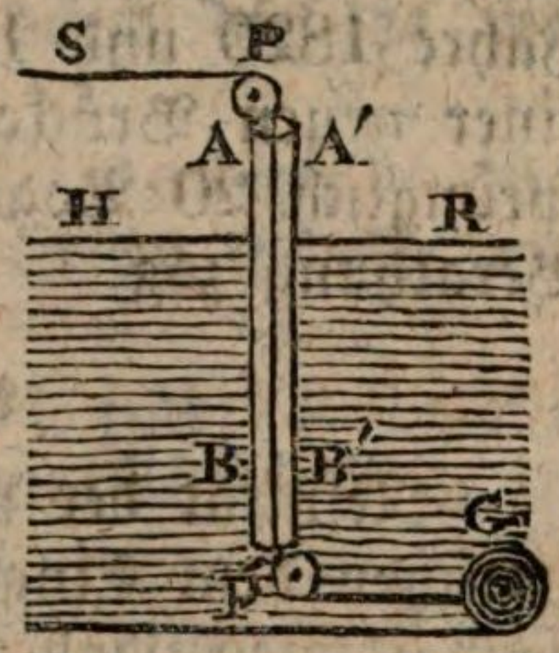
3. Eine andere gute und einfache Methode, die Geschwindigkeit des Wassers in einem Canale, Flusse u. s. w. zu messen, ist die, die der Abt Mann in seiner Abhandlung über Flüsse beschreibt; sie ist folgende. Man nehme ein cylindrisches Stück trockenes leichtes Holz, das nicht ganz so lang als das Wasser im Flusse tief ist; ungefähr an dem einen Ende desselben hänge man so viel kleine Gewichte auf, daß der Cylinder in einer verticalen Lage mit seinem oberen Theile gerade über dem Wasser gehalten wird. Im Mittelpuncte der obern Fläche befestige man einen kleinen geraden Stab, genau in der Richtung der Axe, damit, wenn das Instrument in das Wasser gehangen ist, die Abweichungen des Stabes von der senkrechten Stellung gegen die Oberfläche anzeigen können, welches Ende des Cylinders voran geht, wodurch die verschiednen Geschwindigkeiten des Wassers bei verschiednen Tiefen entdeckt werden können; denn neigt sich der Stab vorwärts, nach der Richtung der Strömung, so ist dies ein Beweis, daß die Ober-Fläche des Wassers die größte Geschwindigkeit hat; neigt er sich aber rückwärts, so zeigt dies, daß die stärkste Strömung am Boden ist, und bleibt er senkrecht, so ist dies ein Zeichen, daß die Geschwindigkeiten an der Oberfläche und am Boden gleich sind.

Hat man dieses Instrument in die Strömung eines Flusses gelegt, so empfängt es alle Stöße des Wassers in der ganzen Tiefe und wird eine eben so große Geschwindigkeit, als der Fluß von oben bis unten an der Stelle hat, wo es hineingelegt ist, erhalten; auf diese Art kann genau und leicht die mittlere Geschwindigkeit eines Theiles des Flusses für jede bestimmte Entfernung und Zeit gefunden werden.

Um aber die mittlere Geschwindigkeit des ganzen Schnittes des Flusses zu erhalten, so muß das Instrument nach und nach in der Mitte und an den Seiten hineingelegt werden, weil die Geschwindigkeiten an diesen Stellen oft sehr von einander verschieden sind. Hat man auf diese Art aus den Räumen, die in bestimmten Zeiten durchlaufen sind, die verschiednen Geschwindigkeiten gefunden, so wird das arithmetische Mittel aller dieser Versuche die mittlere Geschwindigkeit des Canals oder Flusses geben; und wird diese mittlere Geschwindigkeit in den Flächeninhalt des Queerschnitts des Wassers an einer Stelle multiplicirt, so giebt das Product die Quantität, die durch diese Stelle in einer Secunde läuft.

Der Cylinder kann leicht an die Stelle deren Geschwindigkeit man zu messen verlangt, gebracht werden vermittels Faden oder schwacher Seile, die zwei Personen, jede an einer Seite des Canals oder Flusses, halten und richten, indem sie zu gleicher Zeit dafür Sorge tragen, die Bewegung des Instrumentes weder zu hemmen noch zu beschleunigen.

4. Es sey AA′ BB′ ein hohler Cylinder, an beiden Enden offen, und so eingerichtet, daß er an der Seite des Ufers oder eines Kahnes befestigt werden kann, so daß sein unteres Ende BB′ sich in einiger Tiefe unter HR, der Oberfläche des Stromes, befindet; P, P′ seyen Rollen, die an entgegengesetzten Seiten des oberen und unteren Theiles der Röhre befestigt sind. An G, einer Kugel, von fast demselben specifischen Gewichte als das Wasser, werde eine Schnure GP′ PS befestigt, die frei über die Rollen P′, P geht und hinreichende Länge hat, um eine Bewegung bis zu einer gehörigen Entfernung zu gestatten. Wird dann der Boden der Röhre bis zu einer verlangten Tiefe eingetaucht, so werde die Kugel G der freien Wirkung des Stromes ausgesetzt, und da sie mit ihm fortgeführt wird, so wird sie in 1, 2, 5 oder 10 Secunden oder einem anderen Zeitintervalle von einem festen Puncte wie S einen Theil des Seiles wegziehn; hieraus und aus der verflossenen Zeit wird die Geschwindigkeit der bestimmten Tiefe gefunden.



Saumarez erfand im Jahre 1720 ein Instrument, das er Marine Surveyor nannte, mit dem er den Weg eines Schiffes maß, und die Geschwindigkeiten der Strömungen bestimmte. Es ist in dem 33sten Bande der Philos. Trans. beschrieben, und in dem folgenden Bande ein merkwürdiges Beispiel seines Gebrauchs in Tafeln gegeben, die die Stärke und das allmählige Zu- und Abnehmen der Ebbe und Fluth

auf der Themse, wie es in Lambeth Reach beobachtet wurde, anzeigen. Sie sind zu weitläuftig, um hier eingerückt zu werden, sind aber sehr interessant und können in den Philos. Trans. Abridged, Band 7, Seite 133 nachgesehen werden.

4. Abschnitt. Wirkungen der Londoner Brücke bei Fluthen u. s. w.

In dem ersten Bande von Dr. Hutton's Abhandlungen in 8. sind einige merkwürdige Aufsätze von Herrn Robertson und anderen über die Londoner Brücke und die wahrscheinlichen Folgen auf Fluthen durch Errichtung einer neuen Brücke über die Themse, nämlich der Blackfriar's-Brücke, eingerückt. Solche Documente sind nicht nur als Materialien zur Geschichte der Wissenschaften interessant, sondern gewinnen sogar im Laufe der Zeit an Werth, da die Vergleichung von wirklichen Ereignissen mit theoretischen Vorhersagungen zur Berichtigung der Theorie selbst dient. Aus ähnlichen Gründen führe ich hier abgekürzte Berichte über einige schätzbare Thatsachen in Rücksicht auf die Bewegung und die Höhe der Fluthen in der Themse bei London auf, die im Jahre 1820 und 1821 gesammelt wurden, wo man den Plan einer neuen Brücke von 5 Bogen anstatt der alten mit ursprünglich 20 Bogen und sehr beengtem Wasserdurchgange in Berathung zog.

Londoner Brücke.

Resultat der vom 23. September bis 25. October 1820 zwischen dem Eingange zu den Docks und der Westminster-Brücke beobachteten Höhen. Ferner die Querdurchschnitte der Themse bei der Londoner, der Southwark-, der Blackfriar's-, der Waterloo- und der Westminster Brücke, aus vier Zeichnungen von Beobachtungen gesammelt, die von Hrn. Franz Giles, unter Leitung des Hrn. James Montague, auf Befehl der Select Committee of Bridge House Lands vom 8ten September 1820 angestellt wurden.

Londoner Docks bis zur Londoner Brücke.

Das hohe Wasser bei der Spring-Fluth bei dem Eingange zu den Londoner Docks erreichte eine um 1,5 Zoll im Durchschnitte größere Höhe und 10 Minuten früher, als an der unteren Seite der Londoner Brücke.

Das niedrige Wasser ebenderselben erreichte bei den ersteren im Durchschnitt eine 3 Zoll geringere Höhe und 9 Minuten früher als bei der letzteren.

Das hohe Wasser der tauben Fluth erreichte bei der ersteren im Durchschnitt eine um einen Zoll größere Höhe und 8 Minuten früher, als bei der letzteren.

Das niedrige Wasser ebenderselben erreichte bei der ersteren eine um zwei Zoll geringere Höhe und 14 Minuten früher als bei der letzteren.

Londoner Brücke.

Das hohe Wasser der höchsten Spring-Fluth kommt um 3 oder 4 Uhr. Das hohe Wasser der tiefsten tauben Fluth findet um 8 oder 9 Uhr statt.

Die Spring-Fluth fluthet 4 oder 5 Stunden und ebbet 7 bis 8½ Stunden. Die taube Fluth ström 5 bis 5½ Stunden, das Fallen bis zur Ebbe dauert 6½ bis 8 Stunden.

Das hohe Wasser der Spring-Fluth erzeugt im Durchschnitt einen Fall durch die Londoner Brücke von 8 Zollen, der größte Fall aber bei hohem Wasser war 1 Fuß 1 Zoll. — Am 24. October.

Der niedrige Wasserstand derselben durch ebendieselbe erzeugt 4 Fuß 4 Zoll, aber der größte Fall bei niedrigem Wasser war 5 Fuß 7 Zoll. — Am 27. September.

Das hohe Wasser der tauben Fluth durch dieselbe war 5 Zoll.

Das niedrige Wasser derselben durch ebendieselbe war 2 Fuß 1 Zoll, aber der geringste Fall bei tiefem Wasser war 1 Fuß 1 Zoll. — Am 16. October.

Die Strömung der Spring-Fluth am 21. und 23. October machte das Wasser, das durch die Brücke lief, ungefähr 40 Minuten nach dem niedrigen Wasser unter der Brücke träge; nach dieser Zeitwuchs die Höhe (unter der Brücke) allmählig auf 1 Fuß 10 Zoll bei halber Fluth, und fiel dann ungefähr bis auf 8 Zolle bei hohem Wasser. — Die erste Strömung begann jedoch oberhalb der Brücke ungefähr 20 Minuten nach der Zeit des niedrigen Wasserstandes unterhalb der Brücke, obgleich das Wasser dann oberhalb der Brücke ungefähr 2 Fuß 6 Zoll höher stand als unterhalb derselben; die Zeit des niedrigen Wasserstandes unterhalb der Brücke war 10 Minuten eher als oberhalb derselben.

Die Ebbe bewirkte ungefähr 30 Minuten nach dem hohen Wasserstande, daß das Wasser bei der Brücke träge ging und stufenweise bis zum größten Fall bei niedrigem Wasser sank. — Die Zeit des hohen Wasserstandes am 21. und 23. October war oberhalb und unterhalb der Brücke dieselbe; aber die Zeit der hohen Wasserfluth ist im Durchschnitt 9 Minuten früher unterhalb als oberhalb der Brücke.

Die taube Fluth am 30. October machte ungefähr zwei Stunden nach dem niedrigen Wasserstande unterhalb der Brücke (wobei der Fluß zugleich etwas angeschwollen war) das Wasser unter der Brücke träge; nach dieser Zeit wuchs der Wasserstand (unterhalb der Brücke) allmählig bis auf 1 Fuß 3 Zoll bis zu $\frac{2}{3}$ der Fluth, und dann sank er regelmäßig bis auf 4 Zolle bis zum hohen Wasserstande. — Die erste Fluth fing jedoch oberhalb der Brücke ungefähr eine Stunde nach der Zeit des tiefen Wasserstandes unterhalb der Brücke an, obgleich dann das Wasser oberhalb der Brücke 1 Fuß höher als unterhalb war; aber die Zeit des tiefen Wasserstandes unterhalb der Brücke ist im Durchschnitt 32 Minuten früher, als oberhalb derselben.

Die Ebbe erzeugte träges Wasser bei der Brücke ungefähr 15 Minuten nach hohem Wasser oberhalb der Brücke, und dann sank es bis zu seinem größten Falle bei niedrigem Wasser herab. — Die Zeit des hohen Wasserstandes am 30. October war 15 Minuten früher unterhalb als oberhalb der Brücke, und die Durchschnittszeit des hohen Wassers der abnehmenden Fluth ist 15 Minuten früher unterhalb als oberhalb der Brücke.

Londoner bis zur Westminster-Brücke.

Die Linie des hohen Wasserstandes von der oberen Seite der Londoner bis zur Westminster-Brücke ist gewöhnlich im gleichen Niveau, wenn nicht Wind und Ueberschwemmungen Einfluß darauf äußern.

Die Zeit des hohen Wasserstandes ist zehn Minuten zeitiger bei der Londoner als der Westminster Brücke.

	Zoll.		Min.	
Die Linie des mittleren niedrigen Wasserstandes hat einen Fall von	4, 0	von der Westminster- bis Waterloo-Brücke, Zeit	7	später bei der Westminster- als bei der Waterloo-Brücke.
Desgleichen	4, 3	von der Waterloo- bis Blackfriar's-Brücke	6	Desgleichen.
Desgleichen	3, 2	von der Blackfriar's- bis Southwark-Brücke	5	Desgleichen.
Desgleichen	0, 5	von der Southwark- bis Londoner Brücke	4	Desgleichen.
Summe 1 Fuß.			22	

Flächenräume der Queerdurchschnitte in der Themse bei der Londoner Brücke.

		Fuß.	Abzug für Wasserwerke. Fuß.	Fuß.
Bei einem außerordentlich hohen Wasser von 2 Fußen, über dem Zeichen des hohen Wasserstandes der Fluth, bei dem Eremitagen-Eingang in die Londoner Docks, wie es von der Corporation des Dreieinigkeits-Hauses im Jahre 1800 eingerichtet wurde.		8130	1000	7130
Bei dem Trinitäts-Hochwasser-Zeichen oder dem Datum		7360		
	Unter dem Datum. Fuß. Zoll.			
Hohes Wasser bei mittlerer Springfluth	unterhalb der Brücke oder Höhe von 0 6,5	7122	850	6272
Desgleichen	oberhalb der Brücke oder Höhe von 1 2,0	6837	810	6027
Hohes Wasser bei mittlerer tauber Fluth	oberhalb der Brücke oder Höhe von 4 3,0	5293	600	4693
Niedriges Wasser bei mittlerer und tauber Springfluth	oberhalb der Brücke oder Höhe von 14 5,0	1408		1488
Niedriges Wasser bei mittlerer tauber Fluth	unterhalb der Brücke oder Höhe von 16 5,0	1030		1030
Niedriges Wasser bei mittlerer Springfluth	unterhalb der Brücke oder Höhe von 18 9,0	540		1540

Bei den Southwark-, Blackfriar's-, Waterloo- und Westminster-Brücken.

	Southwark-Brücke.	Blackfriar's-Brücke.	Waterloo-Brücke.	Westminster-Brücke.
Bei dem oberen Wasserspiegel und außerordentlich hohem Wasser.	15260	15460	19822	16750
Bei dem Trinitäts-Hoch-Wasser-Zeichen oder Datum	13940	14117	17707	15198
Hohes Wasser bei der mittleren Springfluth oder Höhe von 1 Fuß 2 Zoll unter dem Datum	13170	12975	16447	14015
Hohes Wasser der mittleren tauben Fluth oder Höhe von 4 Fuß 3 Zoll unter dem Datum	11135	10590	13116	11380
Niedriges Wasser der mittleren Spring- und tauben Fluth	5012	3724	3382	3720

London, den 12. März 1821. (In einem Briefe an G. H. Sumner, von einem wissenschaftlichen Architekten mitgetheilt.)

Stufenweise Ab- und Zunahme der Ebbe und Fluth bei der Londoner Brücke, oberhalb und unterhalb am 29. Juli 1821, als am Tage des Neumondes genommen.

Oberhalb der Brücke.

Niedriges Wasser bei der Pepper-Allee, 50 Minuten nach 9 Uhr des Morgens.

Fluth.

	Fuß.	Zoll.
Tiefe des Wassers beim Anfange der Fluth	6	0
1ste Stunde Steigen . . .	2	11
2te Stunde	3	0
3te Stunde	2	10
4te Stunde	2	8
45 Minuten	1	0
4 Stunden und 45 Min. .	18	5

Hohes Wasser bei der Pepper-Allee, 35 Minuten nach 2 Uhr Nachmittags.

Ebbe.

	Fuß.	Zoll.
1ste Stunde Fall	2	1
2te Stunde	2	7
3te Stunde	2	0
4te Stunde	1	9
5te Stunde	1	5
6te Stunde	1	2
7te Stunde	1	0
55 Minuten	0	11
Tiefe bei niedrigem Wasser	5	6
7 Stunden und 55 Min. .	18	5

Unterhalb der Brücke.

Niedriges Wasser bei Cores's Kai, 30 Minuten nach 9 Uhr des Morgens.

Fluth.

	Fuß.	Zoll.
Tiefe des Wassers beim Anfang der Fluth	1	3
1ste Stunde Steigen . . .	5	9
2te Stunde	5	4
3te Stunde	2	9
4te Stunde	2	5
48 Minuten	1	4
4 Stunden und 48 Min. .	18	10

Hohes Wasser bei Cores's Kai, 18 Minuten nach 2 Uhr Nachmittags.

Ebbe.

	Fuß.	Zoll.
1ste Stunde Fall	2	1
2te Stunde	4	4
3te Stunde	3	1
4te Stunde	2	7
5te Stunde	2	3
6te Stunde	1	9
7te Stunde	1	6
59 Minuten	0	11
Noch übrige Tiefe . . .	0	4
7 Stunden und 59 Min. .	10	10

* * * Diese Tafeln sollten zeigen, daß die alte Brücke das Wasser oberhalb der Brücke zurückhält, und so die Schifffahrt den Fluß hinauf befördert.

Unterschied zwischen den Höhen des hohen und niedrigen Wassers bei Spring-Fluthen zwischen Rotherhithe und Battersea im Jahre 1820.

	Fuß.	Zoll.
Rotherhithe, alte Roß-Fähre . . .	21	10
Alte Londoner Brücke	18	2
Blackfriar's = = ...	14	9
Westminster = ...	12	6
Vaurhall = ...	12	2
Battersea = ...	11	6

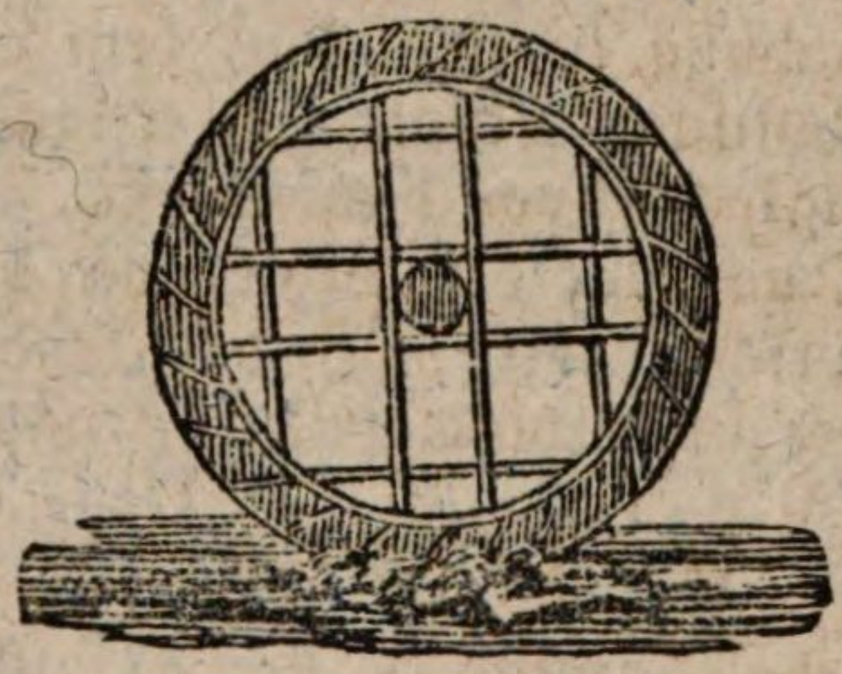
Von der Battersea-Brücke bis zur Londoner 5 Meilen; von der Londoner bis zur alten Roß-Fähre $1\frac{1}{4}$ Meile. Von der Londoner Brücke bis zur Nore 44 Meilen (englisch).

5. Abschnitt. Wassermühlen.

1. Der Impuls eines laufenden Wassers, und bisweilen Gewicht und Impuls zusammen dienen Mühlen zu treiben, um Getreide zu mahlen oder andere Zwecke zu verrichten. Bisweilen wird der Impuls schief gegen Wasserschaufeln so geleitet, wie man es leicht aus einem Dampfgetriebe (?smoke-jack) ersehen wird. In diesem steigt der Dampf auf, trifft schief gegen die Flügel, und theilt denselben eine Drehungsbewegung mit. Man denke sich den ganzen Mechanismus umgedreht, so, daß Wasser auf die Flügel fällt, so wird dann offenbar Drehung erzeugt werden; und zwar in Verhältniß zu der Quantität Wasser und der Höhe, von der es fällt, mit größerer oder geringerer Energie.

Auf diese Art werden in Deutschland und einigen andern Theilen des Continents in Europa Mühlen in Bewegung gesetzt. Auch habe ich Mühlen von derselben Construction auf Balta, der nördlichsten shetländischen Insel gesehen. Wo man sie aber findet, zeigen sie eine sehr unvollkommene Kenntniß von der praktischen Mechanik an, da sie mit einem bedeutenden Kraftverlust verbunden sind.

2. Das Wasser setzt gewöhnlich Mühlen vermittels sogenannter unterschlächtiger Räder in Bewegung. Diese haben eine Anzahl Ebenen, die auf ihren Umkreisen, fast in der Richtung ihrer Halbmesser vertheilt sind; diese sogenannten Wasserschaufeln tauchen in den Strom, und werden von ihm herumgeführt, wie es die Figur zeigt. Die Axe des Rades treibt dann vermittels der nöthigen Räder und Getriebe die zu bewegende Maschinerie. Wo der Strom breit und uneingezwängt ist, ist der Druck auf jede Wasserschaufel der der relativen Geschwindigkeit (oder der Differenz zwischen den Geschwindigkeiten des Stromes und der Schaufel) zugehörigen Höhe entsprechend. Dieser Druck hat daher einen größten Werth, wenn das Rad in Ruhe ist; aber die erzeugte Wirkung ist dann Null; dagegen ist der Druck Null, wenn die Geschwindigkeit des Rades der Geschwindigkeit des Stromes gleich ist. Es giebt folglich eine dazwischenliegende Geschwindigkeit, bei der die vollzogene Wirkung einen größten Werth hat.



Das dem Drucke gleiche Gewicht ist $Q (\sqrt{H} - \sqrt{h})^2$, wo Q die in einer Minute verlaufende Wassermasse, H die

der Geschwindigkeit des Wassers V zugehörige Höhe, und h die der Geschwindigkeit der Schaufel U zugehörige Höhe ist. Betrachtet man diesen Druck als eine an das Rad angebrachte Masse, so erhält man ihre Bewegungskraft, indem man sie mit U multiplicirt; und da sich $\sqrt{H} - \sqrt{h}$ wie $V - U$ verändert, so verändert sich diese Bewegungskraft wie $(V - U)^2 U$, welches seinen größten Werth erhält, wenn $U = \frac{1}{3} V$ ist. In diesem Falle bewegt sich dann der Rand des Rades mit $\frac{1}{3}$ der Geschwindigkeit des Stromes, und die Wirkung, die sie erzeugt, ist

$$Q \times (\tfrac{2}{3} V)^2 \times \tfrac{1}{3} V = \tfrac{4}{27} Q V^3$$

so daß das unterschlächtige Rad nach der gewöhnlichen Theorie eine Wirkung $= \frac{4}{27}$ der bewegenden Kraft erzeugt.

Reibung und Widerstand der Flüssigkeiten ändern diese Resultate ab; aber Smeaton und andere haben gefunden, daß man immer die größte Wirkung erhält, wenn U zwischen $\frac{1}{2} V$ und $\frac{1}{3} V$ ist.

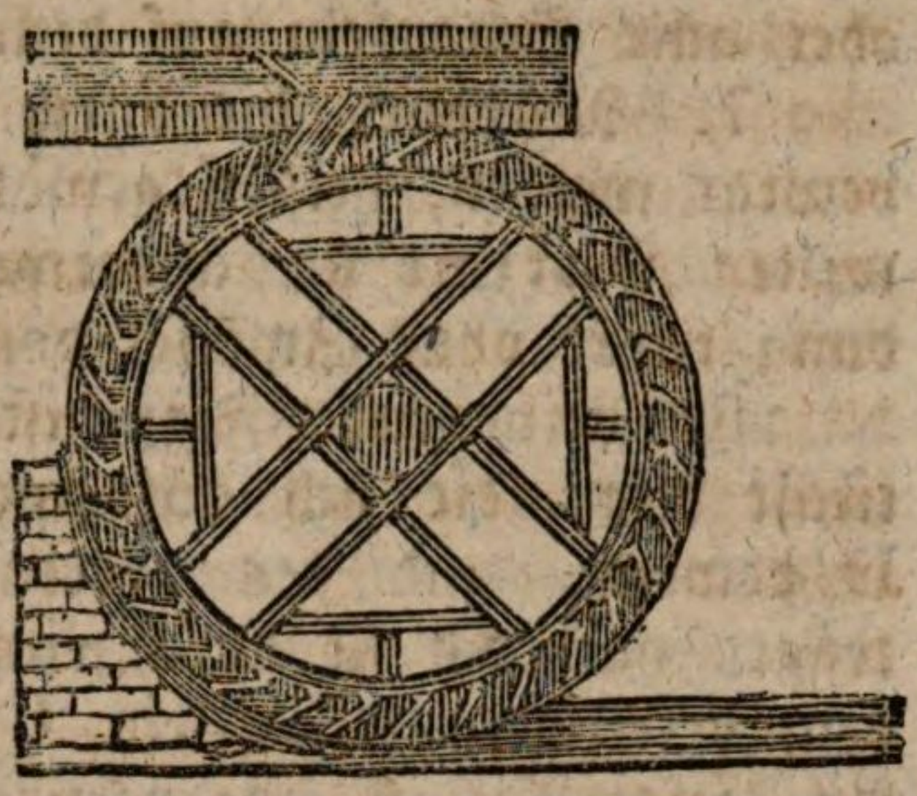
3. Werden die Schaufeln nicht gänzlich eingetaucht, so wird das Wasser auf ihnen angehäuft, nnd in diesem Falle ist der Druck der zu 2 H gehörige.

4. Wenn die Schaufeln sich in einem kreisförmigen Gehäuse bewegen oder im Allgemeinen der Strom nicht vorbei gehen kann, ohne dieselbe Geschwindigkeit, die das Rad besitzt, zu erlangen, so werden die Umstände, mit denen es die Untersuchung zu thun hat, dem analog, was bei der Reibung nichtelastischer Körper sich ereignet. Der Strom hat die Geschwindigkeit v vor dem Stoße, die sich auf U reducirt, und die Quantität der Bewegung die der Differenz oder $V - U$ entspricht, wird auf das Rad übergetragen; dies dreht sich mit der Geschwindigkeit U; und daher ist die Wirkung des Rades $\left(\frac{V - U}{V}\right) U$ oder $\frac{VU - U^2}{V}$; welches seinen größten Werth erhält, wenn $V = 2U$ ist; wo sie $\frac{1}{4}$ der bewegenden Kraft wird.

Hieraus erhellt welcher Vortheil es ist, das Wasser sich in einem engen Canale bewegen zu lassen.

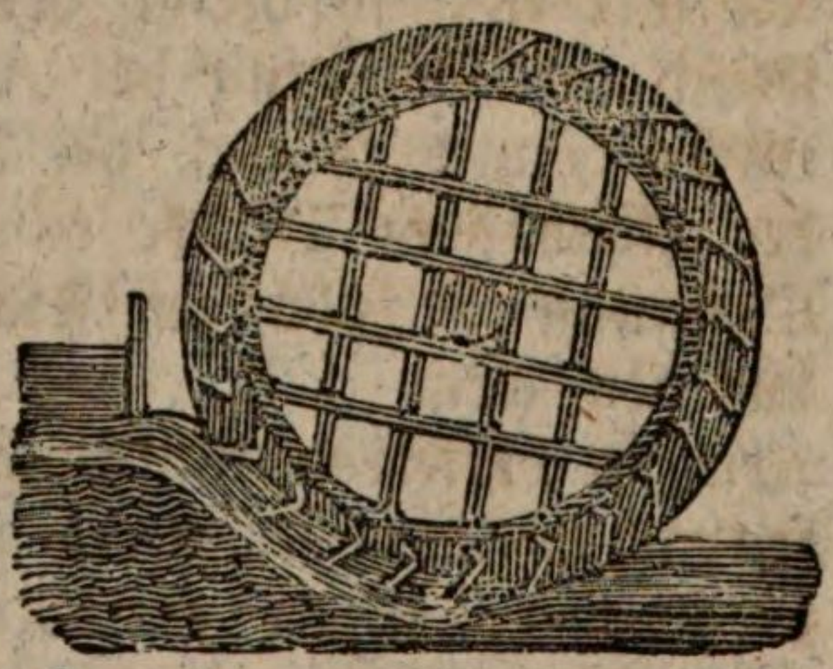
5. Das unterschlächtige Rad wird da gebraucht, wo man bei einem mäßigem Falle eine große Quantität Wasser erhalten kann. Wo aber der Fall beträchtlich ist, wird das oberschlächtige Rad fast immer angewendet. Sein Umkreis ist mit winkelförmigen Schöpfeimern besetzt, in die das Wasser entweder am obersten Puncte oder innerhalb des Bogens von 60° von da aus gegossen wird; $52\frac{3}{4}°$ ist der vortheilhaf-

teste Abstand. In diesem Falle, wenn r = dem vollen Halbmesser des Rades, H die ganze und h die wirksame Fallhöhe bezeichnet, ist $h = r\,(1 + \sin 37\frac{1}{2}^{o}) = 1{,}605\ r$ und $r = 0{,}623\ h$. Wenn die Reibung ungefähr $\frac{2}{3}$ der bewegenden Kraft ist, so wird v, die Geschwindigkeit des Umkreises des Rades, um eine größte Wirkung zu erzeugen, seyn $= 2{,}67\sqrt{H}$. Hier wird auch ein Fall von $\frac{1}{9}$ H dem Wasser seine gehörige Geschwindigkeit ertheilen, und $122{,}176\ s\ H^{\frac{3}{2}}$ Pfd. ist gleich der mechanischen Wirkung, wo s der Abschnitt des Stromes in Fußen ist, der die Schöpfeimer anfüllt.



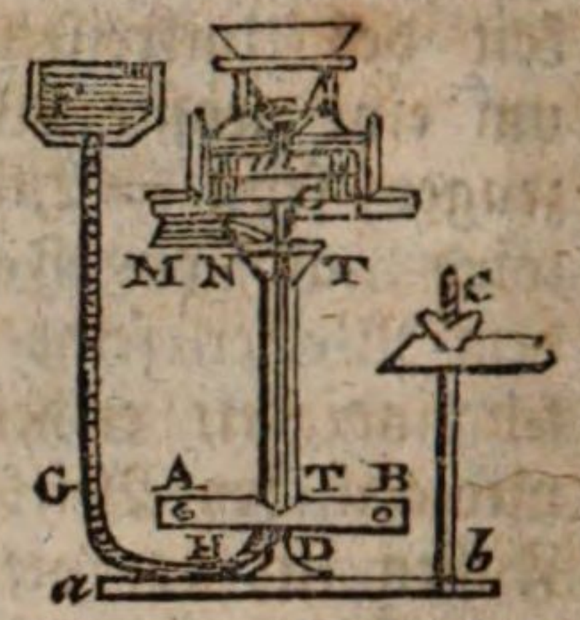
Hrn. Smeaton führten Versuche zu dem Schluß, daß unterschlächtige Räder am meisten wirken, wenn ihre Umkreise drei Fuß in einer Secunde sich bewegen, und daß, wenn sie sich langsamer bewegen, sie in ihrer Bewegung unstetig und unregelmäßig werden. Diese Bestimmung ist jedoch nur in gewissem Umfange zu verstehen. Er erwähnt ein Rad von 24 Fuß Durchmesser, das beinahe seine volle Wirkung hervorzubringen scheint, obgleich der Umkreis sich 6 Fuß in der Secunde bewegt; und ein anderes von 33 Fuß Durchmesser, dessen Umkreis nur eine Geschwindigkeit von 2 Fußen in einer Secunde ohne beträchtlichen Verlust an Kraft hat. Das erste Rad dreht sich in 12,6 Sec., das letzte in 51,9 Sec. herum.

6. Wo für ein unterschlächtiges Rad der Fall zu klein ist, ist es vorzüglicher, ein Brustrad (breast wheel) zu nehmen, (wie es die beiliegende Figur angiebt,) welches folgende Eigenschaften besitzt: seine Schaufeln bilden einen Winkel, so daß sie Schöpfeimern ähnlich sind; das Wasser ist in ihrer Nähe bedeutend eingeengt vermittels eines gebogenen Canals, der ziemlich dicht schließt, ohne jedoch unnöthige Reibung zu erzeugen. Gestatten aber die Umstände kein Brustrad, so muß man zu dem unterschlächtigen seine Zuflucht nehmen. Für solch ein Rad ist es am besten, wenn die Schaufeln so gestellt werden, daß sie auf der Oberfläche des Wassers dann, wenn sie sich aus demselben erheben, senkrecht sind; daß nur die Hälfte von jedem immer



unter der Oberfläche, und daß 3 bis 5 zugleich eingetaucht sind. Der Abt Mann schlug vor, daß nicht mehr als sechs oder acht Schaufeln auf dem ganzen Umkreise seyn sollten.

7. Mühlen, die durch die Rückwirkung des Wassers bewegt werden, heißen gewöhnlich Barker's Mühlen; bisweilen Parent's; anderwärts Segner's. Aber die Erfindung rührt ohne Zweifel vom Dr. Barker her.



In beiliegender Figur ist CD eine verticale Axe, die sich auf einem Zapfen bei D bewegt, und den oberen Mühlstein m trägt, nachdem sie durch eine Oeffnung in dem befestigten Mühlstein C gegangen ist. An dieser Axe ist eine verticale Röhre TT befestigt, die mit einer Horizontal-Röhre in Verbindung steht, an deren Enden zwei Oeffnungen AB in entgegengesetzten Richtungen sind. Wenn Wasser aus dem Mühlstrome MN in die Röhre TT geführt wird, so fließt es aus den Oeffnungen A und B heraus, und durch die Gegenwirkung oder den Gegendruck des nachfolgenden Wassers wird der Arm AB und folglich die ganze Maschine in Bewegung gesetzt. Der Queerbalken a b kann durch Drehung der Schraubenmutter c am Ende des Hebels c b höher oder tiefer gestellt werden.

Um einzusehen, wie diese Bewegung erzeugt wird, denke man sich beide Oeffnungen verschlossen, und die Röhre TT bis T mit Wasser angefüllt. Die verschlossenen Oeffnungen A, B werden durch eine dem Gewichte einer Wassersäule, deren Höhe TT und deren Flächenraum der Flächenraum der Oeffnungen ist, gleiche Kraft gedrückt. Jeder Theil der Röhre trägt einen ähnlichen Druck; da aber diese Druckkräfte durch gleiche und entgegengesetzte Druckkräfte im Gleichgewicht erhalten werden, so bleibt der Arm AB in Ruhe. Oeffnet man jedoch die Oeffnung bei A, so wird der Druck auf dieser Stelle entfernt, und folglich der Arm durch einen Druck herumgeführt, der gleich dem Drucke einer Säule TT ist, die auf einen der Oeffnung A gleichen Flächenraum wirkt. Dasselbe geschieht auf den Arm TB; und diese beiden Druckkräfte ziehen den Arm in derselben Richtung herum. Diese Maschine kann offenbar angewendet werden, um irgend eine Art Maschinerie zu treiben, wenn ein Rad auf die verticale Axe CD befestigt wird.

8. Rumsey, ein Amerikaner, und Segner verbesserten diese Maschine, indem sie das Wasser aus dem Behälter nicht durch eine Röhre leiteten, in der sich größtentheils die

Spindel dreht, sondern durch eine Röhre, die aus einem Behälter wie F unter den Armen von AB weggeht, dann in einem krummen Halse aufwärts steigt, und, wie es die Figur zeigt, sich an der unteren Seite der Arme endet. Dies vermindert die Reibung sehr.

9. Professor Playfair hat richtig bemerkt, daß die bewegende Kraft größer wird, wenn die Maschine in Gang gekommen ist; denn das Wasser in den horizontalen Armen erreicht eine Centrifugalkraft, wodurch sein Druck gegen die Seiten vergrößert wird. Wenn die Maschine mit größtem Vortheile wirkt, so sollte sich der Mittelpunct der Oeffnungen mit der Geschwindigkeit $\frac{r}{r'}\sqrt{hg}$ bewegen, wo r der Halbmesser des horizontalen Armes, von der Bewegungsaxe nach dem Mittelpuncte der Oeffnung gemessen, und r′ der Halbmesser der senkrechten Röhre ist; g bedeutet die Schwerkraft oder $32\frac{1}{6}$ Fuß.

Da $2\pi r$ der von jedem Mittelpuncte der Oeffnung beschriebene Umkreis ist, so ist $\frac{2\pi r'}{\sqrt{hg}}$ die Zeit einer Umdrehung in Secunden.

Die Größe $\frac{r}{r'}\sqrt{hg}$ drückt auch die Geschwindigkeit des fließenden Wassers aus; wenn daher die Maschine mit größtem Vortheil wirkt, so ist die Geschwindigkeit, mit der das Wasser kommt, gleich der, mit welcher es horizontal in einer entgegengesetzten Richtung geführt wird; so daß es bei dem Heraustreten senkrecht herabfällt.

10. Folgende Dimensionen sind mit Erfolg angewandt worden: Der Halbmesser der Arme von dem Mittelpuncte des Zapfens bis zu dem Mittelpuncte der Entleerungslöcher, 46 Zoll; innerer Durchmesser der Arme, 3 Zoll; Durchmesser der Füllungsröhre, 2 Zoll; Höhe des wirkenden Wasserstandes, 21 Fuß über den Entleerungspuncten. War die Maschine nicht belastet, und hatte nur eine ungeschlossene Oeffnung, so machte sie in einer Minute 115 Umdrehungen. Dies stimmt mit einer Geschwindigkeit von 46 Fuß in einer Secunde für die Oeffnung überein, und sie ist zwischen 9 und 10 Fuß größer, als die volle Geschwindigkeit, die dem obersten Theile des Wassers zukommt; der Unterschied hängt von der Wirkung der Centrifugalkraft ab.

Die Theorie dieser Maschine ist noch unvollkommen, aber man kann da nicht an ihrem Nutzen zweifeln, wo der Strom klein ist und beträchtlichen Fall hat.

XIII. Kapitel.

Pneumatik.

1. Abschnitt. Gleichgewicht der Luft und elastischer Flüssigkeiten.

1. Die Fundamentalsätze der Hydrostatik sind den zusammendrückbaren und den unzusammendrückbaren Flüssigkeiten gemein; daher brauchen sie hier nicht wiederholt zu werden.

2. Die atmosphärische Luft ist unter den elastischen Flüssigkeiten am besten bekannt, und ist als eine elastische Flüssigkeit erklärt worden, welche Gewicht hat, und der Zusammendrückung mit einer Kraft widersteht, die sich direct wie ihre Dichtigkeit verhält, oder umgekehrt wie die Räume, in denen dieselbe Quantität Luft enthalten ist.

Die Richtigkeit dieser Erklärung haben Versuche bestätigt.

Die Schwere der Luft ist aus dem Torricelli'schen Versuche oder dem Barometer bekannt. Die Luft drückt auf die Oeffnung der gebogenen Röhre mit einer Kraft, die gerade dem Gewichte der in ihr getragenen Queckſilbersäule gleich ist.

Eine Flasche, die mit Luft gefüllt gewogen wird, wird schwerer gefunden, als wenn die Luft daraus entfernt ist. Der Druck der Atmosphäre ist im Mittel ungefähr 14 Pfd. auf jeden Quadratzoll der Erdoberfläche; daher ist der ganze Druck auf die convexe Oberfläche der Erde = 1 Trillion und 68600 Billionen Pfund.

Man kann die elastische Kraft der Luft zeigen, wenn man nur ein mit Luft gefülltes Gefäß umgekehrt in das Wasser taucht; der Widerstand, den sie dem weiteren Eintauchen entgegensetzt, und die Höhe, bis zu welcher das Wasser darin steigt, im Verhältnisse zur größeren Eintauchung, sind Beweise der Elasticität der darin enthaltenen Luft.

Wird Luft in eine gekrümmte Röhre eingeschlossen, und mit verschiednen Queckſilbergewichten belastet, so verhalten sich die Räume, in die sie zusammengedrückt wird, umgekehrt wie diese Gewichte. Diese Gewichte aber sind die Maße der Elasticität; daher verhalten sich die Elasticitäten wie die Räume, die die Luft einnimmt.

Die Dichtigkeiten verhalten sich ebenfalls wie diese Räume; daher verhält sich die Elasticität der Luft direct wie ihre Dichtigkeit. Dies Gesetz wurde zuerst durch Mariotte's Versuche dargethan.

Bei allen diesen Sätzen setzt man die Temperatur als un-

verändert voraus. Diese Eigenschaften scheinen allen elastischen Flüssigkeiten gemein zu seyn.

Die Luft widersteht in allen Richtungen der Zusammendrückung gleichmäßig. Es kann keine Grenze angegeben werden für den Raum, den eine gegebene Quantität Luft einnehmen würde, wenn aller Druck entfernt wäre.

2. Steigt man von der Oberfläche der Erde auf, so vermindert sich nothwendig die Dichtigkeit der Luft; denn jede Luftschicht wird nur durch das Gewicht der darüber liegenden gedrückt; die oberen Schichten werden daher weniger gedrückt, und sind folglich weniger dicht, als die unter ihnen.

3. Denkt man sich dieselbe Temperatur in der Atmosphäre verbreitet, so werden, wenn die Höhen von der Oberfläche der Erde an in arithmetischer Progression steigend genommen werden, die Dichtigkeiten der Luftschichten in geometrischer Progression abnehmen. Da sich nun die Dichtigkeiten auch wie die zusammendrückenden Kräfte verhalten, das heißt, wie die Quecksilbersäulen in dem Barometer, so werden, wenn man die Höhen von der Oberfläche an in arithmetischer Progression nimmt, die Quecksilbersäulen in dem Barometer bei diesen Höhen in geometrischer Progression abnehmen.

Da die Logarithmen in Rücksicht auf die Zahlen, die sie darstellen, dieselbe Eigenschaft haben, so ist, wenn b die Quecksilbersäule im Barometer an der Oberfläche, und β in einer Höhe h über der Oberfläche bezeichnet, und m einen constanten Coefficienten, der durch den Versuch bestimmt werden muß, darstellt, $h = m (\log b - \log \beta)$ oder $h = m \log \frac{b}{\beta}$: wo m bestimmt werden kann, indem man trigonometrisch den Werth von h in irgend einem Falle bestimmt, wo b und β schon bekannt sind.

4. Ist b die Höhe des Queckſilbers im Barometer bei dem tiefsten Standpuncte, β bei dem höchsten, t und t′ die Temperaturen der Luft bei diesen Standpuncten, f die feste Temperatur, bei der keine Correction für die Temperatur der Luft erfordert wird; sind ferner q und q′ die Temperaturen des Queckſilbers in den beiden Barometern, und n die Ausdehnung einer Queckſilbersäule von der Länge 1 für 1° Wärme, so ist h die senkrechte Höhe (in Klaftern) des einen Standpunctes über dem andern

$$h = 10000 \left(1 + 0{,}00244 \left(\frac{t + t'}{2} - f\right) \times \log. \frac{b}{\beta \times (1 + n [q - q'])}\right),$$ wo n beinahe $\frac{1}{10000}$ ist.

Gebraucht man das hunderttheilige Thermometer, so ist die Formel einfacher, weil der Anfang der Scale mit der Temperatur übereinstimmt, so daß also $f = 0$ ist; und wenn die Ausdehnung für Luft und Queckſilber beide auf die Grade dieſer Scale gebracht werden, ſo wird

$$h = 10000 \left(1 + 0{,}00441 \left(\frac{t + t'}{2}\right) \times \log. \frac{b}{\beta \left[1 + 0{,}00018 \left(q - q'\right)\right]}\right).$$

5. Die Temperatur der Luft vermindert ſich bei dem Aufſteigen in der Atmoſphäre ſowohl wegen der größeren Entfernung von der Erde, einer Hauptquelle der Wärme, als auch wegen der größeren Kraft, die Wärme zu verſchlucken, die die Luft erlangt, wenn ſie weniger zuſammengedrückt wird.

6. Profeſſor Leslie hat in den Anmerkungen zu ſeinen Elementen der Geometrie, Seite 295, zweite Auflage, eine Formel zur Beſtimmung der Temperatur einer Luftſchicht bei gegebener Queckſilberhöhe im Barometer gegeben. Iſt die Queckſilberſäule bei dem tieferen von zwei Standpuncten b, und dem höheren β, ſo iſt die Verminderung der Wärme in Graden der Centeſimal-Scale $\left(\frac{b}{\beta} - \frac{\beta}{b}\right) 25$. — Dies ſcheint mit der Beobachtung gut übereinzuſtimmen.

7. Würde die Atmoſphäre zu einem Körper von derſelben Dichtigkeit zuſammengedrückt, die ſie an der Oberfläche der Erde hat, ſo iſt die Höhe, bis zu welcher er ſich ausdehnen würde, in Klaftern gleich, $4343 \left(1 + 0{,}00441 \frac{t + t'}{2}\right)$, oder, wenn man die Ausdehnung nach Laplace nimmt, $= 4343 \left(1 + \frac{4 \times t}{1000}\right)$.

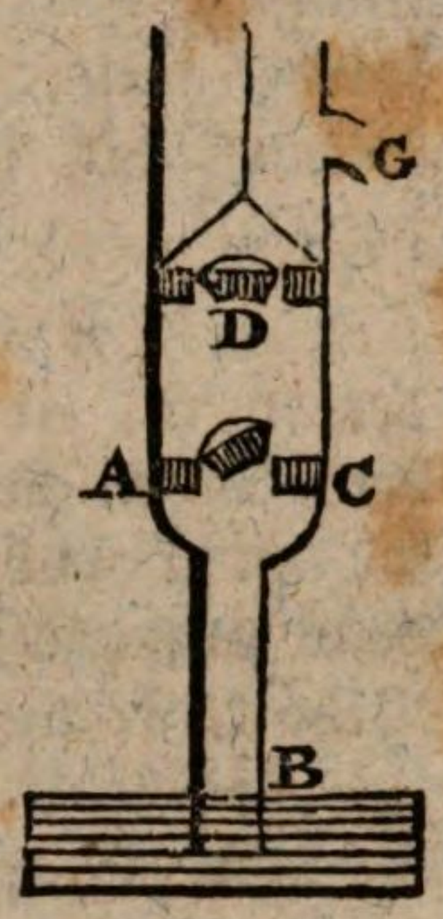
Iſt daher b die Höhe des Queckſilbers im Barometer, auf die Temperatur t reducirt, ſo iſt das ſpecifiſche Gewicht des Queckſilbers zu dem ſpecifiſchen Gewichte der Luft wie b zu $4343 \left(1 + \frac{4t}{1000}\right)$, oder das ſpecifiſche Gewicht der Luft iſt gleich $\frac{b}{72 \left(4343\right) \left(1 + \frac{4t}{1000}\right)}$.

Der Diviſor 72 iſt deswegen eingeführt, weil b in Zollen ausgedrückt iſt. — (Plaufair's Outlines)

2. Abschnitt. Pumpen.

1. Erklärung. Man gebraucht das Wort Pumpe von einer Maschine, die dazu dient, Wasser durch den Luftdruck zu erheben.

2. Die gewöhnliche Saug-Pumpe besteht aus zwei hohlen Cylindern, welche dieselbe Axe haben, und bei AC verbunden sind. Der untere ist zum Theil senkrecht in einen Behälter getaucht, und heißt die Saugröhre, der obere der Pumpen-Stiefel. Bei AC ist ein Stempel befestigt, der ein Ventil enthält, das sich aufwärts öffnet, und noch nicht 34 Fuß von der Oberfläche des Wassers entfernt seyn darf. Im Pumpen-Stiefel befindet sich ein luftdichter Kolben D, der vermittels einer Stange und Kurbel auf und nieder bewegt werden kann, und ein Ventil enthält, das sich aufwärts öffnet. In einem größeren oder kleineren Abstande, wie es der Vortheil erfordert, über der größten Höhe von D ist eine Rinne G angebracht.

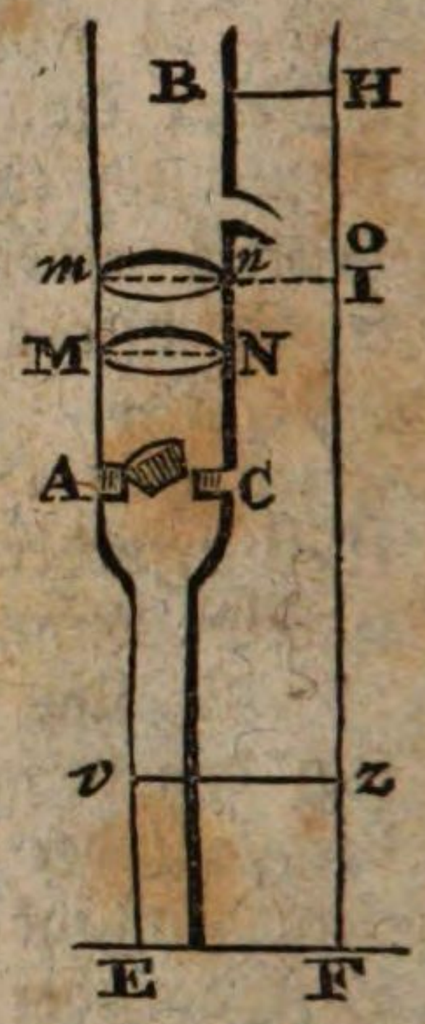


3. Um die Wirkung dieser Pumpe zu erklären, denke man sich den beweglichen Kolben D in seinem tiefsten Standpuncte, die Cylinder frei von Wasser, und die Luft in ihrem natürlichen Zustande. Erhebt man den Kolben, und der Druck der Luft darüber hält sein Ventil verschlossen, so nöthigt die Luft in dem unteren Cylinder AB das Ventil bei AC sich zu öffnen, und nimmt einen größern Raum ein, nämlich zwischen B, der Oberfläche des Wassers und D; ihre elastische Kraft wird daher vermindert, und kann folglich den Druck der äußern Luft nicht länger tragen, die einen Theil des Wassers in den Cylinder AB treibt, um das Gleichgewicht herzustellen. Dies geschieht fortwährend bis der Kolben seine größte Höhe erreicht hat, wo dann das Ventil bei AC sich verschließt. Bei dem folgenden Herabgehen wird die Luft unter D verdichtet, und hält das Ventil bei AC verschlossen, entweicht aber, indem sie das Ventil bei D sich zu öffnen nöthigt, bis der Kolben seinen tiefsten Standpunct erreicht hat. Das nächste Mal wird eine ähnliche Wirkung hervorgebracht, bis endlich das Wasser, das sich in dem Cylinder erhebt, das Ventil bei AC nöthigt, sich zu öffnen und in den Pumpen-Stiefel eintritt; dann wird durch das Herabgehen von D das Ventil bei AC verschlossen gehalten, das Wasser steigt durch das Ventil bei D auf, der Kolben treibt es bei dem Wiederaufsteigen vor sich her und gießt es durch die Rinne G aus.

4. Zusatz 1. Die größte Höhe, bis zu welcher das Wasser in der gewöhnlichen Pumpe durch einen einfachen Kolben erhoben werden kann, ist die, bis zu welcher die Säule mit dem Gewichte der Atmosphäre im Gleichgewicht steht, das ist zwischen 32 und 36 Fuß (engl.).

5. Zusatz 2. Die Quantität Wasser, die in einer gegebenen Zeit ausgeleert wird, wird durch die Ueberlegung bestimmt, daß bei jedem Kolbenzuge eine Quantität ausgeleert wird, welche einem Cylinder gleich ist, dessen Grundfläche ein Schnitt der Pumpe und dessen Höhe der Spielraum des Kolbens ist.

6. Die Kraft zu bestimmen, welche erfordert wird, um den Widerstand zu besiegen, den der Kolben beim Aufsteigen erfährt. Es sey h die Höhe HF der Oberfläche des Wassers in dem Pumpenstiefel über EF dem Niveau des Behälters; und a^2 der Flächeninhalt des Schnittes MN; h′ sey die Höhe der Wassersäule, die dem Drucke der Atmosphäre gleich ist; der Stempel erreiche bei dem Aufsteigen eine Lage mn, die der Höhe IF entspricht. Es leuchtet ein, daß auf den Kolben niederwärts der Druck der Atmosphäre $= a^2 h'$ und der Druck der Säule $Bm = a^2 \times HI$ wirkt; daher ist das ganze Streben des Kolben herabzusteigen $= a^2 (h' + HI)$.



Aber auf den Kolben wirkt aufwärts der Druck der Luft an der äußern Oberfläche EF des Behälters $= a^2 h'$; wovon ein Theil von dem Gewichte der Wassersäule, deren Grundfläche mn und Höhe FI ist, vernichtet wird;

die ganze Wirkung aufwärts $= a^2 \times (h' - FI)$;

daher $F = a^2 \times (h + HI) - a^2 . (h' - FI)$
$= a^2 . FH = a^2 h$,

das heißt: dem Kolben wird während seines Aufsteigens eine Kraft entgegengesetzt, die dem Gewichte einer Wassersäule gleich ist, welche dieselbe Grundfläche als der Kolben und eine Höhe hat, die der der Oberfläche des Wassers in dem Pumpen-Stiefel über der Höhe im Behälter gleich ist. Um daher den Kolben aufwärts zu bewegen, muß eine Kraft angewendet werden, die der oben bestimmten, dem Gewichte des Kolbens und der Stange und dem Widerstande gleich ist, welchen

der Kolben in Folge der Reibung gegen die innere Oberfläche der Röhre erfährt. *)

Fängt der Kolben an herabzugehn, so wird er durch sein eigenes Gewicht fallen, da der einzige Widerstand, auf den er trifft, die Reibung und die schwache Adhäsion an dem Wasser ist.

7. Zusatz 1. Hat das Wasser den Kolben noch nicht erreicht, so sey sein Stand v z. Die untere Fläche des Kolbens wird durch die innere verdünnte Luft gedrückt. Diese Luft aber zusammengenommen mit der Wassersäule E v ist mit dem Drucke der Atmosphäre $a^2 h'$ im Gleichgewichte und ihr Druck $= a^2 (h' - Ev)$. Der Druck niederwärts $= a^2 h'$; also

$$F = a^2 \times Ev.$$

Daher wird die Kraft F, die erfordert wird, um den Kolben in Gleichgewicht zu halten, größer, wenn das Wasser aufsteigt, und wird beständig und $= a^2 h'$, sobald das Wasser die constante Höhe B H erreicht.

8. Zusatz 2. Wird das Gewicht des Kolbens mit in Rechnung gezogen, so sey dieses Gewicht dem einer Wassersäule gleich, deren Grundfläche m n und Höhe p ist; also $= a^2 p$; so wird

$$F = a^2 . (Ev + p).$$

9. Die Höhe zu bestimmen, bis zu welcher das Wasser sich nach einem Zuge des Kolbens erheben wird, wenn der feste Stempel bei der Verbindung der Saugröhre und des Pumpen-Stiefels angebracht ist, und man voraussetzt, daß nach jeder Hebung des Kolbens ein Gleichgewicht zwischen dem Drucke der Atmosphäre auf die Oberfläche des Wassers in dem Behälter und der elastischen Kraft der verdünnten Luft zwischen dem Kolben und der Oberfläche der Wassersäule in der Röhre zusammengenommen mit dem Gewichte dieser Säule stattfindet.

Es sey a b die Oberfläche des Wassers in der Saugröhre nach dem ersten Kolbenzuge; bliebe der Kolben bei D einen Augenblick stehn, so würde der Druck der Atmosphäre der Säule E b und die elastische Kraft der Luft in N a das Gleichgewicht halten.

---

*) Es habe der Pumpen-Stiefel 6 Zoll Durchmesser, und die größte Höhe, bis zu welcher das Wasser erhoben werden kann, sey 30 Fuß; es sey ferner das Gewicht des Kolbens und seiner Stange 10 Pfd. und die Reibung $\frac{1}{5}$ des ganzen Gewichts. Dann giebt nach der Regel Seite 200 $\frac{1}{10}$ des Quadrats des Durchmessers die Biergallonen von einem Yard in der Länge des Cylinders und eine Bier-

Es sey AE die Höhe der Saugröhre = a
DR der Spielraum des Kolbens = b
h = der Höhe einer Wassersäule, die dem Drucke der Atmosphäre gleich ist.
y = der Höhe einer Säule, die dem Drucke der Luft in Na gleich ist.
x = Ea
und R und r = den Halbmessern des Pumpenstiefels und der Saugröhre.

Dann ist $x + y = h$

$$\text{und } y = h\,\frac{AF}{Na} = h \cdot \frac{\pi r^2 a}{\pi R^2 b + \pi r^2 . (a - x)}$$

$$= \frac{h r^2 a}{R^2 b + r^2 a - r^2 x};$$

$$\text{daher } h = x + \frac{h r^2 a}{R^2 b + r^2 a - r^2 x};$$

$$\text{folglich } h R^2 b + h r^2 a - h r^2 x = R^2 b x + r^2 a x - r^2 x^2 + h r^2 a$$

$$\text{oder } x^2 - (h + \frac{R^2}{r^2} . b + a) . x = - h . \frac{R^2}{r^2} . b,$$

$$\text{und } x^2 - p x = - h m b,$$

$$\text{wenn } m = \frac{R^2}{r^2} \text{ und } p = h + m b + a \text{ ist;}$$

$$\text{daher } x = \tfrac{1}{2} (p \pm \sqrt{p^2 - 4 h m b}),$$

$$\text{und } y = \tfrac{1}{2} (2h - p \mp \sqrt{p^2 - 4 h m b}),$$

wovon nur ein Werth brauchbar ist, nämlich der, welcher dem unteren Zeichen entspricht; daher muß x und y kleiner seyn als h; wird aber das obere Zeichen gebraucht, so wird x größer gefunden werden als h.

10. Bei gegebener Höhe des gehobenen Wassers und der Höhe, die dem Drucke der Luft in der Pumpe nach dem ersten Kolbenzuge entspricht, die Höhen für den zweiten, dritten u. s. w. Kolbenzug zu bestimmen.

Es sey Ea' die Höhe des Wassers nach dem ersten Kolbenzuge = x_1, und y_1 die Höhe, die der elastischen Kraft der Luft zukommt, dann ist

$$x_1 + y_1 = h$$

---

gallone wiegt, nach Seite 291, $10\frac{1}{5}$ Pfund. Daher $(6^2 \times 10) + \frac{1}{50} (6^2 \times 10) = 360 + 7{,}4 = 367{,}4$ als Gewicht der widerstehenden Wassersäule. Und $367{,}4 + 10 + \frac{1}{5} (377{,}4) = 452{,}9$ als ganzer widerstehender Druck.

Wird die Kolbenstange von einem Hebel bewegt, dessen Arme sich wie 10 zu 1 verhalten, so wird diesem Drucke durch eine Kraft von 45,29 Pfund das Gleichgewicht gehalten.

und $y_1 = y \frac{Ab}{Na'}$, da die Luft, welche den Raum Ca einnahm, nun Na' einnimmt;

Daher $y_1 = \frac{yr^2 . (a-x)}{R^2 b + r^2 . (a-x_1)} = \frac{y(a-x)}{mb+a-x}$;

folglich $h = x_1 + \frac{y(a-x)}{mb+a-x_1}$,

und also $x_1 = \frac{1}{2} . [p - \sqrt{p^2 - 4hmb - 4x(p+a-x)}]$,

und $y_1 = \frac{1}{2} . [2h - p + \sqrt{p^2 - 4hmb - 4x.(h+a-x)}]$.

Hieraus werden die Werthe von x_2, y_2, x_3, y_3 u. s. w. abgeleitet.

$x_2 = \frac{1}{2} . [p - \sqrt{p^2 - 4hmb - 4x_1 . (h+a-x_1)}]$,

$y_2 = \frac{1}{2} . [2h - p + \sqrt{p^2 - 4hmb - 4x_1 . (h+a-x_1)}]$,

und so fort. Stellt daher x_n die Höhe des Wassers nach $(n+1)$ Kolbenzügen dar, so ist:

$x_n = \frac{1}{2} . [p - \sqrt{p^2 - 4hmb - 4x_{n-1} . (h+a-x_{n-1})}]$,

und $y_n = \frac{1}{2} . [2h - p + \sqrt{p^2 - 4hmb - 4x_{n-1} . (h+a-x_{n-1})}]$.

11. Zusatz 1. Daher kann die Höhe, bis zu welcher das Wasser nach einer gegebenen Anzahl von Kolbenzügen aufsteigen kann, so wie die elastische Kraft der Luft in der Saugröhre bestimmt werden.

12. Zusatz 2. Kennt man die Höhe, die jedem besondern Kolbenzuge entspricht, so kann man auch die Unterschiede dieser Höhen und die aufeinanderfolgenden Unterschiede in der elastischen Kraft der zurückbleibenden Luft finden.

13. Zusatz 3. Wird das Gewicht des Ventils c nicht berücksichtigt, so leuchtet ein, daß nach einer gewissen Anzahl Kolbenzüge in der Saugröhre ein leerer Raum erzeugt werden wird, vorausgesetzt, daß dieselbe gleich oder nicht größer sey als die Höhe, die dem Drucke der Atmosphäre zukommt, das ist, wenn a nicht größer ist als h; denn in diesem Falle ist

$$x_n = x_{n-1},$$

und daher

$x_{n-1} = \frac{1}{2} [p - \sqrt{p^2 - 4hmb - 4x_{n-1} . (h+a-x_{n-1})}]$,

folglich $x_{n-1} = h$ die größte Höhe der Wassersäule in der Röhre. Uebertrifft daher die Länge der Saugröhre nicht die Höhe, die dem Drucke der Atmosphäre zukommt, so wird das Wasser darin nach jedem Kolbenzuge fortfahren zu steigen, bis es am Ende in den Pumpenstiefel steigt.

Ist aber die Höhe von AF größer als h, so wird das Wasser fortwährend steigen, ohne jemals seine größte Höhe zu

erreichen; denn in diesem Falle kann kein wirklich leerer Raum erzeugt werden, und da $x_n + y_n = h$ und y_n niemals $= 0$ werden kann, so kann auch x_n niemals gleich h werden. *) Wenn aber die aufeinander folgenden Werthe von y beständig abnehmen, so werden die entsprechenden Werthe von x beständig zunehmen.

14. Zusatz 4. Wenn das Gewicht des Ventils c in Rechnung gezogen wird, so muß eine Wassersäule hinzugefügt werden, die dem hinzukommenden Drucke, welcher besiegt werden soll, gleich ist. Es sey l die Höhe dieser Säule, dann ist

$$x + y + l = h$$

und also $x + y = h - l = h'$.

Wenn daher dieser Werth von h' für h substituirt wird, so werden die vorhergehenden Gleichungen anwendbar.

15. Zusatz 5. In den vorhergehenden Fällen wurde vorausgesetzt, daß der bewegliche Kolben bis AC herabgehe. Geschieht dies nicht, so kann es sich ereignen, daß das Wasser AC nicht erreicht, obgleich AC noch nicht 34 Fuß von der Oberfläche des Wassers im Behälter entfernt ist.

Nachdem der Kolben zuerst bis zu seiner größten Höhe aufgestiegen ist, wird, wenn c verschlossen wird, die elastische Kraft der Luft zwischen DN und $AC = (h - x)$ und ihr Volumen $\pi b R^2$. Wenn der Kolben beim Herabgehen einen Raum b', kleiner als b beschreibt, so daß er in einem Abstande $(b - b')$ von AC stehen bleibt, so wird diese Größe $(b - b')\,\pi R^2$; daher die elastische Kraft ist $= (h - x) \cdot \frac{b}{b - b'}$. Damit nun der Druck aufwärts das Ventil öffnen kann, so muß derselbe die elastische Kraft der Atmosphäre übertreffen:

$$\text{folglich } (h - x) \cdot \frac{b}{b - b'} > h,$$

$$\text{oder } (h - x) \cdot b > h \cdot (b - b'),$$

$$\text{folglich } bx < hb' \text{ oder } \frac{x}{h} < \frac{b'}{b}.$$

Wenn daher $\frac{b'}{b}$ kleiner als $\frac{x}{h}$ ist, so wird sich das Ventil DN nicht öffnen, es wird daher zwischen AC und dem festen Stempel dieselbe Quantität Luft seyn, die, wenn der

---

*) Daher leuchtet ein, daß es nicht genau wahr ist, daß das Wasser in der Saugröhre bis zu einer Höhe steigen wird, die einer Säule gleich ist, welche dem Drucke der Atmosphäre das Gleichgewicht hält. Dies ist eine Grenze, der es sich annähert, aber sie in endlicher Zeit niemals erreicht.

Kolben seine größte Höhe erreicht hat, dieselbe elastische Kraft haben wird, als die Luft zwischen AC und a' b'; wird daher c gleichmäßig auf beiden Seiten gedrückt, so wird es unbewegt bleiben, und das Wasser nicht aufsteigen.

16. Wenn der feste Stempel an die Oberfläche des Wassers versetzt wird, das Aufsteigen des Wassers in der Saugröhre zu bestimmen.

Es seyen Ea und Ea' die allmähligen Höhen, zu welchen sich das Wasser erhebt, dann ist nach dem ersten Aufsteigen des Kolbens:

$$x + y = h$$

$$\text{und } y = \frac{ha}{mb + a - x};$$

$$\text{daher } x = \tfrac{1}{2} \cdot (p - \sqrt{p^2 - 4hmb})$$

$$\text{und } y = \tfrac{1}{2} \cdot (2h - p + \sqrt{p^2 - 4hmb}),$$

welche Gleichungen dieselben sind, als die waren, die für das erste Aufsteigen des Kolbens (9.) bestimmt wurden. Daher wird man eben so, wie vorher, haben

$$x_n = \tfrac{1}{2}(p - \sqrt{p^2 - 4hmb - 4hx_{n-1}}),$$

$$\text{und } y_n = \tfrac{1}{2}(2h - p + \sqrt{p^2 - 4hmb - 4hx_{n-1}}).$$

17. Zusatz 1. Bleibt das Wasser nach (n + 1) Kolbenzügen stehen, so ist $x_n = x_{n-1}$;

$$\text{und also } x_{n-1} = \tfrac{1}{2} \cdot (p - \sqrt{p^2 - 4hmb - 4hx_{n-1}}),$$

$$\text{daher } x_{n-1} = \tfrac{1}{2} \cdot [a + mb \pm \sqrt{(a+mb)^2 - 4hmb}].$$

Es giebt also zwei Höhen, bei denen das Wasser aufzusteigen aufhören kann, wenn $(a + mb)^2$ gleich oder größer ist als 4 hmb. Im ersteren Falle sind die beiden Werthe von x_{n-1} gleich, das heißt, es wird dann nur eine Höhe geben $= \frac{1}{2}(a + mb)$, bei der das Wasser stehen bleiben wird. In dem letzteren Falle giebt es zwei Höhen, die bestimmt werden können.

Ist 4 hmb größer als $(a + mb)^2$, so wird das Wasser nicht stehen bleiben.

Beispiel 1. Wenn h = 32 Fuß, a = 20, b = 4 und m = 1, oder die Saugröhre und der Pumpenstiefel gleichen Durchmesser haben, wird

$$x_{n-1} = \tfrac{1}{2} \cdot (20 + 4 \pm \sqrt{(24)^2 - 4 \times 1 \times 32 \times 4})$$

$$= \tfrac{1}{2}(24 \pm \sqrt{64}) = 16 \text{ oder } 8.$$

Beispiel 2. Wenn h = 32 Fuß, a = 25, b = 2 und m = 4,

$$x_{n-1} = \tfrac{1}{2} \cdot [25 + 8 \pm \sqrt{(33)^2 - 4 \times 32 \times 4 \times 2}]$$
$$= \tfrac{1}{2} \times (33 \pm \sqrt{65}) = 41{,}8062 \text{ oder } 24{,}1938.$$

18. Zusatz 2. Wenn $m = 1$ ist, oder die Röhren denselben Durchmesser haben, so ist:

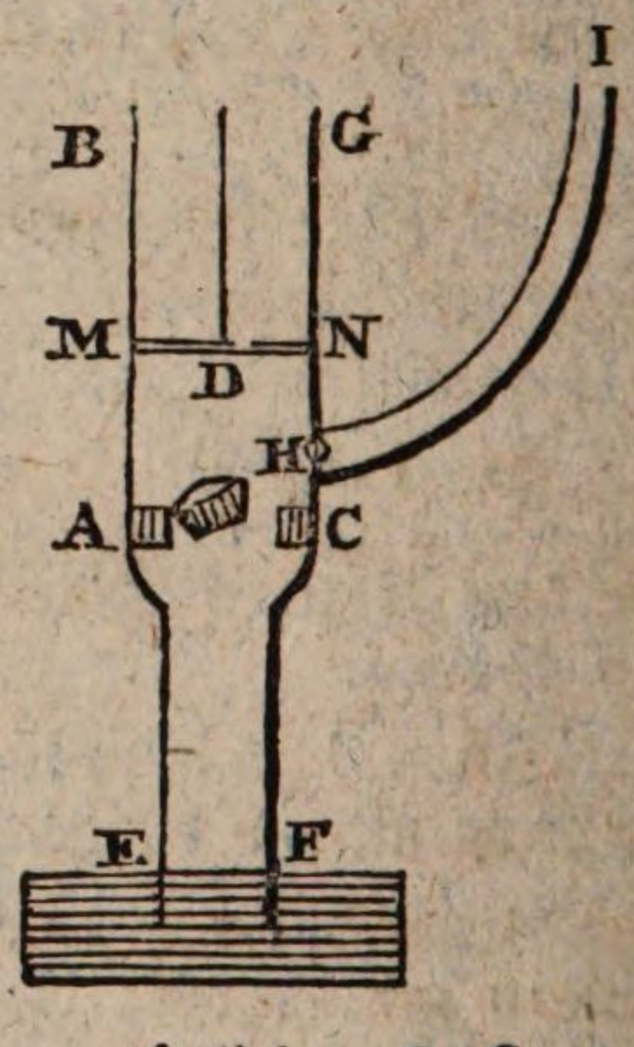
$$x_{n-1} = \tfrac{1}{2} \times [a + b \pm \sqrt{(a + b)^2 - 4\,h\,b}],$$

welches unmöglich wird, wenn $(a + b)^2$ kleiner als $4\,h\,b$ oder b größer als $\frac{(a+b)^2}{4h}$ wird.

Damit also diese Pumpe ihre Wirkung verrichten kann, so muß der Spielraum des Kolbens größer seyn als das Quadrat der größten Höhe des Kolbens über der Oberfläche des Wassers im Behälter, dividirt durch die vierfache Höhe, die dem Drucke der Atmosphäre zukommt.

19. Die Hebepumpe besteht aus einem hohlen Cylinder, der in den Behälter getaucht ist. Er ist mit einem beweglichen Kolben versehen, der das Wasser heraufhebt, indem er unten hineintaucht, und durch ein Gestänge bewegt wird, das man vermittels einer Kurbel auf- und abwärts gehen lassen kann. Der Kolben hat ein Ventil, das sich aufwärts öffnet. Ein wenig unter der Oberfläche des Wassers ist ein fester Stempel mit einem Ventile, das sich ebenfalls aufwärts öffnet. Dies ist eine ungeschickte Maschine, bei deren Einzelheiten wir nicht zu verweilen brauchen.

20. Die Druckpumpe besteht aus einer Saugröhre AEFC, die zum Theil in den Behälter eingetaucht ist, aus dem Pumpenstiefel ABGC und aus der aufsteigenden Röhre HI. Der Pumpenstiefel ist mit einem beweglichen, starken und luftdichten Kolben versehen. Bei AC und H sind feste Stempel mit Ventilen, die sich aufwärts öffnen.



21. Um die Wirkung dieser Pumpe zu erläutern, denke man sich den Kolben D in seinem tiefsten Stande; die Ventile geschlossen und die Luft in ihrem natürlichen Zustande. Bei dem Aufsteigen von D nimmt die Luft in ACD einen größeren Raum ein, daher wird ihre Elasticität vermindert, und die größere Elasticität der Luft in AF wird das Ventil bei AC öffnen, während das bei H durch die Elasticität der äußeren Luft verschlossen gehalten wird; daher wird sich das Was-

ser in der Saugröhre erheben. Geht D von seinem höchsten Stande herab, so wird die Elasticität der Luft in dem Pumpenstiefel das Ventil A C verschlossen halten, das bei H aber öffnen, wodurch die Luft sich entfernen wird. Durch nachfolgendes Aufsteigen des Kolbens wird die Luft herausgetrieben, und das Wasser in dem Stiefel sich erheben. Der herabgehende Kolben wird dann das Wasser durch das Ventil bei H drücken, das sich verschließen und dadurch verhindern wird, daß das Wasser nicht in den Pumpenstiefel zurückkehrt. Steigt daher D wieder auf, so wird der leer gelassene Raum mit Wasser angefüllt, das sich durch das Ventil bei A C drückt; dies wird aber bei dem nächsten Aufsteigen von D in die aufwärtsgehende Röhre getrieben; und auf diese Art kann durch das Auf- und Absteigen von D das Wasser bis zur verlangten Höhe erhoben werden.

22. Zusatz. Bei dieser Pumpe darf D nicht höher, als ungefähr 32 Fuß über die Oberfläche des Wassers im Behälter aufsteigen.

23. Es soll die Kraft bestimmt werden, die erfordert wird, um den Widerstand zu besiegen, den hier der Kolben leidet.

Es sey h die Höhe einer Wassersäule, die dem Drucke das Gleichgewicht hält, und E B die Höhe, bis zu welcher das Wasser gedrückt wird. M N sey eine Lage des Kolbens D, dessen Fläche = A ist, und das Gewicht des Kolbens und seines Zubehörs = P; X sey die Kraft, die erfordert wird, um den Kolben während des Saugens hinaufzutreiben, wenn die Reibung nicht berücksichtigt wird, und Y die angewandte Kraft, ihn nieder zu drücken.

Wenn der Kolben aufsteigt und H verschlossen ist, wird

$$X = P + Ah - A \times (h - ME)$$
$$= P + A + ME.$$

Es sey der Kolben bei seinem Herabgehen in derselben Lage, daher A C verschlossen, H offen: so ist

$$Y = Ah + A \times MB - (Ah + P)$$
$$= A \times MB - P.$$

Daher $X + Y = A \times EB$; oder die ganze ausgeübte Kraft ist in dem Falle des Gleichgewichts dem Gewichte einer Wassersäule gleich, deren Grundfläche der des Kolben gleich kommt, und deren Höhe der Abstand der Oberfläche des Wassers von dem Puncte ist, bis zu welchem es gehoben wird.

24. Zusatz 1. Bei dieser Pumpe ist die Kraft in zwei Theile getheilt, wovon der eine dem Saugen, der andere dem Drucke entgegensteht; hierdurch gewinnt man aber einen Vortheil über die anderen Pumpen, wo die ganze Kraft mit einem Male ausgeübt wird, während das Wasser in die Höhe steigt.

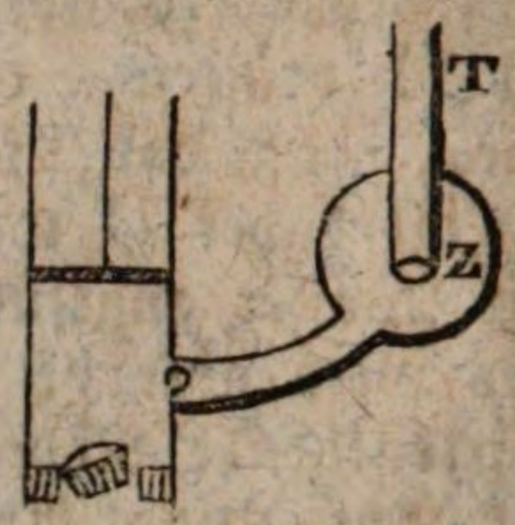
25. Zusatz 2. Um die Kraft gleichförmig anzuwenden, sey $X = Y$;

folglich $P + A \times ME = A \times MB - P$

und $P = \frac{1}{2} A \times (MB - ME)$.

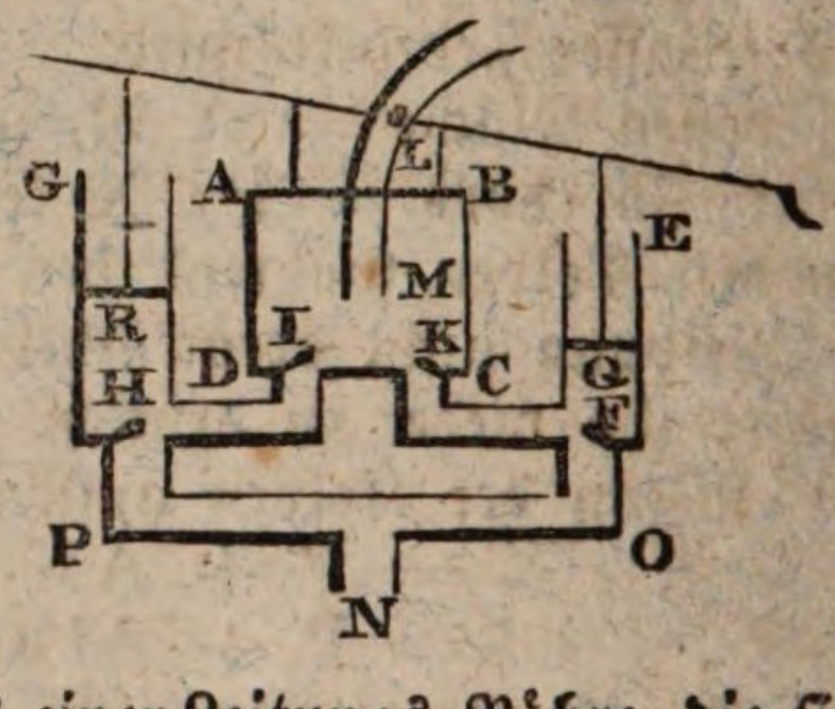
Der Kolben muß daher auf so eine Art spielen, daß MB größer ist als ME.

26. Zusatz 3. Bei der gewöhnlichen Druckpumpe ist der Strom unterbrochen; denn es ist keine Kraft da, die ihn während des Zurückkehrens des Kolbens treibt.



Ein Mittel diesem Mangel abzuhelfen ist, die aufsteigende Röhre zu unterbrechen und so mit einem Windkessel T zu umschließen; hat sich nun in diesem das Wasser über Z erhoben, so ist die Luft darüber zusammengedrückt und drängt durch ihre Elasticität das Wasser durch die Oeffnung Z hinauf, die enger ist als die der Röhre; daher wird diese Quantität Wasser, die während des Herabsteigens des Kolbens hineingebracht wird, die Entleerung für die ganze Zeit des Kolbenzuges ersetzen, indem sie einen unaufhörlichen Strom giebt.

27. Die Feuer=Sprütze besteht aus einem großen Behälter ABCD, der Windkessel genannt, in welchen durch zwei Druckpumpen EF, GH (deren Kolben Q und R sind) Wasser gebracht wird, die mit ihren unteren Enden durch zwei Ventile, die sich einwärts öffnen, mit ihm in Verbindung stehen. Von dem Behälter geht eine Röhre ML aus, durch die



das Wasser getrieben und vermittels einer Leitungs=Röhre, die sich um das Ende L bewegen läßt, nach einem beliebigen Puncte geleitet wird. Die Pumpen werden durch einen Hebel in Bewegung gesetzt, so daß, während der eine Kolben fällt, der andere steigt. Die Pumpen stehen mit einem Behälter Wasser bei N in Verbindung.

28. Um die Wirkung dieser Maschine zu erklären, werde die Röhre N in den Wasserbehälter getaucht, und der Kolben R aufgezogen, so wird die Röhre GH angefüllt; beim Niedergehen des Kolbens R aber wird, wie bei der Druckpumpe (21.), das Ventil H verschlossen, und das Wasser genöthigt, durch das Ventil I in den Windkessel zu gehen, während durch den Druck des Wassers in dem Windkessel das Ventil K verschlossen wird. Da auf diese Art die Luft über der Oberfläche

des Waſſers ſehr zuſammengedrückt wird, ſo nöthigt ſie durch ihre Elaſticität das Waſſer, durch ML aufzuſteigen und mit einer großen Geſchwindigkeit aus der Röhre zu treten. *)

29. Wenn der Windkeſſel halb mit Waſſer angefüllt iſt und die Luft dann auf die Hälfte ihres natürlichen Raumes zuſammengedrückt wird, ſo beſitzt ſie eine elaſtiſche Kraft, die doppelt ſo groß iſt als der Druck der Atmoſphäre; ſchließt ſich dann das Ventil, ſo wird daher die darin befindliche Luft, die auf das darunter liegende Waſſer mit der doppelten Kraft der äußeren Luft drückt, das Waſſer nöthigen, aus der Maſchine bis zur Höhe von $(2 - 1) \times 33$ oder 33 Fuß zu ſpritzen; die Reibung verurſacht jedoch hier ein Hinderniß.

Oder wenn allgemein $\frac{n - 1}{n}$ die Waſſerhöhe in dem Luftgefäße in Bruchtheilen des Ganzen bezeichnet, ſo wird $\frac{1}{n}$ die Höhe des Raumes darſtellen, den die zuſammengedrückte Luft einnimmt, der nfache Druck der Atmoſphäre ihre elaſtiſche Kraft, und $(n - 1)$ 33 die Höhe in Fußen ſeyn, bis zu welcher das Waſſer erhoben wird.

Wenn auf dieſe Art $\frac{3}{4}$ des Windkeſſels die Waſſerhöhe iſt, ſo wird die elaſtiſche Kraft der Luft der vierfache Druck der Atmoſphäre und $(4 - 1)$ 33 $=$ 99 Fuß die Höhe ſeyn, bis zu welcher dann das Waſſer von der Maſchine geworfen werden kann.

30. Die Modificationen bei dem Verfertigen der Pumpen ſind in Rückſicht auf ihre praktiſchen Anwendungen ſehr zahlreich. Wer ſich mit einigen der gewöhnlichſten bekannt machen will, kann den zweiten Theil meines Lehrbuchs der Mechanik **) und die Nummern 13, 41, 69 und 93 des Magazins für Mechanik nachſehen.

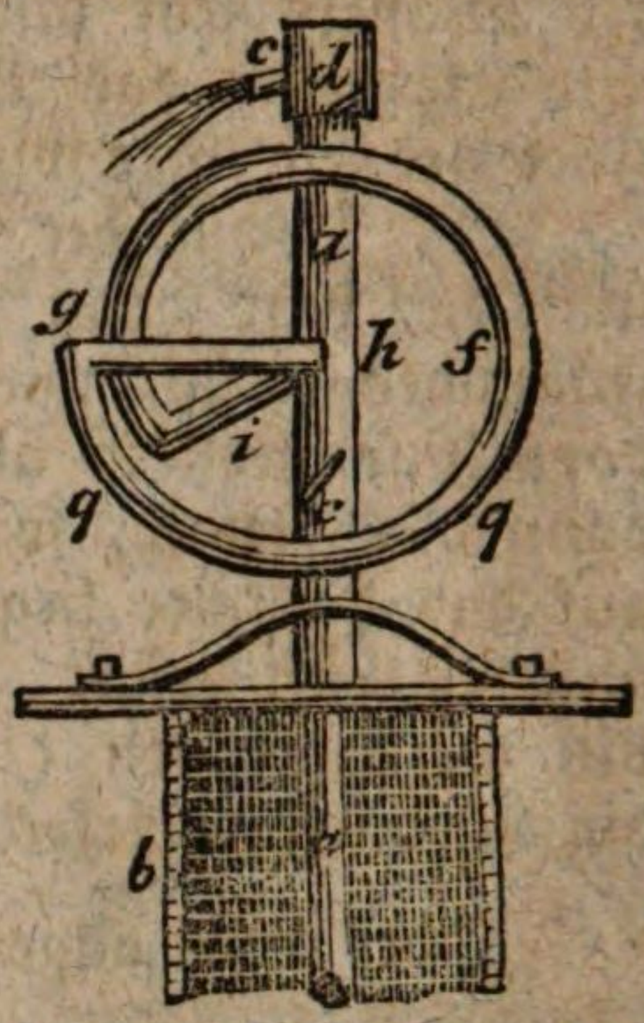
Hierzu will ich noch die Beſchreibung einer Queckſilberpumpe fügen, die vor Kurzem von Hrn. Thomas Clark in Edinburg erfunden worden iſt, und faſt ohne Reibung wirkt. Sie wirkt bei dem Ziehen und Heben des Waſſers bis zu jeder Höhe ſehr ſtark, und iſt in ihrer Conſtruction äußerſt einfach.

---

*) Der vorſtehende Theil dieſes Abſchnitts iſt aus Bland's Hydroſtatik genommen, einem ſehr eleganten und ſchätzbaren Werke, das ich ſehr angelegentlich denen empfehle, die ſich eine umfaſſende Kenntniß der Theorie dieſes Theiles verſchaffen wollen.

**) Ueberſetzt von Dietlein. Halle, 1824.

(D.)



aa iſt die Hauptröhre, die in den Brunnen eingelaſſen iſt; bei c iſt ein Ventil angebracht und ein anderes bei d, beide öffnen ſich aufwärts; dann iſt eine eiſerne Röhre wie bei f kreisförmig gebogen, hat jedoch bei g ein Knie, ſo daß ſie bei h durch eine Stopfbüchſe (stuffing box) geht, und von da wie bei i wieder herausgeht und ſich mit dem ringförmigen Theile wieder vereinigt. Hierauf wird eine Quantität Queckſilber in den Ring gebracht, den es von q bis q anfüllt; wird dann der Ring um ſeine Axe h in Schwung gebracht, ſo wird ſogleich in der Hauptröhre durch das Zurückweichen des Queckſilbers von g nach q ein leerer Raum erzeugt, wodurch das Waſſer genöthigt wird aufzuſteigen und den leeren Raum auszufüllen; wird die Bewegung umgedreht, ſo geht das Queckſilber nach g zurück, hebt das Waſſer und treibt es bei der Oeffnung e heraus.

Herr Clark berechnet, daß eine Pumpe nach dieſer Beſchreibung mit einem Ringe von 12 Fuß Durchmeſſer das Waſſer bis zu derſelben Höhe erheben wird als die gewöhnliche Hebepumpe, und ohne Reibung es 150 Fuß höher treibt.

31. Gewöhnlich führt man unter den Pumpen auch die ſogenannte archimediſche Schraube oder Waſſerſchnecke auf. Sie beſteht entweder aus einer um einen Cylinder ſpiralförmig gewundenen Röhre, oder aus einer oder mehreren ſpiralförmigen Aushöhlungen, die nach Spiralprojectionen auf der Fläche eines inneren Cylinders gebildet ſind, der von einer äußeren Cylinderfläche waſſerdicht bedeckt wird. Der Cylinder, welcher die Spirale trägt, iſt ſchräg gelegt, ſo daß er gegen den Horizont unter einem Winkel von 30 bis 45° geneigt iſt, und in der Richtung ſeiner Axe, um Angeln gedreht werden kann, die ſich an beiden Enden befinden. Wird nun das untere Ende des ſpiralförmigen Canals in den Fluß oder den Behälter getaucht, aus dem Waſſer gehoben werden ſoll, ſo tritt anfangs das Waſſer in dem genannten Canale blos durch ſeine Schwere; wird aber der Cylinder durch menſchliche oder andere Kraft herumgedreht, ſo bewegt ſich das Waſſer in dem Canale herauf, und tritt endlich am oberen Ende der Röhre heraus.

Mehrere Umſtände machen dieſes Inſtrument unvollkommen und unwirkſam in ſeiner Thätigkeit. Die nöthigen Einrichtungen, um eine größte Wirkung zu erzeugen, ſind oft

schwer auszuführen. Es ereignet sich daher selten, daß das Maß der hervorgebrachten Wirkung $\frac{1}{3}$ der angewandten Kraft übertrifft, daher dieser Apparat, ungeachtet seiner Einfachheit, nur wenig von den Wasser-Baumeistern angewendet worden ist.

3. Abschnitt. Wind und Windmühlen.

1. Wenn die Luft sich ununterbrochen nach einer Richtung bewegt, so wird sie ein sehr nützliches Mittel, Maschinen mit stärkerer oder geringerer Energie, je nach der Geschwindigkeit zu treiben, mit der sie sich bewegt. Wäre sie nicht in der Richtung und Kraft veränderlich und erzeugte dadurch nicht Schwankungen, so könnte man im Allgemeinen keine passendere Hauptbewegungskraft wünschen. Und selbst bei aller Unregelmäßigkeit ist sie doch so nützlich, daß sie eine besondere Betrachtung erfordert.

2. Die Kraft, mit der Luft gegen eine bewegte Oberfläche trifft, oder der Wind gegen eine ruhende Oberfläche stößt, verhält sich beinahe wie das Quadrat der Geschwindigkeit, oder richtiger, der Exponent der Geschwindigkeit, nach der Seite 93 gegebenen Regel bestimmt, schwankt zwischen 2,03 und 2,05, so daß in den meisten praktischen Fällen der Exponent 2 oder der des Quadrats ohne Irrthum zu befürchten, angewendet werden kann. Ist I der Einfallswinkel, s^2 die gestoßene Oberfläche in Fußen und v die Geschwindigkeit des Windes in Fußen während einer Secunde, so muß für die Kraft in Avoirdupoids-Pfunden eine von den folgenden annähernden Formeln gebraucht werden, nämlich entweder

$$f = \frac{v^2 \, s^2 \, . \, \sin I^2}{440}$$

oder $f = 0{,}002288 \; v^2 \; s^2 \; \sin I^2$.

Von diesen ist die erste gewöhnlich in der Anwendung die leichteste, da sie nur zwei Zeilen mit kurzer Division, nämlich durch 40 und 11 erfordert.

Fällt der Wind senkrecht darauf, so ist $\sin I^2 = 1$; dann wird die Formel:

$$f = \frac{v^2 \; s^2}{440} \quad 0{,}002288 \; v^2 \; s^2.$$

3. Die nachfolgende Tafel stellt die Kraft des Windes dar, wenn er senkrecht auf eine Oberfläche von einem Fuße Durchmesser bei den verschiednen angezeigten Geschwindigkeiten stößt. Die Geschwindigkeit von 80 Meilen in der Stunde ist diejenige, bei der der Aëronaut Garnerin in seinem Luftschiffe von Ranelagh nach Colchester im Juni 1802 getragen wurde.

Es war ein starker und stürmischer Wind, jedoch noch kein Orkan, obgleich Rouse's Tafel einen Wind mit dieser Geschwindigkeit als einen solchen aufführt. Herr Green machte bei seiner Luftreise von Leeds im September 1823 43 Meilen in 18 Minuten, obgleich sich sein Luftschiff höher als 4000 Yards erhob.

Geschwindigkeit des Windes.		Senkrechte Kraft auf einen Quadrat-Fuß in Avoirdupoids-Pfd.
Meilen in einer Stunde.	= Fußen in einer Secunde.	
1	1,47	0,005
2	2,93	0,020
3	4,40	0,044
4	5,87	0,079
5	7,33	0,123
10	14,67	0,492
15	22,00	1,107
20	29,34	1,968
25	36,67	3,075
30	44,01	4,429
35	51,34	6,027
40	58,68	7,873
45	66,01	9,963
50	73,35	12,300
60	88,02	17,715
80	117,36	31,490
100	146,70	49,200

Borda fand durch Versuche in dem Jahre 1762, daß die Kraft des Windes sich sehr nahe wie das Quadrat der Geschwindigkeit verhält; er bestimmte aber diese Kraft in dem Verhältnisse von 111 zu 100 größer als Rouse sie fand (wie sie in der nebenstehenden Tafel dargestellt worden ist). Auch entdeckte Borda, was natürlich zu erwarten war, daß bei derselben Geschwindigkeit auf verschiedenen Oberflächen die Kraft stärker wuchs als die Oberfläche. Valz fand durch Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf Borda's Resultate, daß das Ganze durch folgende Formel dargestellt werden könne:

$$y = 0{,}001289\ x^2 + 0{,}000050541\ x^3$$

und fast eben so richtig durch $y = 0{,}00108\ x^{2\cdot2}$,

wo x^2 die Oberfläche in französischen Quadratzollen, y aber die Kraft bezeichnet, die in französischen Pfunden (siehe Tafel am Ende) der Geschwindigkeit von 10 Fuß in der Secunde entspricht.

4. Bei der Anwendung des Windes auf Mühlen giebt es immer, was auch für Verschiedenheiten in ihrer inneren Einrichtung seyn mögen, gewisse Regeln und Maximen in Beziehung auf die Lage, Gestalt und Größe der Flügel, wodurch sie für die Wirkung des Windes und die Erzeugung des nöthigen Effects in den vortheilhaftesten Zustand versetzt werden. Herr Smeaton hat sie sehr weitläuftig behandelt. Zu diesem Ende verfertigte er eine Maschine, von der in den Philos. Transact. Band 51 eine besondere Beschreibung gegeben ist. Vermittels eines bestimmten Gewichtes wurde sie um eine Axe mit einem horizontalen Arme, an dem sich vier kleine beweg-

liche Flügel befanden, gedreht. Unter diesen Umständen wirkte ein beständiger und gleichmäßiger Luftzug auf die Flügel; drehten sie sich nun um, so wurde die Schnur mit dem daran befestigten Gewichte um ihre Axe gewunden, und zeigte auf diese Weise, welche Art der Gestalt oder Verbindung der Flügel am besten der Absicht entspräche. Mit dieser Maschine wurde eine große Anzahl Versuche gemacht, welche folgende Resultate gaben.

(1.) Wurden die Flügel unter dem Winkel mit der Axe angebracht, den Parent und andere vorgeschlagen haben, nämlich 55°, so fand sich, daß dieser von allen Winkeln, die man versuchte, der unvortheilhafteste war.

(2.) Vergrößerte man den Winkel der Flügel mit der Axe von 72° bis 75°, so wurde die Kraft in dem Verhältnisse von 31 zu 45 verstärkt; dieser Winkel ist bei ebenen Flügeln gewöhnlich in Gebrauch.

(3.) Verlangt man nur, daß die Flügel einen gewissen Grad von Geschwindigkeit erlangen sollen, so ist die von Hrn. Parent empfohlene Lage die beste. Sollen aber die Flügel bei gegebenen Dimensionen die größt-möglichen Wirkungen in einer gegebenen Zeit hervorbringen, so muß bei dem Gebrauche von Ebenen der Winkel auf die Grenzen von 72 und 75 Grade beschränkt werden.

(4.) Ist der gegebene Winkel ziemlich der beste, so ist die Veränderung um einen oder zwei Grade von geringem Erfolge.

(5.) Wenn der Wind auf concave Flügel trifft, so ist es für die Kraft des Ganzen ein Vortheil, selbst wenn jeder Theil besonders genommen nicht am vortheilhaftesten eingerichtet wäre.

(6.) Aus verschiednen Versuchen nach einem großen Maßstabe fand Smeaton, daß folgende Winkel völlige Genüge thaten. Den Halbmesser denkt man sich in sechs Theile getheilt, $\frac{1}{6}$ vom Mittelpuncte aus wird als Einheit gesetzt, das Ende aber mit 6 bezeichnet.

Nr.	Winkel mit der Axe.	Winkel mit der Bewegungsebene.
1	72°	18°
2	71	19
3	72	18 Mitte
4	74	16
5	77½	12½
6	83	7 Ende.

(7.) Als nun Smeaton auf diese Art die vortheilhafteste Lage der Flügel erhalten hatte, so war seine nächste Sorge, zu untersuchen, welchen Vortheil man aus der Vergrößerung der Oberfläche bei unverändertem Halbmesser ziehen

könne. Das Resultat war, daß ein breiterer Flügel einen größeren Winkel erfordert; und daß, wenn der Flügel am Ende breiter als in der Mitte, diese Gestalt vortheilhafter ist als ein Parallelogramm. Die Gestalt und das Verhältniß der vergrößerten Flügel, wie es Smeaton am vortheilhaftesten bei einem großen Maßstabe bestimmt, ist, daß der äußerste Sparren ein Drittel des Halbmessers ist, und von demselben in dem Verhältnisse von 3 zu 5 getheilt wird. Der dreieckige oder belastete Theil des Flügels ist von seinem höchsten Puncte herunter mit Bretern, übrigens aber, wie gewöhnlich, mit Leinwand bekleidet. Die oben erwähnten Winkel sind auch für vergrößerte Flügel die passendsten; man findet in der Praxis, daß die Flügel eher zu klein als zu sehr der directen Wirkung des Windes ausgesetzt seyn sollten.

Manche haben geglaubt, daß die Kraft der Windmühle desto stärker sey, jemehr Flügel daran sind, und haben daher vorgeschlagen, den ganzen Raum auszufüllen, und dadurch, daß sie nach Parent's Methode jeden Flügel zu einem Ellipsen-Sector machten, den ganzen Wind-Cylinder aufzufangen, um die größt-mögliche Wirkung hervorzubringen. Aus Smeaton's Versuchen aber ergiebt sich, daß, wenn die Oberfläche aller Flügel $\frac{7}{5}$ des ganzen Raumes übertrifft, die Wirkung eher vermindert als vergrößert wird. Daraus schließt er, daß, wenn der ganze Windcylinder aufgefangen würde, dann, wegen Mangel an dem nöthigen Zwischenraume zum Ausweichen, nicht die größte Wirkung hervorgebracht werden könnte.

„Es ist gewiß wünschenswerth (sagt Smeaton), daß die Flügel der Windmühlen so kurz als möglich sind; auf gleiche Art wäre es aber auch zu wünschen, daß die Quantität Leinwand so klein wäre als sie seyn kann, um bei plötzlichen Sturmwinden Schaden zu vermeiden. Für große Mühlen ist daher die beste Einrichtung diejenige, wobei in einem gegebenen Kreise die größt-mögliche Quantität Leinwand enthalten ist, unter der Bedingung, daß auch die Wirkung in Verhältniß zu der Quantität der Leinwand zunimmt; auf eine andere Art kann die Wirkung in einem gegebenen Grade dadurch vermehrt werden, daß man bei einem größeren Halbmesser die Leinwand in einem geringeren Maßstabe vermehrt, als es nach Verhältniß des Halbmessers erforderlich wäre."

(8.) Die Verhältnisse zwischen den Geschwindigkeiten unbelasteter und mit der größten Last beschwerter Windmühlen-Flügel fielen bei verschiednen Versuchen sehr verschieden aus; das gewöhnlichste Verhältniß war jedoch 3 zu 2. Im Allgemeinen trug es sich zu, daß, wo die Kraft, sey es nun durch

eine Vergrößerung der Flügeloberflächen oder durch vermehrte Geschwindigkeit des Windes am größten war, das zweite Glied des Verhältnisses vermindert wurde.

(9.) Die Verhältnisse zwischen der geringsten Last, die die Flügel hemmte, und der größten, mit der sie sich drehten, wurden zwischen den Verhältnissen von 10 zu 8 und 10 zu 9 gefunden, und waren ungefähr im Mittel 10 : 8,3 und 10 : 9 oder 6 : 5; jedoch zeigte sich im Ganzen, daß, wo der Winkel der Flügel oder die Quantität Leinwand am größten war, das zweite Glied des Verhältnisses kleiner wurde.

(10.) Die Geschwindigkeit von Windmühlenflügeln, sie mögen unbelastet oder so belastet seyn, daß sie eine größte Wirkung hervorbringen, verhält sich bei unveränderter Gestalt und Lage, beinahe wie die Geschwindigkeit des Windes. Ueber diesen Gegenstand bemerkt Ferguson, daß man sich fast nicht vorstellen könne, mit welcher Schnelligkeit sich die Enden der Flügel bewegen, wenn darauf ein mäßiger Wind wirke. Er hat mehrere Male die Anzahl von Umdrehungen gezählt, die die Flügel in 10 oder 15 Minuten machten, und aus der Länge der Arme von einem Ende bis zum andern hat er berechnet, daß, wenn ein Reifen von derselben Größe auf einem ebenen Boden mit derselben Geschwindigkeit liefe, er in einer Stunde 30 Meilen zurücklegen würde.

(11.) Die Last bei ihrem größten Werthe verhält sich beinahe wie das Quadrat der Geschwindigkeit des Windes, wenn nämlich die Gestalt und Lage der Flügel unverändert bleiben, sie ist jedoch etwas kleiner.

(12.) Die Wirkungen derselben Flügel im Maximum verhalten sich beinahe wie die Würfel der Geschwindigkeit des Windes, sie sind jedoch etwas kleiner.

(13.) Die Last derselben Flügel im Maximum verhält sich beinahe wie die Quadrate, und die Wirkung wie die Würfel der Anzahl von Umdrehungen in einer gegebenen Zeit.

(14.) Sind die Flügel so belastet, daß sie bei einer gegebenen Geschwindigkeit ein Maximum hervorbringen, und die Geschwindigkeit des Windes wächst, indeß die Last sich gleich bleibt, so wird die Zunahme der Wirkung, wenn die Geschwindigkeit langsam wächst, sich beinahe wie die Quadrate dieser Geschwindigkeiten verhalten; ist aber die Geschwindigkeit des Windes doppelt so groß, so werden die Wirkungen sich beinahe wie 10 zu $27\frac{1}{2}$ verhalten; und wenn die verglichenen Geschwindigkeiten mehr als das Doppelte von derjenigen sind, bei der die gegebene Last ein Maximum hervorbringt, so wachsen die Wirkungen beinahe im einfachen Verhältnisse der Geschwindigkeit des Windes. Daraus schließt Smeaton, daß Wind-

mühlen, wie die verschiednen Arten zur Ableitung des Wassers, viel von ihrer Wirkung verlieren, wenn sie gegen einen unveränderlichen Widerstand wirken.

(15.) Bei Flügeln von einer gegebenen Gestalt und Lage wird sich die Zahl von Umdrehungen in einer gegebenen Zeit umgekehrt wie der Halbmesser oder die Länge des Flügels verhalten.

(16.) Die Last im Maximum, welche Flügel von ähnlicher Gestalt und Lage bewältigen wird, verhält sich bei einem gegebenen Abstande von dem Bewegungsmittelpuncte wie der Würfel des Halbmessers.

(17.) Die Wirkungen von Flügeln von ähnlicher Gestalt und Lage verhalten sich wie das Quadrat des Halbmessers. Vergrößert man daher die Länge des Flügels ohne die Quantität Leinwand zu vergrößern, so wird die Kraft nicht größer; weil durch die Trägheit der Bewegung verloren wird, was man durch die Länge des Hebels gewinnt. Wenn daher die Flügel in ihrer Länge vergrößert werden, so wird, bei gleichbleibender Breite, die Wirkung sich wie der Halbmesser verhalten.

(18.) Die Geschwindigkeit der Enden der holländischen sowohl als der vergrößerten Flügel, sie mögen nun unbelastet, oder selbst bis zu einem größten Werthe belastet seyn, ist beträchtlich größer als die des Windes selbst. Dies geht aus den schon angeführten Beobachtungen von Ferguson, in Rücksicht auf die Geschwindigkeit der Flügel, deutlich hervor.

(19.) Aus mehreren Beobachtungen der verglichenen Wirkungen der Flügel verschiedner Arten schließt Smeaton, daß die vergrößerten Flügel die holländischen übertreffen.

(20.) Auch macht er mehrere richtige Bemerkungen über solche Windmühlen, auf die der directe Impuls des Windes vermittels Flügel wirkt, die an eine verticale Stange befestigt sind; seine Einwürfe sind, wie wir glauben, bei jedem Versuche durch die geringere Wirksamkeit dieser Horizontalmühlen gerechtfertigt worden.

„Der Nachtheil der Horizontalwindmühlen (sagt er) besteht nicht darin, daß jeder Flügel, wenn er dem Winde entgegengesetzt wird, einer geringeren Kraft fähig ist, als ein schiefer von denselben Dimensionen; sondern, daß bei einer Horizontalwindmühle wenig mehr als ein Flügel auf einmal wirksam seyn kann, während bei der gewöhnlichen Windmühle alle vier zusammen wirken; und ist daher jeder Flügel einer horizontalen Windmühle eben so groß als einer der verticalen, so wird offenbar die Kraft einer verticalen Mühle viermal so groß seyn als die Kraft einer horizontalen, wo die Anzahl der Flügel

beliebig ist. Dieser Nachtheil beruht auf der Natur der Sache; betrachten wir aber ferner den Nachtheil, der aus der Schwierigkeit entsteht, die Flügel wieder zurück gegen den Wind zu bringen u. s. w., so können wir uns nicht wundern, wenn wir finden, daß diese Art Mühlen nicht über $\frac{1}{9}$ oder $\frac{1}{10}$ der Kraft der gewöhnlichen Art besitzt; wie es sich auch bei mehreren Versuchen dieser Art gezeigt hat."

Coulomb's Versuche.

5. Coulomb, dessen Versuche die Aufklärung mehrerer Theile der praktischen Mechanik bezweckten, widmete auch einige Zeit der Lehre von den Windmühlen. Die Resultate dieser Arbeiten wurden in den Memoiren der Pariser Akademie für das Jahr 1781 bekannt gemacht. Die Mühlen, auf die er seine Aufmerksamkeit richtete, befanden sich in der Nachbarschaft von Lille und waren Oelmühlen. Der Abstand des Endes eines Flügels von dem entsprechenden Ende des entgegengesetzten war 70 Fuß, die Breite jedes Flügels $6\frac{1}{2}$ Fuß, wovon die Flügeldecke ausgespannt $5\frac{1}{2}$ Fuß einnahm, und auf der einen Seite an eine sehr dünne Bohle befestigt war; die Verbindungslinie der Bohle und der Flügeldecke bildet auf der Seite, wo der Wind antrifft, einen Winkel, der am Anfange des Flügels merklich hohl ist, sich aber nach und nach so verläuft, daß er am entfernteren Ende ganz verschwindet. Der Winkel mit der Axe ist in sieben Fuß Entfernung von derselben 60°, wächst aber beständig so, daß er am Ende beinahe bis auf 84° steigt. Die Axe, um die sich die Flügel drehen, ist unter verschiednen Winkeln bei verschiednen Mühlen geneigt, nämlich von 8 bis zu 15 Graden.

Coulomb schließt aus seinen Versuchen:

(1.) Daß das Verhältniß zwischen dem von dem Winde in einer Secunde beschriebenen Raume und der Anzahl der Umdrehungen eines Flügels in einer Minute, bei jeder beliebigen Geschwindigkeit des Windes ziemlich in einem constanten Verhältnisse stehen; dieses Verhältniß ist nämlich ungefähr 10 zu 6 oder 5 zu 3.

(2.) Daß die Quantität der Wirkung, welche der Impuls eines Windes erzeugt, der in der Secunde $21\frac{1}{3}$ englische Fuß Geschwindigkeit hat, einem Gewichte von 1080 Pfund Avoirdupoids-Gewichts gleich ist, welches in einer Minute 270 Fuß erhoben wird; die gewöhnliche Wirkung aber einem Gewichte von 1080 Pfund gleich ist, das in derselben Zeit 232 Fuß erhoben worden; daraus ergiebt sich, daß die Quantität der Wirkung, die durch Reibung u. dgl. vernichtet wird, beinahe $\frac{1}{7}$ der Quantität der vollen Wirkung ist.

(3.) Angenommen eine dieser Mühlen gehe 8 Stunden in einem Tage, so setzt Coulomb ihre tägliche gewöhnliche Wirkung derjenigen gleich, welche 11 Pferde an einem Rade hervorbringen.

(4.) Es ist bemerkenswerth, daß bei den meisten Windmühlen die Geschwindigkeit an dem Ende der Flügel größer ist als die des Windes. In manchen Fällen fanden sich sogar diese Geschwindigkeiten ungefähr in dem Verhältnisse von 5 zu 2. Nun leuchtet ein, daß der Stoß einer flüssigen Masse gegen eine beliebige Oberfläche nur dann einen Druck oder mechanische Wirkung erzeugen kann, wenn die Geschwindigkeit der Oberfläche, welche dem Impulse ausgesetzt ist, kleiner als die Geschwindigkeit des Fluidums ist; und daß der Druck verschwindet, wenn die Geschwindigkeit der Oberfläche gleich oder größer als die Geschwindigkeit des Fluidums ist. In dem letzteren Falle wird der Druck sogar gegen die Bewegung der Flügel wirken und nachtheilig seyn. Um daher von einer Windmühle alle mögliche Wirkung erlangen zu können, so ist es zu wünschen, die Anzahl der Umdrehungen so einzurichten, daß die Geschwindigkeit des Endes der Flügel geringer oder höchstens gleich der Geschwindigkeit des Windes ist.

Es würde sehr nützlich seyn, vergleichende Versuche über Windmühlen mit Rücksicht auf die Bestimmung der Geschwindigkeit des Endes der Flügel, welche der größten Wirkung entspricht, anzustellen.

(6.) Bezeichnet v die Geschwindigkeit des Windes in Fußen, die er in einer Secunde durchlaufen hat, t die Zeit einer Flügelumdrehung, A den Neigungswinkel der Flügel gegen die Axe und D den Abstand der Drehungsaxe von dem Puncte, auf den der Wind gar nicht wirkt, oder über den hinaus die Flügeldecke zusammengelegt werden müßte; so geben theoretische Betrachtungen folgende Formel:

$$D = 0{,}1092\ t\ v\ \text{tang. A.}$$

Beispiel. Es sey $v = 30$ Fuß in der Secunde; $t = 2{,}25$ Secunden und $A = 75°$; dann ist

$$D = 0{,}1092 \times 30 \times 2{,}25 \times 3{,}73205 = 27{,}509 \text{ Fuß.}$$

Dieses Resultat stimmt ziemlich genau mit einem von Coulomb's Versuchen überein, wo die Geschwindigkeit des Windes 30 englische Fuß in der Secunde war, die Flügel 17 Umdrehungen in einer Minute machten, und man genöthigt war, mehr als sechs Fuß von dem Ende jedes Flügels von 34 Fuß Länge zusammenzufalten, um eine größte Wirkung zu erhalten. Der Winkel A in diesem Abstande von dem Ende des Flügels war 75 bis 76°.

4. Abschnitt. Dampf und Dampfmaschinen.

Die ganze Kraft der Dampfmaschine hängt von der Anwendung des elastischen Dampfes ab, den man bei hohen Temperaturen aus Wasser erhält.

Dampf ist in der That höchst verdünntes Wasser, dessen Theilchen durch Verschluckung des Wärmestoffs ausgedehnt sind. Bei allen Temperaturen steigt das Wasser in Dunstgestalt auf, ob man gleich gewöhnlich annimmt, daß dies blos bei dem Siedepuncte stattfinde; geschieht aber die Verdunstung unter 212° Fahrenheit, so ist sie blos auf die Oberfläche der Flüssigkeit beschränkt; bei dieser Hitze von 212° aber bildet sich an dem Boden des Wassergefäßes Dampf, steigt herauf, führt die Hitze in einer latenten Form weg, und verhindert so die Erhöhung der Temperatur des Wassers. Bei dem gewöhnlichen Drucke der Atmosphäre erzeugt ein Cubikzoll Wasser ungefähr 1700 Cubikzolle (oder beinahe einen Cubikfuß) Wasserdampf; aber der Siedepunct verändert sich bei verschiednen Luftdrucken beträchtlich, und diese Anomalien haben auf die Dichtigkeit des erzeugten Dampfes Einfluß. So siedet im leeren Raume das Wasser ungefähr bei 70°, unter dem gewöhnlichen Atmosphärendrucke bei 212°, und wenn man ihn durch einen Druck von 5 Zoll Queckſilberhöhe vermehrt, so siedet das Wasser erst bei 217°, indem jeder Zoll Queckſilber bei dem Thermometer ein Steigen von ungefähr 1° verursacht.

Nach den vortrefflichen Versuchen des Dr. Ure in Glasgow ist die elastische Kraft dieses Dampfes bei 212° dem Drucke einer Queckſilbersäule von 30 Zoll Höhe oder ungefähr 15 Pfund des Avoirdupoids-Gewichts bei einem Quadratzolle gleich.

Bei der Temp.	212°	30 Zoll Queckſ.	15 Pfd. à Quad. Zoll.
	226,3	40	20
	238,5	50,3	25,15
	248,0	60	30
	257,5	69,8	34,9
	273,7	91,2	45,6
	285,2	112,2	56,1
	312	166	83

Herr Woolf hat bestimmt, daß bei diesen Temperaturen, die letzte ausgenommen, sich ein Cubikfuß Dampf zu einem ungefähr 5, 10, 20, 30 und 40 mal so großen Raume beziehungsweise ausdehnt; seine elastische Kraft bei einer solchen Ausdehnung ist in diesem Falle dem gewöhnlichen Drucke der Atmosphäre gleich.

Ein Pfund Newcastler Kohlen verwandelt 7 Pfund sieden-

des Wasser in Dampf; und die Zeit, welche erfordert wird, um eine gegebene Quantität Wasser in Dampf zu verwandeln, ist 6mal so groß als erfordert wird, um es von dem Gefrierpuncte bis zum Siedepuncte zu erhitzen.

Auch hat man gefunden, daß, wenn ein Scheffel Kohlen eine Stunde lang in einen gut eingerichteten Dampfkessel gebracht wird, und Dampf von der Expansivkraft von 15 Pfund auf den Quadratzoll erzeugt, derselbe streben wird, sich mit einer Geschwindigkeit von 1340 Fuß in der Secunde auszudehnen; zwei Scheffel Kohlen können dem Dampfe eine Expansivkraft von 120 Pfund für einen Quadratzoll, und eine Geschwindigkeit der Ausdehnung von 3800 Fuß in der Secunde geben. $1\frac{1}{2}$ Scheffel Kohlen würden bei demselben Dampfkessel Dampf bis auf den Druck von 50 Pfund auf einen Quadratzoll bringen; eine Höhe, die noch ohne Gefahr benutzt werden kann.

Hieraus leuchtet ein, daß, wenn Dampf nur angewendet wird, um die Luft aus einem geschlossenen Gefäße zu treiben, und dann durch Condensation einen leeren Raum zu erzeugen, man nicht mehr Wärme nöthig hat als hinreicht, um das angewendete Wasser bis auf 212° zu erhitzen; wenn man aber im Gegentheile Dampf verlangt, der hohe Druckkräfte geben soll, so wird das Wasser bedeutend höher bis auf 260°, 280° müssen erhitzt werden, und folglich nöthig seyn, das Brennmaterial, wiewohl nicht genau proportional, zu vermehren. Dies ist jedoch eine Betrachtung, auf die wir uns hier nicht einlassen können.

Wir sprechen nun zunächst von der Einrichtung der Maschine.

Die Grundsätze und Art der Wirkung der Dampfmaschine von Savery, Newcomen und Cawley und von Watt kann man aus folgenden kurzen Erläuterungen und Bemerkungen ersehen.

1. Man denke sich eine Saugröhre mit einem Ventil am obersten Ende, das sich aufwärts öffnet; sie steht mit einem verschlossenen Wasserkessel bis auf eine Höhe von nicht mehr als 33 Fuß über dem Niveau des Behälters in wirksamer Verbindung; drückt nun der Dampf des kochenden Wassers auf die Oberfläche des Wassers in dem Gefäße, so wird er dasselbe nöthigen, eben so viel höher als 33 Fuß zu steigen, als die elastische Kraft des Dampfes größer ist als die der Luft; und wird dann der Dampf durch Einsprützung von kaltem Wasser verdichtet und so ein leerer Raum gebildet, so wird der Kessel aus dem Behälter durch den Druck der Atmosphäre gefüllt

werden; wird dann, wie vorher, der Dampf wieder hinzugelassen, so wird dieses Wasser ebenfalls gehoben, und so fort.

Dies ist das Princip der ersten Dampfmaschine, als deren Erfinder die Engländer den Marquis von Worcester, die Franzosen aber Papin nennen; jedoch ist es, wie ich glaube, factisch, daß Brancas, ein Italiener, die Kraft des aus einer weiten Aeolipile getriebenen Dampfes als eine treibende Kraft für eine Stampfmaschine schon im Jahre 1629 anwendete. Dieser so dunkel in des Marquis von Worcester Century of inventions gegebene Wink ward vom Capitain Savery zur Ausführung gebracht.

2. Wird der Dampf auf den Boden eines hohlen Cylinders gelassen, in den ein luftdicht schließender Kolben eingelassen ist, so wird der Kolben von dem Unterschiede der elastischen Kräfte des Dampfes und der gewöhnlichen Luft hinaufgetrieben; ist dann der Dampf verdichtet, so wird durch den Druck der Atmosphäre der Kolben wieder heruntergehen und so fort. Dies ist das Princip der Dampfmaschine, das zuerst Newcomen und Cawley von Dartmouth entdeckt haben. Diese Maschine wird bisweilen die atmosphärische genannt, und ist gewöhnlich eine Druckpumpe, deren Kolbenstange an dem Ende eines Hebels befestigt ist, auf den das Gewicht der atmosphärischen Luft vermittels eines Kolbens an dem anderen Ende wirkt, während darunter durch eine plötzliche vermittels kalten Wassers bewirkte Verdichtung des Dampfes, der in den Cylinder, in dem der Kolben wirkt, gelassen worden, ein temporärer leerer Raum entstanden ist. Ist nun auf diese Art zum Theil ein leerer Raum hervorgebracht worden, so drückt das Gewicht der Atmosphäre den Kolben nieder, und hebt das andere Ende des Hebels zugleich mit dem hinzugekommenen Wasser. Dann entsteht sogleich auf dem Boden des Cylinders eine Oeffnung, durch die eine neue Quantität heißen Dampfes aus einem Dampfkessel, der sich darunter befindet, eindringt; diese wirkt als ein Gegengewicht gegen die Atmosphäre über dem Kolben; das Gewicht der Pumpenstangen am anderen Ende des Hebels bringt dieses Ende herab und erhebt den Kolben des Dampfcylinders. Die Dampf-Oeffnung wird hiermit sogleich verschlossen und ein Hahn geöffnet, um das kalte Wasser in den Dampfcylinder zu bringen, wo es den Dampf wieder zu Wasser verdichtet, und so unter dem Kolben einen leeren Raum erzeugt, so daß die Atmosphäre ihn wieder niederdrücken und die Pumpenstangen erheben kann, wie vorher; und so fort.

3. Wenn der Cylinder mit Dampf angefüllt ist und man öffnet ein Ventil, durch das dem Dampfe der Eingang in ein

anderes Gefäß gestattet wird, in das ein Strahl kaltes Wasser geführt werden kann, so ist die Verdichtung weit vollkommner, und der Dampf besitzt, wenn die Hitze des Cylinders unterhalten wird, seine volle Elasticität.

Diese von Watt angebrachte Verbesserung veränderte gänzlich den Charakter der Dampfmaschine; denn in den früheren Maschinen wurde die Kraft bis auf die Hälfte ihres wirklichen Werthes vermindert, so daß die bewegende Kraft, anstatt 15 Pfund auf jeden Quadratzoll des Flächenraums des Kolbens zu erreichen, nur bis auf ungefähr 8 Pfund gebracht war Bei der Maschine von Watt aber ist die bewegende Kraft nicht weniger als 12 Pfund auf jeden Quadratzoll des Kolbens.

4. Eine andere Verbesserung hat diese Maschine dadurch erhalten, daß man den Dampf in den Cylinder bald über bald unter dem Kolben einläßt, so daß die ganze Bewegung durch die Elasticität des Dampfes erzeugt wird, und von dem Gewichte der Atmosphäre unabhängig ist.

Auch diese Verbesserung verdankt man Watt, und sie konnte nur dadurch in das Werk gesetzt werden, daß man vorher den Dampf in einem besonderen Gefäße zu verdichten verstand. Sie ist vorzüglich geeignet, um durch die Dampfmaschine eine Drehungsbewegung hervorzubringen. Drei Jahre vorher, ehe Watt diese Verbesserung einführte, nämlich im Jahre 1778, nahm Washborough von Bristol ein Privilegium auf seine Veränderung einer wiederkehrenden (reciprocating) Bewegung in eine Drehung, und im Jahre 1781 bewirkte J. Steed dasselbe zuerst vermittels der Vorrichtung, die jetzt Kurbel (crank) heißt. Nach dieser Zeit haben Hornblower, Cartwright, Murray, Bramah, Trevithick, Maudslay, Woolf und andere schnell nach einander eine Reihe von Verbesserungen eingeführt, die die Dampfmaschinen äußerst wirksam und vollkommen gemacht haben.

5. Eine andere Verbesserung, die man Watt verdankt, ist die Expansionsmaschine, die er um's Jahr 1769 erfand. Das Princip dieser Erfindung besteht, wie Partington richtig bemerkt, darin, daß das fernere Eintreten des Dampfes aus dem Kessel verhindert wird, wenn der Kolben bis auf einen gewissen Punct in dem Cylinder niedergedrückt ist, indem man den übrigen Raum mit der Expansivkraft des schon erzeugten Dampfes erfüllen läßt. *)

---

*) Man vergleiche Brewster's und Robison's mechanische Philosophie, Th. 4, S. 126.

Zur genauen Regulirung der Zeit, wo sich das Ventil verschließen und der hinzugelassene Dampf aufsteigen soll, wendete Watt plug-frame mit beweglichen Wirbeln an, welches so eingerichtet ist, daß das Dampfventil zufällt, wenn der Kolben ein Halb, ein Drittel, ein Viertel u. s. w. herabgegangen ist. Hierdurch wird der Kolben genöthigt, gleichförmig herabzugehen, da sich der Druck darauf beständig vermindert, so wie der Dampf schwächer und schwächer und folglich die beschleunigende Kraft verringert wird.

6. Das Princip der Dampfmaschinen mit hohem Drucke beruht auf dem Vermögen des Dampfes, sich bedeutend über seinen ursprünglichen Umfang durch Hinzufügung einer gegebenen Quantität Wärmestoffs auszudehnen, so daß er auf diese Art eine beträchtliche Elasticität (gleich 40 bis 60 Pfund auf jeden Quadratzoll) erlangt, welche zur Bewegung eines Kolbens angewendet wird. Einer der größten Vortheile bei der Anwendung der elastischen Kraft des Dampfes nach dieser Einrichtung der Dampfmaschine besteht in der augenscheinlichen Ersparung des Wassers, das gewöhnlich zur Verdichtung angewendet wird; und dies ist bei den fortbewegenden Maschinen für Dampfwagen ein höchst wichtiger Gegenstand. Die erste Beschreibung einer Dampfmaschine dieser Art findet man in Leupold's Theater der Maschinen, das im Jahre 1724 in Deutschland herauskam. Der Apparat besteht aus zwei Cylindern, die in einer mäßigen Entfernung von einander aufgestellt sind; jeder derselben ist mit einem luftdichten Kolben versehen, welcher mit einer Druckpumpe in Verbindung steht. Wenn Dampf von beträchtlicher Elasticität auf den Boden des ersteren Cylinders gelassen wird, so ist der Kolben genöthigt aufzusteigen, und hebt dadurch den Hebel der Pumpe; zugleich wird der Dampf oder die Luft aus dem anderen Cylinder getrieben. Bei Wiederholung oder vielmehr Umkehrung dieser Operation wird dem Dampfe der Eintritt in den zweiten Cylinder gestattet, der ebenfalls mit dem Kessel in Verbindung steht, während der Dampf in dem ersten Cylinder an die freie Luft treten kann. Auf diese Art hat, wie man bemerken wird, der Prozeß der Verdichtung keinen Zusammenhang mit dem Principe der Dampfmaschinen mit hohem Drucke; und selbst die Ausdehnungskraft des Schießpulvers kann zur Erzeugung eines ähnlichen Effects angewendet werden.

7. Wir haben schon Woolf's Erfindung erwähnt, daß man nämlich eine Quantität Dampf von der Kraft von 5, 6, 7 oder mehr Pfunden auf jeden Quadratzoll des Kessels sich auf ein gleich vielfaches Volumen ausdehnen läßt, das immer einen der Atmosphäre gleichen Druck besitzt, vorausgesetzt, daß

der Cylinder, in dem die Ausdehnung geschieht, dieselbe Temperatur hat, als der Dampf besaß, bevor er sich auszudehnen begann.

Bei der Anwendung dieses Principes erspart man am meisten durch die Anbringung zweier Cylinder und Kolben von ungleichem Caliber an einen Kessel von hohem Drucke; der kleinere derselben muß sowohl an seinem oberen als unteren Ende eine Verbindung mit dem Dampfkessel haben. Ueberdies wird auch eine Verbindung zwischen dem oberen Theile des kleineren Cylinders und dem Boden des größeren, und umgekehrt, bewerkstelligt. Ist nun die Maschine in Thätigkeit gesetzt, so wird dem Dampfe von hoher Temperatur gestattet, durch seine elastische Kraft auf eine Seite des kleineren Kolbens zu wirken, während der Dampf, der ihn zuletzt in Bewegung gesetzt hat, mit dem weiteren oder Verdichtungs-Cylinder Verbindung hat. Haben beide Kolben die oberste Stelle ihrer Cylinder eingenommen, und es wird Dampf von einem Drucke gleich 40 Pfund auf jeden Quadratzoll herzugelassen, so wird der kleinere niedergedrückt werden, während der Dampf unter ihm, anstatt daß ihm ein Ausgang in die Atmosphäre oder in den Verdichtungskessel, wie in der gewöhnlichen Maschine, gestattet wird, genöthigt ist, in den größeren Cylinder über den Kolben desselben zu treten, wodurch derselbe zu gleicher Zeit mit dem Kolben in dem kleineren Cylinder niedergedrückt werden wird; und während dieses Processes wird der Dampf, der zuletzt den größeren Cylinder anfüllte, in den Condensator treten, um während des Niedertreibens einen leeren Raum zu bilden.

Um den Kolben wieder hinaufzutreiben, ist es blos nöthig, die Wirkung der Cylinder umzukehren; dies wird aber durch den Druck des Dampfes im oberen Theile des kleinen Cylinders unter dem Kolben des großen Cylinders bewirkt werden; indem man auf diese Art den Dampf abwechselnd auf die verschiednen Seiten des kleineren Kolbens läßt, während der Dampf, dem zuletzt der Eingang in den kleineren Cylinder gestattet wurde, regelmäßig auf die verschiednen Seiten des größeren Cylinders tritt, wird die Verbindung zwischen dem Condensator und dem Dampfkessel bei jedem einzelnen Zuge umgekehrt.

Partington berichtet von einer solchen Expansions-Maschine mit doppeltem Cylinder, die für Wheal Vor mine in Cornwallis im Jahre 1815 gebaut wurde. Bei dieser hat der größere Cylinder bei 53 Zoll Durchmesser neun Fuß Spielraum; der kleinere Cylinder hat ungefähr $\frac{1}{5}$ Inhalt des großen. Die Maschine treibt sechs Pumpen und erhebt bei jedem Stoße eine Last Wasser von 37982 Pfund Gewicht $7\frac{1}{2}$ Fuß hoch;

dies erzeugt auf der Oberfläche des großen Kolbens einen Druck von 14,1 Pfund für jeden Quadratzoll, wovon im Durchschnitt die Wirkung ist, daß mit einem Scheffel Kohlen 46000000 Pfund einen Fuß hoch gehoben werden.

8. Um die vorhergehenden Bemerkungen und Beschreibungen noch einleuchtender zu machen, wollen wir die ausführlichere Beschreibung einiger Maschinen geben. — Die erste Figur auf Tafel II. stellt einen verticalen Schnitt der verschiednen Theile einer Dampfmaschine mit hohem Drucke dar, die nach einem Principe verfertigt worden ist, in dem, so weit es möglich ist, Einfachheit und Kraft verbunden, und worin die Theile so zusammengestellt sind, daß eine Einsicht in diese Maschinen auch denjenigen erleichtert wird, welche noch keine Gelegenheit gehabt haben, sie sorgfältig zu prüfen. Der Verfertiger ist Oliver Evans; auch ist in der Zeichnung alles weggelassen worden, was bei einer populären Beschreibung der Wirkung nicht wesentlich nothwendig ist.

A ist der Durchschnitt des Kessels senkrecht auf seine Axe. Er besteht aus zwei Cylindern, von denen einer sich innerhalb des andern befindet (da die Cylinder-Gestalt am geeignetsten ist, einer starken Expansiv-Kraft Widerstand zu leisten). Das Feuer wird in dem inneren Cylinder, der als Ofen dient, angezündet, das Wasser aber befindet sich zwischen beiden. Sind der Dampf und die erhitzte Luft durch den inneren Cylinder seiner ganzen Länge nach gegangen, so treten sie am anderen Ende heraus, und werden unter den Speisungs- oder Hülfskessel B geleitet, wo sie das Wasser erhitzen, was in den großen Kessel zu treten bestimmt ist, um dasjenige zu ersetzen, was in Dampfgestalt entflohen ist und der Maschine Bewegung ertheilt hat. C ist die Unterhaltungspumpe, die bei jenem Zuge des Kolbens und der entsprechenden Bewegung des großen Baums eine kleine Quantität kalten Wassers erhebt, und es in den Hülfskessel zu treten nöthigt. Das Wesentliche dieses Theiles des Apparats kann man mit wenigen Worten erläutern. Würde der Verlust des Wassers in dem großen Kessel durch seine Verwandlung in Dampf auf ein Mal durch das kalte Wasser aus der Pumpe ersetzt, so würde die Temperatur des Wassers in dem großen Kessel vermindert werden und die Erzeugung des Dampfes verhältnißmäßig gehemmt. Wenn aber das Wasser, bevor es aus der Pumpe in den großen Kessel tritt, erst durch den Hülfskessel geht, in dem es erhitzt wird, so kommt es in den großen Kessel, ohne die Temperatur des Wassers, die derselbe enthält, zu vermindern und ohne folglich der Wirkung der Maschine Hindernisse in den Weg zu legen. Die Bestimmung der Größe der beiden Kes-

sel sowohl als der Unterhaltungspumpe nimmt die Geschicklichkeit und Urtheilskraft des Verfertigers in Anspruch, damit der Zuschuß weder zu gering noch zu stark, sondern hinlänglich sey.

Der Dampf erhebt sich in der Röhre und kann, wenn sich bei D der Injectionskolben (injection sucker) öffnet, in die Maschine treten; öffnen sich dann auch die Ventile E und F, so wird der Dampf den Kolben G in das untere Ende des Cylinders treiben, wie es die Zeichnung darstellt. Der Dampf, der sich im Cylinder befand, wird vor dem Kolben hergetrieben, und entweicht durch das Ventil F. Sobald der Kolben auf den Boden des Cylinders gekommen ist, fallen die Ventile zu, die andern Ventile H und I aber öffnen sich; der Dampf dringt bei H ein und hebt den Kolben, weil der schwächere Dampf, der in dem oberen Theile des Cylinders enthalten ist, durch das Ventil I entweicht und dem Aufsteigen des Kolbens nur schwachen Widerstand entgegensetzt. Diese vier Kolben werden von zwei Rädern K und L in Bewegung gesetzt, die an ihrem Rande Zähne haben, die gegen vier Hebel drücken, an denen Stangen angebracht sind, welche sie auf diese Weise in den angemessenen Intervallen nöthigen sich zu öffnen oder genau zu verschließen. (Diese Hebel sind in der Figur zur Vermeidung von Verwirrung weggelassen worden.)

Die Bewegung des Kolbens G ertheilt der Stange MN eine wiederkehrende Bewegung; die Kurbel und Verbindungsstange MO aber erzeugen eine Drehungsbewegung, die durch das Schwungrad QR regulirt wird. Durch ähnliche Operationen öffnen und schließen sich die Ventile E, F, H, I abwechselnd, und erneuern die Bewegung der Maschine. Die gezähnten Räder S, T, von gleichen Durchmessern setzen die Räder L und K in Bewegung, und die Stange MN theilt die erhaltene Bewegung dem Druckkolben der Unterhaltungs-Pumpe C mit. Auf diese Art wird die Bewegung des Ganzen nicht unterbrochen; hat das Rad V 66 Zähne und greift in das Rad U von 23 Zähnen ein, so erzeugt es, nämlich in Beziehung auf den Mühlstein W, für jede 35 Züge des Kolbens G 100 Umdrehungen, das heißt 100 Umdrehungen in einer Minute, wenn der Kolben 35 Züge in demselben Zeitintervalle macht.

Das gezähnte Rad V kann auch zu manchen andern Verrichtungen benutzt werden. Anstatt des Rades kann eine Kurbel angebracht werden, um eine Pumpe oder eine Säge in Bewegung zu setzen; und die Maschine kann durch Modificirung der Kraft des Dampfes 10 bis 100 Kolbenzüge in der

Minute, nach dem Zwecke, für den die Maschine bestimmt ist, hervorbringen. Hat der Dampfcylinder 8 Zoll Durchmesser, so wird er auf einen Mühlstein von 5 Fuß Durchmesser die gehörige Wirkung auszuüben vermögen, oder irgend ein Werk verrichten, das eine gleiche mechanische Kraft erfordert.

Wenn der Dampf die Maschine verläßt, so entweicht er durch die Röhre XX und wird in der Luft über dem oberen Theile der Maschine verflüchtigt; oder wenn der Verfertiger es bezweckt, dann, wenn ein Condensator angebracht ist, in denselben treten; auch kann man ihn an dem Hülfskessel hinstreichen lassen, um das Wasser, das derselbe enthält, zu erhitzen.

Y ist das Sicherheitsventil, das von einem Hebel in seiner Lage erhalten wird, der wie bei der Schnellwaage in Grade eingetheilt ist, um die Kraft des Dampfes zu wägen und ihr so das Gleichgewicht zu halten. Dieses Ventil erhebt sich und läßt Dampf herausgehen, wenn die elastische Kraft desselben größer wird als das Werk der Maschine es erfordert. Das Gewicht ist im Allgemeinen so an dem Hebel angebracht, daß sich das Ventil öffnet, wenn der Druck des Dampfes auf einen Quadratzoll des inneren Theils des Kessels ungefähr halb so groß wird, als wofür die Dicke und Stärke des Materials eingerichtet ist.

Um die Wiederholung der Unfälle zu vermeiden, welche bisweilen auf Dampfbooten vorgekommen sind und zuerst die Aufmerksamkeit der Regierung auf diesen wichtigen Theil der Maschine geleitet haben, scheint es rathsam, das Sicherheitsventil in ein eisernes Kästchen einzuschließen, und es so unter die besondere Aufsicht des Maschinen-Aufsehers zu stellen.

Das Ganze der eben beschriebenen Maschine ist in seiner Zusammenfügung sehr einfach und leicht von gewöhnlichen Mechanikern oder Mühlenbauern auszuführen. Die Oeffnungen für den Durchgang des Dampfes sind einfache Metallplatten, jede mit einem Loche versehen, auf welches das Ventil, um es zu verschließen, leicht fallen kann: sie werden in einer gewöhnlichen Gießerei sehr leicht verfertigt.

9. Dampfmaschinen-Fabriken sind jetzt sehr zahlreich, besonders in den Districten, in denen viel Maschinen erfordert werden. Sehr berühmt sind die von Maudslay, vorzüglich für den Fall, wo es nöthig ist, eine Maschine auf einem kleinen Raume anzubringen, wie z. B. bei Dampfbooten u. s. w. Nächst den Maudslay'schen haben sich die Maschinen der Herren Fenton, Murray und Wood, von Leeds vielleicht am meisten ausgezeichnet. Da der Bau ihrer Maschinen gewiß eine Erklärung der Art ihrer Wirkung verdient, so ge-

ben wir hier aus einem sehr nützlichen Werke, Smith's Panorama der Wissenschaften und Künste, eine Beschreibung von einer derselben.

Auf Tafel III. stellt A den Dampfkessel dar, der fast drei Quart Wasser aufnehmen kann; der Boden ist beträchtlich hohl, die Seiten ein wenig, damit er desto stärker die Kraft der Flamme, die ihn umgiebt, aufnehmen kann. Die Kessel sind gewöhnlich von einer länglichen Gestalt, und mit einer Haube versehen, die abgenommen werden kann, damit jemand hinein kann, um sie, wenn es nöthig ist, zu reinigen; sie haben ebenfalls ein sogenanntes Sicherheitsventil, das sich aufwärts öffnet und so belastet ist, daß der Dampf herausgehen kann, wenn er stärker ist als es die Maschine erfordert, da er zurückgehalten den Kessel zerplatzen könnte; auch ist es nicht ungewöhnlich zwei Kessel zu haben, damit der Gang der Maschine nicht aufgehalten wird, wenn der eine eine Reparatur erfordert.

B ist eine Einrichtung zur Regulirung des Feuers, um eine Glocke in Bewegung zu setzen, welche die Quantität Kohlen und die Feuerungszeit regulirt.

C die Dampfröhre von dem Kessel zum Ventil I.

D der Dampfcylinder, gewöhnlich nur „der Cylinder" genannt; sein oberer und unterer Theil steht mit dem Ventile I in Verbindung.

E der Kolben, der durch die Kolbenstange e den Baum F in Bewegung setzt, dessen anderes Ende durch eine andere Stange g vermittels einer Kurbel das schwere Schwungrad G in Bewegung setzt. — Hat nun auf diese Art die Maschine zu wirken angefangen, so ist alle ihre Kraft am Schwungrade vorhanden, so daß hier der Mechanikus nach Belieben darüber bestimmen kann.

H ist ein eccentrischer Kreis *) in der Axe des Schwungrades; er setzt durch seine Hebel, wie man leicht aus dem blosen Anblicke ersehen wird, das Ventil I in Bewegung.

I ist ein Ventil, das keine Belastung erfordert, um dampfdicht zu verschließen, da es immer einen leeren Raum unter sich hat; es entspricht dem Zwecke der vier Ventile in den doppelwirkenden Maschinen, und kann, wegen der Einfachheit seiner Zusammenfügung, wenn es zuerst gut gearbeitet ist, nicht in Unordnung gebracht werden.

---

*) Die Mechaniker bezeichnen mit eccentrischem Kreise ein Rad, dessen Axe mit Absicht nicht durch den wirklichen Mittelpunct geht, sondern sich auf einer Seite desselben befindet.

K ist ein Ventil, das Dampf herzuläßt, mit einem Hebel versehen, der mit einem in der Figur nicht dargestellten Gubernator in Verbindung steht und die Schnelligkeit der Maschine regulirt. Man sehe Seite 267.

L der Cylinder der Entleerungspumpe, um das Wasser und den nicht verdichteten Dampf aus dem Condensator M zu ziehen.

N ein kleiner Behälter mit Wasser angefüllt. In diesen Behälter geht eine Röhre vom Condensator M, welche oben mit einem Ventile, dem Blasventile (blow-or snifting-valve), bedeckt ist. Durch dieses Ventil wird die Luft, welche in dem Cylinder D enthalten ist und daraus hervortritt, frei, wenn die Maschine in Bewegung gesetzt ist.

O die Ausführungsröhre, welche den Dampf von dem Ventile I in den Condensator M leitet.

P die Pumpe, welche dem Behälter SS, in dem der Condensator und die Entleerungspumpe sich befinden, Wasser zuführt.

QQ eiserne Säulen, deren die Maschine vier hat, wiewohl blos zwei dargestellt sind; sie befinden sich auf einer einzigen Platte, die hier von der Seite gesehn und auf der die Hauptheile der Maschine befestigt sind; auf diese Art werden der Baum (Balancier) und seine Verbindungsstangen getragen, ohne mit einem Theile des Gebäudes in Verbindung zu stehen, ausgenommen mit dem Grunde unter der Fläche, auf der sie stehen.

RR der Grund unter der Fläche, wo sich der Behälter, die Entleerungspumpe, der Condensator u. s. w. befinden. Diese Einrichtung setzt diese Maschinen in den Stand, befestigt und versucht zu werden, bevor man sie verschickt, wodurch die Wiederbefestigung leicht und gewiß gemacht wird. Maschinen, nach diesem Plane verfertigt, gewähren eine Kraft von zwölf Pferden.

Bevor die Maschine in Anwendung gebracht wird, sind der Cylinder D, der Condensator M und die Durchgänge zwischen ihnen mit gewöhnlicher Luft angefüllt, die nothwendig daraus vertrieben werden muß. Um dies zu bewirken, wird durch Oeffnung von Ventilen eine Verbindung zwischen der Dampfröhre C, dem Raume unter dem Kolben im Cylinder D, der Ausführungsröhre O und dem Condensator M hervorgebracht. Der Dampf wird nicht sogleich in den Cylinder D treten, wenigstens nicht viel, weil die Luft Widerstand leistet; aber der Dampf in der Ausführungsröhre und dem Condensator M treibt sie stark vor sich her, und dieser Theil der Luft geht durch das Ventil und das Wasser des Behälters N heraus.

Nun verschließt sich das Dampf zulassende Ventil und der schon zugelassene Dampf wird in Wasser verwandelt, und zwar theils durch die Kälte des Condensators M, vorzüglich aber durch einen Wurf kalten Wassers, das ein Hahn hereinsprützt, der von dem Wasser, in das der Condensator getaucht ist, geöffnet wird. Ist der Dampf verdichtet, so würde der ganze Raum, den er einnahm, leer seyn, wenn sich nicht die Luft in dem Cylinder D ausdehnte und den ganzen Raum erfüllte, den ihre frühere Quantität einnahm; aber durch erneuerte Ausleerung der Luft wird auch noch die übrige entfernt, und der Cylinder wird nur mit Dampf angefüllt. Man nehme nun an, der Cylinder werde unter dem Kolben mit Dampf angefüllt, jedoch weiter kein Dampf zu diesen Theil desselben gelassen, während die Verbindung zwischen ihm und dem Condensator offen bleibt, so leuchtet ein, daß in dem Cylinder bald ein leerer Raum entstehen wird, weil, sobald der Dampf den Cylinder erreicht hat, er durch die Kälte desselben und einen Wurf kalten Wassers verdichtet wird. In diesem Augenblicke wird daher der Dampf über den Kolben gelassen, der nun sogleich niedergeht. Sobald der Kolben den Boden des Cylinders erreicht hat, wird der Dampf auf die untere Seite desselben gelassen, und da die Verbindung der oberen Seite des Kolbens mit dem Condensator offen ist und der fernere Zutritt des Dampfes auf diese Seite während des Aufzugs verhindert wird, so geht der Dampf, der den Kolben niedergedrückt hat, in den Condensator und wird in Wasser verwandelt.

Die Bewegung des Kolbens E, durch abwechselnden Zutritt und Vertreibung des Dampfes auf jeder Seite desselben, wird nothwendig auf diese Art fortgesetzt, und der Abstand seines höchsten Standes vom tiefsten heißt die Länge seines Zuges. Durch die Verbindungsstange e theilt er dem großen Baume F seine wechselnde Bewegung mit und daher durch eine andere Verbindungsstange und eine Kurbel dem Schwungrade G.

Um die schnelle Vermehrung der Kraft bei Vergrößerung der Maschine zu erklären, muß man bemerken, daß die gewöhnlich angewandte Dampfkraft etwas größer als der Druck der Atmosphäre ist; setzt man sie aber nicht größer voraus, so wird, wenn der Druck der Atmosphäre 15 Pfund auf jeden Quadratzoll ist, der Kolben 16 Zoll Durchmesser und 201 Quadratzoll Oberfläche hat, er abwechselnd von einer 3015 Pfund gleichen Kraft erhoben und niedergedrückt werden. Hier ist die Reibung nicht berücksichtigt worden, aber nach den in dieser Beziehung erforderlichen Bestimmungen, die auf ein Drit-

tel berechnet werden können, ist die disponible Kraft der Maschine bei jedem Kolbenzuge immer noch sehr groß.

Der Condensator M und die Entleerungspumpe L stehen vermittels einer Horizontal-Röhre, die ein Ventil y enthält, das sich gegen die Pumpe zu öffnet, in Verbindung. Der Kolben l der Entleerungs-Pumpe enthält ebenfalls zwei Ventile, und der Behälter T, am obersten Theile des Pumpen-Cylinders, hat zwei andere Ventile, die, gleich denen des Kolbens l, sich aufwärts öffnen. Wenn der Kolben E des Cylinders niedergedrückt ist, so wird der Kolben l der Entleerungs-Pumpe, was auf den ersten Anblick in die Augen springt, ebenfalls niedergedrückt und seine Ventile öffnen sich, während sich das Ventil y verschließt; daher geht das Wasser des verdichteten Dampfes sowohl als das hineingesprützte, und jedes permanent elastische Gas, das daselbst sich erzeugen mag, durch das Ventil y und dann durch den Kolben l; wird nun dieser Kolben hinaufgezogen, so verschließen sich seine Ventile, und verhindern das Zurückweichen der Flüssigkeiten wie in einem gewöhnlichen Pumpwerke. Das Wasser und Gas, das so über den Kolben gelangt ist, öffnet, so bald sich dieser erhebt, die Ventile an dem Boden des Behälters T, hier bleibt das Wasser, bis dieser voll ist, das Gas aber tritt in die Atmosphäre. Da das Wasser in dem Behälter T sehr heiß ist, so wird es bisweilen, um Feuerung zu ersparen, heraufgepumpt und in den Kochkessel zurückgebracht, indem man den Pumpenstock an den großen Baum befestigt. Der Nutzen der Entleerungspumpe L wird jetzt einleuchten, indem man nothwendig begreift, wie viel besser sie zur Vervollkommnung des leeren Raumes im Cylinder D wirkt, als wenn das Wasser aus dem Condensator sogleich durch eine Röhre ausliefe.

Da der Dampf unablässig in den Condensator M tritt, so äußert er ein beständiges Streben, sowohl dieses Gefäß als das Wasser des Behälters SS, in dem dasselbe steht, zu erhitzen; der ganze Dampf würde deswegen, wenn man es nicht verhinderte, nicht verdichtet werden, oder die Verdichtung würde nicht schnell genug seyn, da das eingesprützte Wasser selbst aus diesem Behälter herausfließt. Man läßt daher einen Theil des Wassers durch eine weite Röhre aus diesem Behälter fließen, und eine gleiche Quantität kalten Wassers wird von der Pumpe P ersetzt.

In der Newcomen'schen oder der atmosphärischen Maschine war der Cylinder an dem oberen Theile offen, und daher trug die Luft während des Herabgehens des Kolbens sehr stark zur Abkühlung desselben bei; bei den neueren Maschinen aber, wo sowohl bei dem Erheben als dem Niederdrücken des Kolbens

der Dampf die active Kraft ist, wird der obere Theil des Cylinders mit einem eisernen Deckel verschlossen, so daß auch kein Atom Dampf, außer in der gehörigen Zeit, in den Condensator treten kann. Damit die Verbindungsstange e frei wirken kann, und dennoch die wünschenswerthe Eigenschaft der Dampfdichtigkeit besitze, so geht sie durch eine sogenannte Stopfbüchse. Diese besteht aus einem Stoffe, den der Dampf eher zu seinem Zwecke geschickter macht als ihn verdirbt; Leder, welches zum Verstopfen oder zu Bändern bei Maschinen, die der Hitze nicht unterworfen sind, gebraucht wird, ist hier nicht anwendbar; Hanfgarn wird gewöhnlich angewendet. Die Stange des Kolbens I geht durch eine Stopfbüchse der nämlichen Art als die des Kolbens E; und die Kolben selbst sind rund herum gefüttert.

Der Cylinder D wird von einem Gehäuse eingeschlossen, so daß er nicht durch Berührung mit der äußeren Luft abgekühlt werden kann. Das Ende oder irgend ein gegebener Punct, der vom Mittelpuncte des großen Baums entfernt ist, kann nur einen Kreisbogen beschreiben; jedoch ist es nothwendig, daß die Kolbenstange e vertical sich erhebt und fällt. Newcomen bewirkte dies dadurch, daß er das Ende der Stange in den Kreisbogen brachte, dessen Halbmesser dem Abstande von dem Mittelpuncte der Stange gleich war; über diesen Bogen ging eine Kette, und war an dem höheren Ende desselben befestigt; diese einfache Erfindung entsprach wirklich dem Zwecke, weil der wirksame Zug in dieser Maschine nur niederwärts war; aber hier, bei einer Doppelkraft-Maschine, wo der Zug sowohl aufwärts als niederwärts geht, würde die Kette bei dem Aufsteigen nachgeben und ganz unpassend seyn. Man bedient sich daher einer andern Einrichtung, der sogenannten parallelen Verbindung, die man leicht aus der Zeichnung verstehen wird. Auf diese Art steigt und fällt nicht nur der Stab e senkrecht, sondern ist vollkommen starr, und theilt alle seine Bewegung dem großen Baume in jeder Richtung seiner Bewegung mit. Der Verbindungsstab g erfordert nicht dieselbe Vorrichtung, weil er nicht senkrecht steigt und fällt, da sein unteres Ende mit dem äußeren Ende der Kurbel einen Kreis beschreibt; er hat daher nur eine einfache Verbindung, die diese Ablenkung erlaubt.

Um dem Schwungrade eine Drehungsbewegung zu ertheilen, kann man anstatt der Kurbel sich einer Erfindung bedienen, die dem Rade die doppelte Schnelligkeit ertheilt. Zu diesem Zwecke wird auf der Außenseite der Axe des Rades, wo die Kurbel auf der Tafel angegeben ist, ein kleines gezähntes Rad befestigt, das nur von dem Schwungrade bewegt wer-

den kann; an dem Ende der Stange g und an der Seite derselben, welche dem Schwungrade zunächst ist, wird ein anderes gezähntes Rad befestigt, so jedoch, daß es sich nicht um seine Axe drehen kann, sondern mit der Stange, an die es befestigt ist, steigen und fallen muß. Diese beiden Räder greifen in einander, und das eine, das an die Verbindungsstange befestigt ist, kann sich von dem anderen nicht entfernen, weil ihre Mittelpuncte durch einen Riemen oder eine eiserne Stange verbunden sind. Wenn daher der Verbindungsstab aufsteigt, so bewegt sich das Rad, welches darauf angebracht ist, um den Umkreis des Schwungrades.

Auf diese Art macht das Schwungrad bei jedem Kolbenzuge eine volle Umdrehung, und manche Künstler glauben, daß sie durch eine solche Anordnung viel gewinnen; gewiß ist die Erfindung sehr elegant; aber, was den Nutzen betrifft, so ist eine Kurbel vorzuziehen; denn sie ist ja einfacher, wohlfeiler und kann schwerer in Unordnung gerathen, und ist das Schwungrad groß genug, um bei geringer Geschwindigkeit jedes Moment, das ihm mitgetheilt werden kann, zu erhalten, so wird es gewiß keine geringere Wirkung hervorbringen.

10. Fortbewegende Dampfmaschinen, Dampfwagen, oder solche, die auf Räder gebracht, nicht nur sich selbst, sondern auch dazu eingerichtete Wagen, die an sie angehangen werden, forttreiben, wurden ungefähr im Jahre 1804 von Trevithick in Cornwall erfunden. Sie sind jetzt in den nördlichen Kohlendistricten im beständigen Gebrauche; ihre eigenthümliche Construction wird man leicht aus folgender Beschreibung, die Tredgold von den Maschinen giebt, deren man sich auf der Hetton-Eisenbahn bedient, ersehen.

Die Räder der Kohlwagen, die von den Maschinen gezogen werden, haben 2 Fuß 11 Zoll Durchmesser, mit 10 Speichen, und wiegen $2\frac{3}{4}$ Centner. Ihre Axen haben drei Zoll Durchmesser und drehen sich in befestigten Nebenringen herum.

Das Gewicht jeder Maschine ist ungefähr = 8 Tonnen. Sie besteht aus einem Kessel von 4 Fuß Durchmesser, mit einem inneren Feuerplatze. Der Rauch steigt vom Feuer durch einen Kamin von ungefähr 12 Fuß Höhe auf; die unteren drei Füße des Kamins bestehen aus Eisenplatten von 6 Pfund auf den Quadratfuß, und der übrige Theil von Eisen von $2\frac{1}{2}$ Pfund auf den Fuß. Der Durchmesser der Kolben ist 9 Zoll und die Länge ihres Spielraums 2 Fuß; die Kolben machen ungefähr 45 Doppel-Züge in der Minute. Der Dampf wird durch Ventile, auf welche eccentrische Räder an der Axe des Maschinenwagens wirken, in die Cylinder gelassen. Der Druck

des Dampfes in dem Kessel beträgt 40 bis 50 Pfund auf jeden Quadratzoll.

Die Räder des Dampfwagens haben 3 Fuß 2 Zoll im Durchmesser und jedes 12 Speichen; jedes aber wiegt $2\frac{3}{4}$ Centner. Die Axen haben $3\frac{1}{2}$ Zoll Durchmesser, und sind durch eine Kette ohne Ende verbunden, die auf ein Rad an jeder Axe wirkt, so daß beide Axen des Wagens in demselben Verhältnisse gedreht werden können. Der Kessel ruht auf dem Wagen vermittels vier schwankender Kolben, welche den Zweck von Federn erfüllen, nämlich den Druck auf die Räder gleichförmig machen und die Stöße des Wagens mildern. Ein schwankender Kolben ist wie der Dampfkolben einer Dampfmaschine befestigt und hat eine kurze Kolbenstange von $1\frac{1}{2}$ Zoll Durchmesser, welche auf dem metallenen Ringe ruht, in dem die Axe des Rades sich dreht. Das Wasser in dem Kessel drückt auf die obere Fläche des Kolbens, und wie groß auch die Erhebung oder Niederdrückung sey, der Druck auf das Rad ist beinahe derselbe. Diese sinnreiche Erfindung, welche die Feder ersetzt, rührt von Losh und Stephenson von Newcastle an der Tyne her, und erhielt im Jahre 1816 ein Privilegium.

Die zweite Figur der zweiten Tafel stellt einen Dampfwagen u. s. w. dar; A ist der Kessel und BB sind die Dampf-Cylinder; der Platz für das Feuer ist im Kessel und F ist der Eingang dazu; C ist der Kamin; DD sind die schwankenden Kolben, welche den Wagen an den Axen unterstützen und als Federn dienen, indem sie bewirken, daß derselbe gleichmäßig auf die Axen drücke. Da die bewegende Kraft in derselben Zeit auf die Räder der beiden Axen nicht gleich wirkt, so ist es nothwendig, die Axen durch eine Kette G zu verbinden, die auf gezähnte Räder auf den Axen wirkt. Das Wasser für den Kessel und die Kohlen in b für das Feuer werden durch einen kleinen Wagen herzugeschafft, welcher der Aufwärter heißt; I ist das Wasserfaß und a eine Röhre, die das Wasser zu der Druckpumpe H führt, auf die die Maschine wirkt; WW sind Kohlenwagen, von denen jeder 53 Centner Kohlen enthält. 13 bis 17 dieser Wagen werden in einem Zuge von einem Dampfwagen gezogen; sie sind durch die kurzen Ketten cc verbunden. Die Verbindungsstäbe, welche die Kraft der Kolben den Rädern des Dampfwagens mittheilen, sind mit den Rädern verbunden, so daß ein Kolben sich in der halben Länge seines Spielraums befindet, wenn der andere den Zug beginnt.

Figur 3 ist ein verticaler Queerdurchschnitt des Dampf-

wagens; seine Vergleichung mit Figur 2 wird das ganze mehr erläutern.

11. Wir wollen unsere Beschreibung der Dampfmaschinen damit beschließen, daß wir noch eine von einem Amerikaner, John Nuncarrow beschreiben, welche dazu dient, Wasserräder auf solchen Oertern in Bewegung zu setzen, wo kein Wasserfall da ist, sondern nur ein sehr kleiner Fluß oder ein Bach sich befindet.

A, Figur 4 Tafel II ist der Behälter, der entweder von Holz oder Eisen seyn kann.

B, B, B, B, hölzerne oder gegossene eiserne Röhren, um das Wasser in den Behälter und von da zu dem Wassergefäße zu führen.

C, das Wassergefäß.

D, das Wasserrad.

E, der Kessel von Eisen oder Kupfer.

F, das heiße Wasser zur Unterhaltung des Kessels.

G, G, zwei Gefäße unter dem Niveau des Wassers, wobei sich die engen Röhren B B, und der Condensator befinden.

H, H, H, die Oberfläche des Wassers, mit dem das Dampfgetriebe und das Wasserrad versorgt werden.

a, a, die Dampfröhre, durch die der Dampf aus dem Kessel in den Behälter geleitet wird.

b, die Unterhaltungsröhre, um den Kessel mit heißem Wasser zu versorgen.

c, c, c, c, c, der Verdichtungsapparat.

d, d, die Röhre, welche das heiße Wasser aus dem Condensator in das dazu bestimmte Gefäß F führt.

e, e, e, Ventile, um dem Wasser den Zutritt zu eröffnen und zu verschließen.

f, f, die Einsprützröhre und g der Einsprützhahn.

h, der Condensator.

Es muß noch bemerkt werden, daß der Behälter, das Gefäß C und alle Röhren vorsichtig angefüllt werden müssen, bevor Wasser zum Rade gebracht werden kann; hat dann der Dampf in dem Kessel eine hinreichende Stärke erlangt, so wird das Ventil bei i geöffnet, und der Dampf tritt sogleich aus dem Kessel bei E in den Behälter A; das Wasser steigt durch die Röhren A und B herab, steigt durch das Ventil k und die andere Röhre B auf in das Gefäß C. Ist nun dieser Theil der Wirkung vollzogen, und das Ventil i hat sich geschlossen, so öffnet sich plötzlich das bei e, wodurch der Dampf in die Verdichtungsröhre c geht, und bei seinem Durchgange auf einen Strahl kalten Wassers aus dem Einsprützhahne g trifft, der ihn verdichtet. Ist nun auf diese Art in dem Behälter ein

leerer Raum erzeugt, so wird das Wasser durch den Druck der äußeren Luft heraufgezogen, und der Behälter zum zweiten Mal durch die Ventile e, e angefüllt, wenn das Dampfventil bei i sich wieder öffnet, und so wiederholt sich diese Wirkung für jede beliebige Zeit, welche die Maschine wirken soll.

Eine Dampfmaschine nach dieser Construction besitzt manche Vortheile, die bis jetzt noch keine besaß.

(1.) Sie ist wenig oder gar keiner Reibung unterworfen.

(2.) Sie kann, in Vergleich mit jeder anderen Art von Dampfmaschinen, mit geringen Kosten gebaut werden.

(3.) Sie besitzt jeden Vortheil, den Boulton's und Watt's Maschinen haben, nämlich außerhalb des Behälters, entweder in einem besonderen Gefäß oder an der Oberfläche des Wassers zu verdichten.

(4.) Ein anderer sehr großer Vortheil ist, daß das Wasser in dem oberen Theile der Röhre, die zum Behälter führt, dadurch, daß es mit dem Dampfe in häufiger Berührung ist, eine Hitze erreicht, die sehr nahe der des kochenden Wassers gleich ist; daher wird der Behälter immer gleichförmig heiß erhalten, wie es bei den Maschinen von Boulton und Watt der Fall ist.

(5.) Ein sehr kleiner Wasserstrom ist hinreichend, diese Maschine zu versorgen (selbst da wo kein Wasserfall ist), denn alles Wasser, was dadurch gehoben wird, kommt wieder in den Behälter H, H, H zurück.

Aus den vorhergehenden Gründen ist wohl einleuchtend, daß keine Art Dampfmaschinen besser sich eignet, einer Maschinerie jeder Art Drehungsbewegung zu ertheilen als diese. Ihre Gestalt ist einfach, und die Materiale, aus denen sie zusammengesetzt ist, sind wohlfeil; die Kraft ist stärker als bei jeder anderen Maschine dieser Art, da man keine Reductionen wegen der Reibung zu machen hat, ausgenommen bei der Drehung der Hähne, was jedoch unbedeutend ist.

Ihr großer Nutzen zeigt sich daher darin, daß sie für jede Art von Arbeit, welche ein Wasserrad verrichtet, wie in Mahlmühlen, Sägemühlen, Blaseöfen, Schmieden u. s. w., *) die Stelle von Wasser vertritt.

---

*) Wer sich mehr durch Beschreibung in dem Gegenstande der Dampfmaschinen unterrichten will, kann die historischen Abhandlungen von Partington und Stuart lesen. †)

†) In unserer Literatur verdient empfohlen zu werden: C. Bernoulli's Anfangsgründe der Dampfmaschinenlehre. Basel, 1824.

(D.)

12. Die Theorie der Dampfkraft, in Beziehung auf die mechanische Energie der Maschinen ist bis jetzt noch in einem sehr unvollkommenen Zustande. Die besten Formeln, die bis jetzt erschienen sind, hat Tredgold in seinem schätzbaren Werke von den Eisenbahnen gegeben. Da man gefunden hat, daß ihre Resultate sehr nahe mit den Versuchen übereinstimmen, so will ich sie beifügen.

Es sey f das Maß der Dampfkraft in Zollen der Quecksilbersäule, t die entsprechende Temperatur, nach Fahrenheit's Thermometer gemessen; f' der Widerstand durch die Reibung des Dampfkolbens, des verdichteten Dampfs in dem Cylinder, oder des atmosphärischen Drucks bei Maschinen mit hohem Drucke, n die Größe des Dampf-Cylinders, wenn die Masse Dampf, die bei dem Drucke f hinzugelassen ist, gleich eins gesetzt wird. Dann ist die Kraft des Dampfes, die aus einem Cubikfuße Wasser erzeugt wird:

$$4873\ (459 + t) \times \left(1 - \frac{n f'}{f}\right) + \text{log. nat. } n.$$

Wirkt der Dampf nicht durch Ausdehnung, so ist $n = 1$.

Wenn die Expansionskraft des Dampfes angewendet wird, so hat obige Gleichung einen größten Werth; sie wird ihn erreichen, wenn log. nat. $n - \frac{n f'}{f}$ einen kleinsten Werth hat, welches offenbar der Fall ist, wenn $n = \frac{f}{f'}$. Substituiren wir in diesem Falle $\frac{f}{f'}$ für n, so erhält man

$4873\ (459 + t)\ .\ (\text{log. nat. } \frac{f}{f'}) =$ der größten Kraft eines in Dampf verwandelten Cubikfußes Wassers.

Wenn $f = f'$, so ist log. nat. $\frac{f}{f'} = 0$ und die Kraft ist also Null.

Ist $1 - \frac{f'}{f}$ größer als log. nat. $\frac{f}{f'}$, so ist es nicht vortheilhaft, wenn der Dampf durch Expansion wirkt.

13. Um die Quantität des Feuerungsstoffes zu berechnen, so sey c die Quantität, die einen Cubikfuß Wasser in Dampf verwandelt, der den Druck der Atmosphäre tragen kann; s sey die specifische Hitze des Dampfes, a die specifische Hitze der Luft und des Dampfes, der aus dem Kamine herauskommt,

und w das Gewicht des Feuerungsmaterials, das einen Cubikfuß Wasser einen Grad erhitzt; dann ist:

$$c + [(t - 212^\circ) \times (a + s)\, w] =$$

der geringsten Quantität Feuerungsmaterials, welches Dampf von der Kraft f und der Temperatur t erzeugt.

Tredgold, der $c = 8{,}4$ Pfund Newcastler Kohlen, $w = 0{,}0075$ Pfund; $s = 0{,}847$ und $a = 0{,}753$ annimmt, reducirt obige Formel auf:

$8{,}4 + 0{,}012\ (t - 212^\circ) =$ den Pfund Kohlen, um Dampf von der Temperatur t zu erzeugen.

14. Wenn man bei einer Maschine mit hohem Drucke 30 Zoll für das Maß des atmosphärischen Druckes, $\frac{1}{5}$ des Druckes des Dampfes für die Reibung des Dampf-Kolbens und $\frac{1}{20}$ f für den positiven Druck im Kessel nimmt, so wird der ganze Verlust $\frac{1}{4}$ f. Aber auf der einen Seite des Kolbens einer Maschine mit hohem Drucke wirkt der nämliche Druck als die äußere Atmosphäre; daher $f' = \frac{1}{4} f + 30 =$ dem Widerstande der bewegenden Kraft f.

Wenn folglich eine Dampfmaschine mit hohem Drucke durch Expansionskraft wirkt, so hat man

$$4873\ (459 + t) \times \left(\text{log. nat.} \frac{f}{\frac{1}{4} f + 30} \right) =$$

der mechanischen Kraft eines Cubikfußes Wasser, der in Dampf verwandelt wird.

Es ist daher kein Vortheil, eine Dampfmaschine mit hohem Drucke durch Expansion wirken zu lassen, wenn die Kraft des Dampfes geringer ist als 60 Zoll der Queckſilber-Säule; weil der obige natürliche Logarithmus dann kleiner ist als $1 - \frac{\frac{1}{4} f + 30}{f}$.

Wird bei einer Maschine nicht die Expansiv-Kraft angewendet, so hat man

$$4873\ (459 + t) \times \left(1 - \frac{\frac{1}{4} f + 30}{f} \right) =$$ der mechanischen Kraft eines Cubikfußes Wasser, das in Dampf verwandelt ist.

15. Tredgold erläutert diese Formeln durch folgendes

Beispiel. Die Dampfkraft sey 120 Zoll der Queckſilber-Säule; die entsprechende Temperatur ist 292,8°; dann ist

$$4873\ (459 + 292{,}8) \times \left(1 - \frac{(\frac{1}{4} \times 120) + 30}{120} \right) =$$

1830000 Pfund einen Fuß hoch gehoben.

Die Quantität Kohlen ist $8{,}4 + 0{,}012\ (292{,}8 - 212) = 9{,}37$ Pfund Kohle.

Ist nun die Pferdekraft 16000000 Pfund, in einem Tage von acht Stunden einen Fuß hoch erhoben, so ist

1830000 : 9,37 Pfund = 16000000 : 82 Pfund.

Wenn man daher außer dem Drucke der Atmosphäre mit Dampf von $44\frac{1}{2}$ Quadratzoll auf den Kolben wirkte, so würden 82 Pfund Newcastler Kohlen das Tagewerk eines Pferdes verrichten.

Wenn aber die Maschine durch Expansion mit derselben Dampfkraft wirkt, so ist

4873 (459 + 292,8) × (log. nat. 2) = 2540000 Pfund.

einen Fuß hoch durch 9,37 Pfund Kohle erhoben; es müßten folglich 59 Pfund Kohle das Tagewerk eines Pferdes verrichten.

16. Was den größten Werth der erforderlichen Wirkung einer Dampfmaschine betrifft, so wird man ihn nach Tredgold finden, wenn man $v = 120 \sqrt{l}$, als wirkende Geschwindigkeit einer Maschine in Fußen ausgedrückt während des Zeitraums einer Minute annimmt; l bezeichnet die Länge des Kolbenzugs.

Hat eine Maschine 2 Fuß Kolbenzuglänge, so ist v = 170 Fuß in der Minute, und die Anzahl Kolbenzüge in der Minute ist $42\frac{1}{2}$.

Vergrößert man die Kolbenzuglänge bis auf 3,4 Fuß, so erhält man eine Geschwindigkeit von 220 Fuß in der Minute, mit 32 Kolbenzügen in demselben Zeitraume.

Erleidet die größte Kraft eine Veränderung, so ist die Abnahme der Wirkung dieselbe wie bei der Pferdekraft; aber nach Tredgold's Bemerkung hat man bei einer Maschine den Vortheil, daß man ihr eine beliebige Geschwindigkeit ertheilen kann, wenn man die Verhältnisse ihrer Theile berücksichtigt, da man hingegen Pferdekraft nicht verändern kann.

17. Wenn ein Pferd $2\frac{1}{2}$ Meilen in einer Stunde macht, so werden im Durchschnitte ungefähr 150 Pfund an einem um eine Rolle geschlungenen Seile von ihm erhoben, welches eben so viel als 33000 Pfund einen Fuß hoch in einer Stunde ist; Boulton und Watt schätzen diesen Werth blos 32000, Tredgold noch tiefer, nämlich 27500. Nimmt man jedoch das erste Maß als Vergleichungspunct, und bezeichnet mit d den Durchmesser des Kolbens in Zollen, mit p den Druck des Dampfes auf jeden Quadratzoll (gewöhnlich ungefähr um $\frac{1}{5}$ wegen Reibung und Trägheit vermindert), mit l die Länge des Kolbenzugs in Fußen, mit n die Anzahl Kolbenzüge in jeder Minute; so ist die Kraft der Maschine in Pferdekräften (= PK):

(PK) = 0,0000238 d^2 n p l bei einer Maschine mit einfachem Kolbenzuge,

(PK) = 0,0000476 d^2 n p l bei einer Maschine von doppeltem Kolbenzuge.

Beispiel. Es sey d = 20 Zoll, l = 3 Fuß, n = 36, p = 50 und die Maschine habe einen doppelten Kolbenzug, so ist

0,0000476 × 20^2 × 36 × 50 × 3 = 102,816 oder beinahe 103 Pferdekräfte das Maß der Energie der Maschine.

Nach Boulton erhebt ein Scheffel Newlastler Kohlen von 84 Pfund 30 Millionen Pfund einen Fuß hoch; oder mahlt 11 Scheffel Waizen; oder spaltet 5 Centner Eisen und zieht es zu Nägeln; setzt 1000 Baumwollen-Spindeln nebst aller Vorbereitungs-Maschinerie mit der erforderlichen Geschwindigkeit in Bewegung; diese Wirkungen aber sind nach eben demselben der Arbeit von 10 Pferden gleich.

18. Folgende Regel bestimmt das dem Schwungrade zu ertheilende Gewicht.

Man multipilcire die Anzahl Pferdekräfte in der Maschine mit 2000, dividire das Product durch das Quadrat der Geschwindigkeit in Fußen des Umfangs des Schwungrades für jede Secunde; der Quotient giebt das Gewicht in Centnern; oder:

$$\frac{2000\,(PK)}{\left(\frac{\pi\ d\,n}{60}\right)^2} = \text{Gewicht des Schwungrades.}$$

Man setze z. B., das Schwungrad einer Maschine von einer Kraft von 20 Pferden von 18 Fuß Durchmesser drehe sich 22mal in einer Minute herum; wie groß ist sein Gewicht?

Hier ist $\frac{18 \times 3{,}1416 \times 22}{60} = 20\frac{1}{2}$ Fuß annäherungsweise die Geschwindigkeit des Umkreises in einer Secunde.

Daher $\frac{20 \times 2000}{(20\frac{1}{2})^2} = 90{,}4$ Centner als verlangtes Gewicht des Schwungrades.

* * * Vergleiche oben Seite 267.

XIV. Kapitel

Vergleichende Tafeln und Bemerkungen über Dampfmaschinen, Eisenbahnen, Canäle und Chausseen. *)

Tafel I. Größte Kraft des Dampfes eines Cubikfußes Wasser bei Maschinen mit hohem Drucke.

Temperatur des Dampfes.	Totalkraft des Dampfes in Zollen der Quecksilbersäule.	Kraft des Dampfes über der Atmosphäre in Pfunden auf jeden Quadratzoll.	Größte mechanische Kraft des Dampfes von einem Cubikfuß Wasser in Pfd. einen Fuß hoch gehoben		Verhältniß des Zuges, bei dem man den Dampf abschneiden muß, wenn er das Maximum der Expansion erlangen soll.	Pfund Newcastler Kohlen, um einen Cubikfuß Wasser in Dampf zu verwandeln.
			Mit vollem Drucke wirkend.	Durch Expansion wirkend.		
	Zolle.	Pfunde.	Negative Pfunde.	Negative Pfunde.		Pfunde.
220°	35	2,5				8,5
234½	45	7,4	287000			8,67
251	60	14,8	864000	985000	¾	8,87
275	90	29,7	1495000	1927000	7/12	9,16
292,8	120	44,5	1830000	2540000	½	9,37
307,7	150	59,3	2054000	2988000	9/20	9,55
320,2	180	74,2	2202000	3326000	5/12	9,7
343,6	240	104	2444000	3832000	⅜	9,98

Diese Tafel zeigt die ganze Kraft des Dampfes eines Cubikfußes Wasser, bei verschiedenen Temperaturen erzeugt, in einen Fuß hoch gehobenen Pfunden, und zwar bei einer Maschine mit hohem Drucke an. Die sechste Colonne zeigt an, was für ein Verhältniß des Kolbenzugs bei vollem Drucke wirken muß, um die größte Kraft durch Expansivwirkung zu erlangen. Um aber die größte Wirkung, die nöthig ist, zu erhalten, so erfordert der volle Druck eine längere Dauer und in einem Umfange, der von der Größe der Reibung der beigefügten Maschinerie abhängt, die zur Erzeugung der nöthigen Wirkung nothwendig ist. Eine Maschine muß so eingerichtet seyn, daß, nach dem Belieben des Aufsehers oder der erforderlichen Kraft der Maschine, die Verbindung zwischen dem Cylinder und dem Kessel für jeden Theil des in der Tafel für vollen Druck angegebenen Kolbenzugs aufgehoben werden kann, anstatt nach der gewöhnlichen Methode den Durchgang des

*) Diese schätzbaren Tafeln sind aus Tredgold's Werke über Eisenbahnen genommen.

Dampfes durch jene verfehlte Erfindung, die man recht passend Erstickungsventil (throttle-valve) genannt hat, zu rectificiren.

Tafel 2. Größte Kraft des Dampfes eines Cubikfußes Wassers in einer Condensations-Dampfmaschine.

Temperatur des Dampfes.	Totalkraft des Dampfes in Zollen der Quecksilbersäule.	Kraft des Dampfes über der der Atmosphäre in Pfunden auf jeden Quadratzoll.	Größte mechanische Kraft des Dampfes eines Cubikfußes Wasser, in Pfd. einen Fuß hoch gehoben.		Verhältniß des Zuges, wobei man den Dampf abschneiden muß, wenn er das Maximum der Expansion erlangen soll.	Pfund Newcastler Kohlen, um einen Cubikfuß Wasser in Dampf zu verwandeln.
			Bei vollem Druck wirkend.	Durch Expansion wirkend.		
	Zolle.	Pfunde.	Pfunde	Pfunde.		Pfunde.
220°	35	2,5	2134000	3350000	$\frac{4}{11}$	8,5
234,5	45	7,4	2230000	3636000	$\frac{15}{44}$	8,67
251	60	14,8	2366000	3961000	$\frac{7}{22}$	8,87
275	90	29,7		4379000	$\frac{10}{34}$	9,16
292,8	120	44,5		4590000	$\frac{2}{7}$	9,37
307,7	150	59,3		4819000	$\frac{10}{36}$	9,55
320,2	180	74,2		4932000	$\frac{3}{11}$	9,7
343,6	240	104,0		5162000	$\frac{4}{15}$	9,98

Tafel 3. Quantität der Kohlen, welche der Pferdekraft von 33000 von einer Dampfmaschine mit hohem Drucke, einen Fuß hoch in der Minute erhobenen Pfunden gleichgelten, wenn die erhaltene Wirkung die größt-mögliche ist.

Temperatur des Dampfes.	Totalkraft in Zollen der Quecksilbersäule.	Kraft des Dampfes über der der Atmosphäre in Pfunden auf jeden Quadratzoll.	Quantität der Kohlen gleich einer Pferdekraft.		Pfunde einen Fuß hoch gehoben gleich der unmittelbaren Kraft des Dampfes von 84 Pfd. Kohlen erzeugt.	
			Bei Wirkung mit vollem Drucke.	Bei Wirkung durch Expansion.	Bei Wirkung mit vollem Drucke.	Bei Wirkung durch Expansion.
o	Zolle.	Pfunde.	Pfunde.	Pfunde.	Pfunde.	Pfunde.
234,5	45	7,4	480		2780000	
251	60	14,8	163	143	8200000	9300000
275	90	29,7	98	77	13700000	17700000
292,8	120	44,5	82	59	16600000	22700000
307,7	150	59,3	74	51	18000000	26200000
320,2	180	74,2	70	48	19200000	28700000
343,6	240	104	65	41½	20500000	32200000

Tafel 4. Quantität der Kohlen, welche der Pferdekraft von 33000 von einer Verdichtungs=Dampfmaschine einen Fuß hoch in der Minute erhobenen Pfunden gleich gelten, wenn die erhaltene Wirkung die größt=mögliche ist.

Temperatur des Dampfes.	Totalkraft in Zollen der Quecksilbersäule.	Kraft des Dampfes über der Atmosphäre in Pfunden auf jeden Quadratzoll.	Quantität der Kohlen gleich einer Pferdekraft.		Pfunde einen Fuß hoch erhoben gleich der unmittelbaren Kraft des Dampfes von 84 Pfd. Kohlen erzeugt.	
			Bei Wirkung mit vollem Drucke.	Bei Wirkung durch Expansion.	Bei Wirkung mit vollem Drucke.	Bei Wirkung durch Expansion.
	Zolle.	Pfunde.	Pfunde.	Pfunde.	Pfunde.	Pfunde.
220°	35	2,5	63½	40½	21000000	33100000
234,5	45	7,4	62	38¼	21400000	35200000
251	60	14,8	60	35¾	22400000	37500000
275	90	29,7		33½		40000000
292,8	120	44,5		32½		41000000
307,7	150	59,3		32		42400000
320,2	180	74,2		31½		42700000
343,6	240	104,0		31		43500000

Bemerkungen über Tafel 3 und 4. Die Colonnen, welche die Pfunde anzeigen, die eine Maschine durch die Hitze von einem Scheffel Kohlen einen Fuß hoch erheben soll, wurden vorzüglich zur Vergleichung mit wirklichen Fällen hinzugefügt. Jetzt hat man nach mehrjährigen Prüfungen gefunden, daß Woolf's Maschine in der Wheal Abraham Mine mit einem Scheffel Kohlen 44 Millionen Pfund Wasser einen Fuß hoch erhob. Aus Berichten aus den Cornwaller Minen ergab sich, daß das Verbrennen eines Scheffels guter Newcastler oder Swansea=Kohlen bei Watt's Maschinen, die mehr oder weniger expansiv wirkten, 24 bis 32 Millionen Pfund Wasser einen Fuß hoch erhob; indem die größere oder geringere Wirkung von dem Zustande der Maschine, ihrer Gestalt, der Art der Wirkung und der Beschaffenheit der Kohle abhing.

Wir fügen noch die Resultate halbjährlicher Beobachtungen hinzu, die ohne Auswahl aus der Herren Lean monatlichen Berichten über die von den Dampfmaschinen in Cornwall mit jedem Scheffel Kohlen verrichteten Wirkungen entnommen sind; die Zahlen zeigen die Pfund Wasser an, die mit jedem Scheffel Kohlen einen Fuß hoch vom Januar bis Juni 1818 erhoben wurden.

	Januar.	Februar.	März.	April.	Mai.	Juni.
	Pfd. einen Fuß hoch gehoben.	Pfd. einen Fuß hoch gehoben.	Pfd. einen Fuß hoch gehoben.	Pfd. einen Fuß hoch gehoben.	Pfd. einen Fuß hoch gehoben.	Pfd. einen Fuß hoch gehoben.
22 b. 25 gewöhnliche Maschinen im Durchschnitte	22188000	22424000	21898000	22982000	23608000	23836000
Wheal Vor (Woolf's Maschine)	30834000	26158000	29511000	26064000	29032000	30336000
Wheal Abraham desgl.	41847000	35364000	30445000	32723000	31520000	34352000
Desgl. desgl.	27942000	28000000	26978000	23626000	29702000	34846000
Wheal Unity desgl.	31900000	32306000				
Dalcouth Maschine	42622000	41354000	40499000	41888000	38233000	38143000
Wheal Abraham Maschine	32239000	36180000	35715000	33934000	33714000	34291000
Vereinigte Minen Maschine	36396000	31830000	31427000	33564000	33967000	30105000
Treskirby Maschine	38733000	39375000	41867000	41823000	40615000	42098000
Wheal Chance Maschine	28496000	32319000	33594000	33932000		35797000

Diese Tafeln sind wegen der Reibung und dem Verluste von Wirkung bei dem Arbeiten der Pumpen kleiner als die Kraft der Maschinen an sich; vergleicht man sie daher mit Tredgold's Tafel, so geht daraus hervor, daß er seine Berechnungen nach solchen Angaben machte, die in der Praxis ausgeführt werden können. Man weiß aus der Erfahrung, daß ein Cubikfuß Wasser in Dampf verwandelt werden kann, der gleich der Kraft der Atmosphäre ist, und zwar mit 7 Pfund Newcastler Kohlen; wir kennen aber auch die Aufmerksamkeit, welche nöthig ist, um diese Wirkung zu erzeugen, und haben daher angenommen, daß $8\frac{4}{10}$ Pfund zu diesem Zwecke erfordert werden.

Tafel 5. Die Wirkungen einer Zugkraft von 100 Pfund mit verschiednen Geschwindigkeiten auf Canälen, Eisenbahnen und Chausseen. *)

Schnelligkeit der Bewegung.		Last von einer Kraft von 100 Pfd. bewegt.					
		Bei einem Canale.		Auf einer horizontalen Eisenbahn.		Auf einer horizontalen Chaussee.	
Meilen in der Stunde.	Fuß in der Secunde.	Ganze bewegte Masse.	Nutzbare Wirkung.	Ganze bewegte Masse.	Nutzbare Wirkung.	Ganze bewegte Masse.	Nutzbare Wirkung.
		Pfd.	Pfd.	Pfd.	Pfd.	Pfd.	Pfd.
$2\frac{1}{2}$	3,66	55500	39400	14400	10800	1800	1350
3	4,40	38542	27361	14400	10800	1800	1350
$3\frac{1}{2}$	5,13	28316	20100	14400	10800	1800	1350
4	5,86	21680	15390	14400	10800	1800	1350
5	7,33	13875	9350	14400	10800	1800	1350
6	8,80	9635	6840	14400	10800	1800	1350
7	10,26	7080	5026	14400	10800	1800	1350
8	11 73	5420	3848	14400	10800	1800	1350
9	13,20	4282	3040	14400	10800	1800	1350
10	14,66	3468	2462	14400	10800	1800	1350
13,5	19,9	1900	1350	14400	10800	1800	1350

Diese Tafel soll die Wirkung darstellen, die bei verschiednen Geschwindigkeiten auf Canälen, Eisenbahnen und Chausseen von derselben mechanischen Kraft vollzogen werden kann. Das Auf- und Abwärts bei Schleussen und Canälen kann mit der Erhebung oder Vertiefung bei Wegen verglichen werden. Die getragene Last zu dem Gewichte des Fuhrwerks hinzugefügt, macht die ganze bewegte Masse aus, und die gewöhnliche Wirkung ist die Last. Um die Wirkung auf Canälen bei verschiednen Geschwindigkeiten zu finden, wenn die Wirkung einer gegebenen Kraft bei irgend einer Geschwindigkeit bekannt ist, so wird seyn: $3^2 : 2{,}5^2 = 55500 : 38542$. Die bewegte Masse verhält sich daher sehr nahe umgekehrt wie das Quadrat der Geschwindigkeit.

---

*) Die Zugkraft auf einem Canale verändert sich wie das Quadrat der Geschwindigkeit; aber die mechanische Kraft, die nöthig ist, das Boot zu bewegen, wächst, wie man gewöhnlich annimmt, wie der Cubus der Geschwindigkeit. Auf einer Eisenbahn oder Chaussee ist die Geschwindigkeit constant; aber die mechanische Kraft, welche erfordert wird, das Fuhrwerk zu bewegen, wächst wie die Geschwindigkeit.

Diese Tafel zeigt, daß, wenn die Geschwindigkeit 5 Meilen in der Stunde ist, weniger Kraft erfordert wird, um dieselbe Geschwindigkeit auf einer Eisenbahn als auf einem Canale zu erhalten; und die letzte Colonne ist hinzugefügt, um die Geschwindigkeit anzugeben, bei der die Wirkung auf einem Canale allein der auf einer Chaussee gleich ist. Vergleicht man die Kraft und das Gewicht der Dampfgefäße, so wird man finden, daß das Verhältniß der Kraftabnahme durch Vermehrung der Geschwindigkeit sich nicht sehr von der Wahrheit entfernt; allein man weiß, daß in einem engen Canale die Geschwindigkeit in einem schnelleren Verhältnisse als mit dem Quadrate der Geschwindigkeit wächst. *)

Tafel 6. Die größte Quantität Arbeit, die eine Zugpferde-Kraft bei verschiednen Geschwindigkeiten auf Canälen, Eisenbahnen und Chausseen zu vollziehen im Stande ist.

Geschwindigkeit in Meilen auf die Stunde.	Dauer der Tagarbeit bei der vorhergehenden Geschwindigkeit.	Zugkraft in Pfunden.	Nutzbare Wirkung eines Pferdes, das einen Tag arbeitet, in Tonnen eine Meile weit gezogen.		
			Auf einem Canale.	Auf einer Eisenbahn.	Auf einer guten Chaussee.
Meilen.	Stunden.	Pfunde.	Tonnen.	Tonnen.	Tonnen.
$2\frac{1}{2}$	$11\frac{1}{2}$	$83\frac{1}{3}$	520	115	14
3	8	$83\frac{1}{3}$	243	92	12
$3\frac{1}{2}$	$5\frac{9}{10}$	$83\frac{1}{3}$	153	82	10
4	$4\frac{1}{2}$	$83\frac{1}{3}$	102	72	9
5	$2\frac{9}{10}$	$83\frac{1}{3}$	52	57	7,2
6	2	$83\frac{1}{3}$	30	48	6,0
7	$1\frac{1}{2}$	$83\frac{1}{3}$	19	41	5,1
8	$1\frac{1}{8}$	$83\frac{1}{3}$	12,8	36	4,5
9	$\frac{9}{10}$	$83\frac{1}{3}$	9,0	32	4,0
10	$\frac{3}{4}$	$83\frac{1}{3}$	6,6	28,8	3,6

Wo Pferdekraft für größere Geschwindigkeiten angewendet wird, da sollte man den Thieren gestatten, so stufenweise als

---

*) Nach deni nteressanten Versuchen des Dû Bûat kann der Widerstand, den die Boote der Bewegung leisten, als dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional betrachtet werden, das heißt fast $R : v^2$, wenn man nämlich R von den Queerdurchschnitten des Gefäßes und des Canales, in dem es sich bewegt, und einer constanten Größe K, die durch Versuche bestimmt wird, abhängen läßt. Ist C der Vertical-Durchschnitt des Canals, b der Vertical-Durchschnitt des ein-

möglich eine größere Geschwindigkeit von dem ersten Antreiben an zu nehmen. Hierdurch werden die Eigenthümer von Pferden weit mehr gewinnen, als wenn sie es unterlassen; auch verdient es ihre Aufmerksamkeit, auf die beste Art der Fütterung und des Ziehens der Pferde Acht zu haben, damit dieselben ohne den geringsten Verlust ihrer animalischen Kräfte die Arbeit verrichten.

Um die vorhergehende Tafel mit der Erfahrung bei größeren Geschwindigkeiten zu vergleichen, ist es nöthig, die ganze bewegte Masse zu haben, welche um ein Drittel mehr ist als die nutzbare Wirkung in dieser Tafel. Die wirkliche Geschwindigkeit, mit der manche Schnell-Kutschen gehen, ist zehn Meilen in einer Stunde; die der Postkutschen ungefähr neun Meilen; und eine Kutsche mit ihrem Gepäck und Passagieren hält fast 3 Tonnen; daher ist das Durchschnitts-Tagewerk von 4 Kutschpferden 27 Tonnen, eine Meile weit gezogen; auf ein Pferd kommen also $6\frac{3}{4}$ Tonnen für eine Meile. Die Tafel giebt 3,6 Tonnen, $\frac{1}{3}$ davon hinzugefügt giebt 4,8 Tonnen eine Meile weit gezogen als die äußerste Quantität Arbeit eines Pferdes bei dieser Schnelligkeit auf einer guten ebenen Straße; hiervon muß aber der Verlust der Wirkung bei Ersteigung von Hügeln, beim Laufen auf schlechten Wegen u. s. w. abgezogen werden, wodurch die wirkliche Arbeit eines Kutsch-Pferde-Gespannes ungefähr doppelt so groß gemacht werden wird als es die Tafel giebt. Die Folgen sind wohl bekannt.

Nach Bevan's Bemerkungen ziehen die Pferde auf dem großen Verbindungscanal 617 Tonnen eine Meile mit der Geschwindigkeit von 2,45 Meilen in der Stunde.

Nach Tredgold ist, wenn V die größte Schnelligkeit eines Pferdes und v eine andere Geschwindigkeit bezeichnet, die unmittelbare Kraft eines Pferdes $250\ v\left(1-\frac{v}{V}\right)$; und wenn

---

getauchten Theils des Bootes, so ist $R = \frac{K}{\left(\frac{c}{b}+2\right)}$; das Mittel der Versuche des Dü Büat giebt $K = 8{,}46$ oder $R = \frac{8{,}46}{\left(\frac{c}{b}+2\right)}$; allein diese Versuche waren nicht so zahlreich und mannichfaltig, als es gewünscht werden konnte. Siehe Principes d'Hydraulique II. 340, 342.

Die Regeln Seite 93 können auch in solchen Fällen, die mit diesen in Verbindung stehen, angewendet werden, so wie auch da, wo Meilen-Geschwindigkeiten, in Stunden, in Fuß-Geschwindigkeiten in Secunden und umgekehrt ausgedrückt werden.

sich das Gewicht des Geschirres oder Fuhrwerks zu dem Gewichte der Last wie n : 1 verhält, so hat man

$\frac{250\ v\left(1-\frac{v}{V}\right)}{1+n}$ = der wirkenden Kraft; bezeichnet ferner d die Stunden, die das Pferd an einem Tage arbeitet, so wird das Tagewerk seyn $\frac{250\ d\ v\left(1-\frac{v}{V}\right)}{1+n}$ in Pfunden eine Meile gehoben, und $250\left(1-\frac{v}{V}\right)$ = der Zugkraft in Pfunden. Würde aber die Kraft unmittelbar angewendet, so würde V den Werth $\frac{14,7}{\sqrt{d}}$ haben; und um den Werth zu finden, wenn die Wagen allein in Bewegung gesetzt würden, erhält man

$1 : \frac{1}{\sqrt{1+n}} = \frac{14,7}{\sqrt{d}} : \frac{14,7}{\sqrt{d\,(1+n)}} = V$; daher ist das Tagewerk $\frac{250\ d\ v}{1+n}\left(1-\frac{v\sqrt{d\,(1+n)}}{14,7}\right)$; welches seinen größten Werth erhält, wenn $\frac{96}{v^2\,(1+n)} = d$ ist. Ist folglich die Geschwindigkeit gegeben, so hat man $\frac{96}{v^2\,(1+n)}$ gleich der Dauer des Tagewerks, in Stunden ausgedrückt; und $\frac{8000}{v\,(1+n)^2}$ = dem wirklichen Tagewerke und $250\left(1-\frac{9,8}{14,7}\right) = 83\frac{1}{3}$ Pfd. Man kann aber annehmen, daß n immer $\frac{1}{3}$ so nahe ist, daß das Resultat nicht davon afficirt wird, und dann ist $\frac{72}{v^2} = d$, und $\frac{4500}{v}$ = dem Tagewerke in Pfd. oder sehr nahe $\frac{2}{v}$ Tonnen eine Meile gehoben. Dies mit den Zahlen der vorhergehenden Tafel verbunden giebt die Wirkung eines Pferdes auf Canälen, Eisenbahnen und Chausseen.

* * * Zur weiteren Belehrung über Eisenbahnen, ihre Natur, Einrichtung, vergleichenden Nutzen verweisen wir den Leser auf Tredgold's Werk, das sehr elegant und scharfsinnig in seinen Vergleichungen, sehr systematisch und richtig in seinen scientifischen Ableitungen ist. Auch kann man manche interessante Belehrung und eine vergleichende Tafel der Widerstände auf

verschiednen Eisenbahnen, die jetzt in Gebrauch sind, in H. R. Palmer's Werke „Beschreibung einer Eisenbahn nach einem neuen Principe," das im Jahre 1824 herauskam, finden.

XV. Kapitel.

Active und passive Kräfte.

1. Abschnitt. Active Kräfte oder animalische Kräfte wie von Menschen, Pferden u. s. w.

1. Die Kraft, welche man mittels animalischer Thätigkeit erhält, ist offenbar nicht allein bei verschiednen Gattungen von Thieren, sondern auch bei verschiednen Individuen verschieden. Diese Verschiedenheit hängt erstlich von der besonderen Constitution des Individuums und dem Zusammenwirken mehrerer Ursachen, die darauf Einfluß haben, ab; zweitens von der besonderen Geschicklichkeit, die durch Gewohnheit erlangt wird. Offenbar kann solch eine Veränderung nicht einem Gesetze unterworfen werden, und man kann hier zu keinem anderen Mittel seine Zuflucht nehmen, als mittlere Resultate zu suchen.

Zweitens ändert sich die Kraft in Rücksicht auf die Natur der Arbeit. Verschiedne Muskeln werden bei verschiednen Stellungen und Lagen eines Thieres, welches arbeitet, in Thätigkeit gesetzt; die Maschine des Thieres selbst ist bei einigen Arten von Arbeiten vortheilhaft, bei anderen nachtheilig; daher kann es nicht auffallen, daß bei verschiednen Arten von Arbeiten die geäußerte Kraft verschieden ist. So ist die von einem Menschen geäußerte Kraft bei dem Tragen, horizontalen und verticalen Ziehen oder Stoßen eines Gewichts verschieden.

Drittens ändert sich die Kraft nach der Dauer der Arbeit. Die Kraft z. B., die ein Mensch bei einer Anstregung von wenigen Augenblicken äußern kann, ist von derjenigen sehr verschieden, die er bei ununterbrochener oder nur mit kleinen Intervallen unterbrochener Thätigkeit einen Tag lang auszuhalten im Stande ist, ohne sich die äußerste Ermüdung zuzuziehen. Die erstere kann absolute Kraft, die letztere dauernde Kraft genannt werden. Es ist nützlich, sich mit beiden bekannt zu machen, da es oft vortheilhaft ist, sich bald der einen, bald der anderen zu bedienen.

Endlich verändert sich die Kraft nach den verschiednen Graden der Schnelligkeit, mit der das Thier im Acte des Arbeitens entweder seinen ganzen Körper, oder den wirkenden Theil

bewegt. In der Ruhe ist die animalische Kraft am größten; schwächer wird sie bei der Fortbewegung nach dem Verhältnisse der Geschwindigkeit; indem das Thier einen solchen Grad von Geschwindigkeit erhalten kann, daß es außer Stand gesetzt wird, Kraft noch zu äußern.

2. Es sey φ das Gewicht, das der Kraft gleich ist, die ein Mensch in der Ruhe äußern kann, V sey die Geschwindigkeit, mit der er, wenn er fortschreitet, nicht mehr im Stande ist, eine Kraft auszuüben; F sey ferner der Kraft gleich, die er ausübt, wenn er gleichmäßig mit einer Geschwindigkeit v fortschreitet.

Dann wird F eine Function von v seyn, so daß sie erstlich abnimmt, wenn v wächst; zweitens, wenn $v = 0$; $F = \varphi$; drittens, wenn $v = V$, $F = 0$ wird.

3. Nach der Natur dieser Function haben wir folgende drei Voraussetzungen:

1. $F = \varphi\left(1 - \frac{v}{V}\right)$. (Bouguer, Man. des. Vais.)

2. $F = \varphi\left(1 - \frac{v^2}{V^2}\right)$. (Euler, Nov. Comm. Pet. tom. III.)

3. $F = \varphi\left(1 - \frac{v}{V}\right)^2$ (Ebend. Tom. VIII. und Act. of Rowers.)

4. Zusatz 1. Da die Wirkung der dauernden Kraft durch das Product Fv gemessen wird, so wird der Ausdruck der Wirkung einer der drei folgenden seyn, je nachdem die eine oder andere Voraussetzung angenommen wird.

1. $FV\left(1 - \frac{F}{\varphi}\right)$ oder $\varphi v\left(1 - \frac{v}{V}\right)$

2. $FV\sqrt{\left(1 - \frac{F}{\varphi}\right)}$ oder $\varphi v\left(1 - \frac{v^2}{V^2}\right)$

3. $FV\left(1 - \sqrt{\frac{F}{\varphi}}\right)$ oder $\varphi v\left(1 - \frac{v}{V}\right)^2$.

5. Zusatz 2. Um das Gewicht zu kennen, mit dem ein Mensch belastet werden, oder die Geschwindigkeit, mit der er sich bewegen müßte, wenn die Wirkung am größten seyn soll, muß man $d \cdot Fv = 0$ setzen.

Daraus ergiebt sich:

1. $F = \frac{1}{2}\varphi$; und $v = \frac{1}{2}V$.

2. $F = \frac{2}{3}\varphi$; und $v = \frac{1}{\sqrt{3}}V = 0{,}5773\ V$.

3. $F = \frac{4}{9}\varphi$; und $v = \frac{1}{3}V$.

6. Zusatz 3. Der Werth der größten Wirkung wird seyn:
nach der ersten Hypothese $= \frac{1}{4} \varphi V$;

" " zweiten " $= \frac{2}{3\sqrt{3}} \varphi V = 0{,}3836 \varphi V$;

" " dritten " $= \frac{4}{27} \varphi V$.

Welche von den drei Annahmen verdient aber den Vorzug? Und sind wir sicher, daß sich eine von ihnen dem wahren Gesetze der Natur annähert?

Schulze machte eine Reihe Versuche zur Bestimmung dieses Punctes, *) und in Beziehung auf Menschen fielen sie zu Gunsten der letzten Eulerschen Formel aus, nämlich:

$$F = \varphi \left(1 - \frac{v}{V}\right)^2.$$

Da die Versuche dieses Gelehrten in England wenig bekannt sind, so will ich hier einen kurzen Bericht davon geben.

7. Um Versuche über Menschen-Kraft zu machen, nahm er 20 Personen von verschiedner Größe und Constitution ohne Auswahl, die er maß und wog. Die Resultate stellt folgende Tafel dar.

Nummer.	Höhe.	Gewicht.	Nummer.	Höhe.	Gewicht.
1	5′ 3″ 4‴	122	11	5′ 9″ 7‴	132
2	5 2 3	134	12	5 1 4	157
3	5 7 2	165	13	5 3 2	175
4	5 5 0	131	14	5 4 1	117
5	5 11 2	177	15	5 10 8	192
6	6 0 4	158	16	5 0 3	133
7	5 8 3	180	17	4 11 2	147
8	5 2 1	117	18	5 3 9	124
9	5 4 8	140	19	5 6 0	163
10	5 0 4	126	20	5 10 1	181

Die Höhen sind in Rheinländischen Fußen, von denen der Fuß 12,35 engl. Zoll hält, (mit ′ bezeichnet), Zollen (″), Zwölftelzollen (‴) ausgedrückt. Die Gewichte in Pfunden, die sich zu den Avoirdupoids-Pfunden wie 30 zu 29 verhalten.

*) Mém. Acad. Scienc. Berl. 1783.

Um die Kraft zu finden, die ein jeder dieser Menschen bei der verticalen Erhebung eines Gewichts ausüben konnte, machte Schulze folgende Versuche:

Er nahm verschiedne Gewichte, die von 150 Pfund bis auf 260 Pfd. von 10 zu 10 Pfd. wuchsen; alle diese Gewichte waren von Blei, mit kreisförmigen und gleichen Grundflächen. Um sich ihrer in den Experimenten mit Erfolg zu bedienen, hatte er zugleich eine Art Bank gemacht, in deren Mitte sich ein Loch von derselben Größe, wie die Grundfläche der Gewichte, befand; dieses Loch wurde durch einen runden Deckel verschlossen, der gegen die Bank gedrückt wurde; zu anderen Zeiten wurde er durch eine Feder und einige eiserne Stangen in einem Abstande von $1\frac{1}{2}$ Fuß über der Bank erhalten. Um zu verhindern, daß das Gewicht, mit dem dieser Deckel während des Versuches belastet war, denselben unter die Oberfläche der Bank drücken könnte, so hatte er mehrere Einschnitte an den vier Eisenstäben gemacht, die den Deckel trugen und zu gleicher Zeit dazu dienten, den Deckel in jeder Höhe zu erhalten, die er durch den Druck der Federn, sobald der Druck des Gewichtes aufgehört hatte, erhalten konnte.

Nachdem er die 150 Pfd. Gewicht auf den Deckel gelegt und dasselbe nach und nach durch Hinzufügung von je 10 Pfd. bis zu 250 Pfd. vermehrt hatte, machte er mit den Menschen, deren Größe und Gewicht oben angegeben wurden, folgende Versuche, indem er sie alle nach einander die Gewichte so vertical als möglich erheben ließ, und die Höhe bemerkte, bis zu welcher sie sie erheben konnten. Die beigefügte Tafel giebt die beobachteten Höhen für die verschiednen Gewichte, die in der obersten Reihe angegeben sind.

	150		160		170		180		190		200		210		220		230		240		250
	"	‴	"	‴	"	‴	"	‴	"	‴	"	‴	"	‴							
1	7	9	6	4	4	11	4	4	3	8	2	8	1	1							
2	7	10	6	6	5	7	4	7	3	11	2	5	0	5	"	‴	'	‴			
3	7	9	7	3	6	5	5	9	4	11	4	0	3	0	1	7	0	3	"	‴	
4	8	3	7	6	7	2	5	10	5	3	4	7	4	0	3	8	3	1	1	4	
5	12	4	11	1	9	7	8	5	7	10	7	1	5	10	4	7	3	2	1	3	
6	14	5	14	0	13	5	12	8	11	5	10	1	8	6	6	6	4	1	0	1	
7	12	11	11	3	10	5	9	3	8	1	6	9	5	3	3	8	1	11	0	2	
8	11	9	10	2	9	4	8	11	8	1	6	11	5	10	5	1	3	2	1	0	
9	9	5	8	3	7	1	5	6	4	1	2	9	1	3							
10	8	1	6	5	4	7	3	9	2	5	1	7	0	4							

Diese Tafel zeigt, daß die Größe der Menschen, die zur verticalen Erhebung der Gewichte angewendet wurden, bedeutenden Einfluß auf die Höhe hatte, bis zu welcher sie dasselbe Gewicht brachten. Auch findet man, daß sich die Höhe in einem weit beträchtlicheren Verhältnisse vermindert als das Gewicht zunimmt; man kann daher schließen, daß es vortheilhaft ist, lange Menschen zu gebrauchen, wenn es nothwendig ist, vertical von unten nach oben zu ziehen; und es ist dagegen vortheilhafter, Menschen von bedeutendem Gewichte zu gebrauchen, wenn durch eine Rolle, über die ein Seil gelegt ist, woran die Arbeitsleute in verticaler Richtung von oben nach unten ziehen, eine Last gehoben werden soll. Um die absolute Kraft dieser Menschen in horizontaler Richtung zu bestimmen, verfuhr Schulze so:

Nachdem er über eine offene Grube eine messingene Rolle von 15 Zoll Durchmesser, die äußerst genau verfertigt und deren Axe von gut polirtem Stahle war, um die Reibung zu vermindern und $\frac{3}{4}$ Zoll im Durchmesser hielt, befestigt hatte, legte er über diese Rolle eine seidene Schnur, sorgfältig gearbeitet, so daß sie sowohl die nöthige Stärke als Biegsamkeit besaß. Das eine Ende dieser Schnur hielt einen Haken, um daran ein Gewicht vertical in die Grube zu hängen, das andere Ende aber wurde von einem der 20 Menschen gehalten, der bei der ersten Art der folgenden Versuche es über die Schultern nahm, bei der zweiten Art aber es blos in der Hand hielt.

Schulze hat dafür Sorge getragen, dies so einzurichten, daß die Rolle nach Belieben erhoben oder gesenkt werden konnte, damit das Ende des Seiles, das der Mann hielt, immer in horizontaler Richtung blieb, und der größere sowohl als der kleinere immer seine Stärke nach jeder gegebenen Richtung ausüben konnte.

Er hatte die nöthigen Einrichtungen getroffen, so daß er im Stande war, allmählich eine Waagschale zu belasten, die am Haken an dem Ende des Seiles, das in die Grube hing, befestigt war, während der Mann, der das andere Ende des Seiles hielt, ohne einen einzigen Zoll vorwärts oder rückwärts zu gehen, alle seine Kraft anwendete.

Die folgende Tafel giebt die Gewichte an, die in die Waagschale gelegt worden waren, bis die Arbeitsleute nachgeben mußten, indem sie keine Kräfte weiter hatten, den Druck, den das Gewicht verursachte, zu ertragen. Um mit Sicherheit zu verfahren, vermehrte Schulze das Gewicht jedes Mal um 5 Pfd., indem er von 60 Pfund anfing und die Vorsicht hatte, diese Vermehrung in gleichen Zeitintervallen zu machen, näm-

lich allemal genau in einem Zeitraume von 10 Secunden. Das Resultat dieser Beobachtungen, die mehrere Tage hinter einander wiederholt wurden, ist in den folgenden Tafeln enthalten.

I. Wenn das Seil über die Schultern der Arbeitsleute ging:

Ordnung	Pfd.	Ordnung.	Pfd.	Ordnung.	Pfd.	Ordnung.	Pfd.
1	95	6	100	11	95	16	95
2	105	7	115	12	100	17	100
3	110	8	105	13	110	18	90
4	100	9	95	14	90	19	100
5	105	10	90	15	110	20	100

II. Wenn der Mann das Seil blos vor sich hielt:

Ordnung.	Pfd.	Ordnung.	Pfd.	Ordnung.	Pfd.	Ordnung.	Pfd.
1	90	6	100	11	90	16	90
2	105	7	110	12	90	17	90
3	105	8	100	13	100	18	85
4	90	9	90	14	85	19	100
5	95	10	85	15	105	20	100

Diese beiden Tafeln zeigen, daß die Menschen weniger Kraft besitzen, um an einem Seile vorn zu ziehen, als wenn sie es über die Schultern nehmen; ferner zeigen sie, daß der längste Mann nicht immer die größte Kraft hat, um vermittels eines Seiles zu halten oder in einer horizontalen Richtung zu ziehen. Um die absolute Geschwindigkeit dieser zwanzig Menschen zu erhalten, verfuhr Schulze also:

Nachdem er sehr genau einen Abstand von 12000 rheinl. Fußen in einer ziemlich ebenen Fläche abgemessen hatte, so ließ er diese 20 Menschen mit einem guten Schritte, aber ohne zu rennen, gehen, und zwar so, daß sie es eine Zeit von 4 bis 5 Stunden fortsetzten. Folgende Tafel enthält die Zeit, die sie anwendeten, um diesen Raum zu durchlaufen, nebst der Geschwindigkeit, die sich für jeden von ihnen ergab.

Nummer.	Zeit.	Geschwindigkeit.	Nummer.	Zeit.	Geschwindigkeit.	Nummer.	Zeit.	Geschwindigkeit.
1	40,18	4,94	8	40, 9	4,99	15	36,17	5,51
2	41,12	4,85	9	40,20	4,96	16	41,28	4,82
3	39, 8	5,55	10	40,51	4,90	17	42,25	4,71
4	39,40	5,04	11	36,17	5,51	18	40,19	4,98
5	34,19	5,83	12	38,11	5,24	19	39,57	5,01
6	35,11	5,68	13	38, 5	5,25	20	37,51	5,29
7	38, 7	5,25	14	37, 1	5,40			

Es ist nöthig, in Rücksicht auf diese Versuche zu erwähnen, daß Schulze dafür Sorge trug, in bestimmte Entfernungen Personen zu stellen, auf die er sich verlassen konnte, um zu beobachten, ob diese Menschen gleichförmig und schnell genug gingen, ohne jedoch zu rennen.

Nachdem er auf diese Art nicht nur die absolute Kraft, sondern auch absolute Geschwindigkeit verschiedner Personen erhalten hatte, so bediente er sich folgender Methode, um ihre relative Stärke zu bestimmen.

Er bediente sich einer Maschine, die aus zwei langen Cylindern von sehr hartem Marmor zusammengesetzt war, sich um einen hölzernen verticalen Cylinder drehte, und von einem Pferde in Bewegung gesetzt wurde, das in seinem Gange einen Kreis von 10 rheinländischen Fuß (Halbmesser?) beschrieb. Die Maschine schien am geeignetsten, um folgende Versuche zu machen, welche die relative Stärke, die die Menschen anwendeten, um diese Maschine zu bewegen, bestimmen sollte, und die nachher gebraucht wurden, um zu entscheiden, welche der Euler'schen Formeln den Vorzug verdiene.

Um diese relative Kraft zu erhalten, nahm er dieselbe Rolle, der er sich in dem vorigen Versuche bediente, wand um den verticalen hölzernen Cylinder ein Seil und brachte an dessen anderes Ende, das in die offene Grube hing, ein hinreichendes Gewicht, um der Maschine allmählig verschiedne Geschwindigkeiten zu ertheilen.

Nachdem er auf diese Art ein Gewicht von 215 Pfund angebracht hatte, so erreichte die Maschine eine Geschwindigkeit, welche mit Berücksichtigung der Beschleunigung des Gewichts, der Reibung und der Steifheit des Seils, auf eine gleichförmige Geschwindigkeit reducirt, 2,41 Fuß Geschwindigkeit erzeugte; und nachdem auf dieselbe Art ein Gewicht von 220 Pfd. angewandt worden war, gab die resultirende gleichförmige Bewegung eine Geschwindigkeit von 2,47 Fuß. Diese beiden

Grenzen sind erwähnt, weil sie zu einer Vergleichung mit dem, was folgt, dienen. Schulze begann diese Versuche mit einem Gewichte von 100 Pfd. und vermehrte diese Zahl jedesmal mit 5 bis auf 400 Pfd.

Er ließ diese Maschine durch die sieben ersten seiner Arbeitsleute bewegen, indem er sie auf so eine Art stellte, daß ihre Richtung fast immer senkrecht auf den Arm blieb, an dem das Seil, das in einer fast horizontalen Richtung über ihre Schultern ging, befestigt war.

So gestellt machten sie an dieser Maschine 281 Umdrehungen in zwei Stunden, welches für ihre relative Geschwindigkeit $v = 2{,}45$ Fuß in der Secunde gab. Auch hat man die absolute Kraft oder φ dieser 7 Menschen aus obiger Tafel $= 730$ Pfd., und ihre absolute Geschwindigkeit oder $V = 5{,}30$ Fuß.

Substituirt man daher diese Werthe in die erste Formel, so findet man als relative Kraft $F = 205$ Pfd., welches sehr wohl mit dem zusammenstimmt, was wir oben gefunden haben.

Wird anstatt dieser ersten Formel die zweite genommen, so giebt sie $F = 153$ Pfd., welches viel zu klein ist.

Hieraus geht hervor, daß die letzte Euler'sche Formel in allen Beziehungen vorgezogen werden muß. Schulze machte eine große Anzahl Verbindungen, und fand fast immer dieselbe Wirkung.

Dividirt man die 205 Pfd., die wir so eben gefunden haben, mit 7, der Anzahl der Arbeiter, so erhält man 29 Pfd. als relative Kraft, mit 2,45 Fußen relativer Geschwindigkeit für jeden Mann, welches eher größer ist als die Werthe, die man gewöhnlich bei der Berechnung der Maschinerie anwendet. Eine Anzahl anderer Beobachtungen bei verschiednen Maschinen haben dasselbe Resultat gegeben, das heißt, wir müssen die mittlere Menschenkraft zu 29 oder 30 Pfd. mit einer Geschwindigkeit von $2\frac{1}{2}$ Fußen in der Secunde anschlagen.

Um das Verhältniß der Pferdekraft zu der Menschenkraft zu erhalten, verfuhr Schulze auf eine ähnliche Art; aber seine Resultate in Beziehung auf diese Untersuchung sind weder so correct noch so interessant.

8. Im ersten Bande meiner Mechanik habe ich die Kraft eines Menschen im Zustande der Ruhe auf 70 Pfd. im Durchschnitt und seine äußerste Geschwindigkeit unbelastet auf ungefähr 6 Fuß in der Secunde gesetzt; daher folgerte ich, daß ein Mensch das größte Moment hervorbringen würde, wenn er $31\frac{1}{3}$ Pfd. auf einer Horizontalebene mit einer Geschwindigkeit von 2 Fuß in der Secunde zöge. Dies ist aber nicht die vortheilhafteste Art, die menschliche Kraft anzuwenden.

9. Dr. Desaguliers behauptet, daß ein Mann von Wasser oder einem andern Gewichte ungefähr 550 Pfd. oder ein Oxhoft (mit Einschluß des Gefäßes) 10 Fuß hoch in einer Minute erheben kann; ob er gleich sagt, daß es auf 6 Stunden geschehen könne, so scheint dies doch nach seinen eigenen Thatsachen zu viel; gewiß ist es wenigstens, daß diese Arbeit nicht einen Tag nach dem andern wiederholt werden kann. Smeaton betrachtet dies Werk als ein Erzeugniß der Eile und Verlegenheit; und berichtet, daß 6 tüchtige englische Arbeiter erfordert werden, um 21141 Cubikfuß Seewasser zu der Höhe von 4 Fuß in 4 Stunden zu erheben: in diesem Falle wird der Mann wenig mehr als 6 Cubikfuß frisches Wasser jeder zur Höhe von 10 Fuß in einer Minute erheben. Da nun der Oxhoft ungefähr $8\frac{1}{2}$ Cubikfuß enthält, so ist Smeaton's Arbeitsangabe geringer als die des Desaguliers in dem Verhältnisse 6 zu $8\frac{1}{2}$ oder von 3 zu $4\frac{1}{4}$. Und was seine tüchtigen englischen Arbeiter betrifft, die nach diesem Verhältnisse arbeiten und von ihm doppelt so stark als diejenigen geschätzt werden, die ohne Auswahl genommen werden, so scheint dies darzuthun, daß, bei der Wahrscheinlichkeit willkürlicher Unterbrechung und anderer Zufälle, eine Menschenarbeit für mehrere auf einander folgende Tage nicht größer geschätzt werden darf als ein halber Oxhoft, 10 Fuß hoch in einer Secunde gehoben. Smeaton behauptet gleichfalls, daß zwei gewöhnliche Pferde in drei Stunden und zwanzig Minuten dieselbe Arbeit verrichten können, was wenig mehr als $2\frac{1}{2}$ Oxhofte, 10 Fuß hoch in einer Minute erhoben, beträgt; so daß, wenn diese Angaben richtig sind, ein Pferd die Arbeit von 5 Menschen verrichtet.

Emerson versichert, daß ein Mann von gewöhnlicher Stärke, der vermittels einer Kurbel eine Rolle herumdreht, einen ganzen Tag lang gegen einen Widerstand von 30 Pfd. Gewicht wirken kann; und wenn er 10 Stunden den Tag arbeitet, so wird er ein Gewicht von 30 Pfd. $3\frac{1}{2}$ Fuß hoch in einer Secunde erheben; oder wenn das Gewicht größer ist, so wird er es verhältnißmäßig niedriger erheben. Wenn zwei Männer an einer Winde oder Rolle arbeiten, so können sie leichter 70 Pfd. aufziehen als ein Mann 30 Pfd.; vorausgesetzt, daß das Knie der einen Kurbel senkrecht auf dem der anderen ist. Männer, die zum Tragen von Lasten dienen, werden 150 Pfd. bis 200 Pfd. oder 250 Pfd. nach dem Verhältnisse ihrer Stärke tragen. Ein Mann kann bequem nicht mehr als 70 Pfd. oder 80 Pfd. horizontal ziehen; und er kann mit keiner größeren Kraft, die horizontal in der Höhe seiner Schultern wirkt, stoßen als mit 27 bis 30 Pfd. Aber

eine der vortheilhaftesten Arten, in der ein Mann seine Kraft äußern kann, ist sitzend etwas ziemlich horizontal gegen sich zu ziehen, wie bei der Wirkung des Ruderns.

Coulomb theilte dem französischen National-Institute die Resultate verschiedner Experimente über die Größe der Wirkung, welche Menschen durch ihre tägliche Arbeit hervorbringen, nach den verschiednen Arten, wie sie ihre Kraft anwenden, mit. Zuerst prüfte er die Quantität der Wirkung, welche Menschen hervorbringen können, wenn sie einen Tag lang Treppen entweder mit oder ohne Last ersteigen. Er fand, daß die Quantität der Wirkung eines Mannes, welcher ohne eine Last steigt, und nur seinen Körper zu erheben hat, doppelt so groß ist als die eines Mannes, mit einem Gewichte von 68 Kilogrammen oder 150 Pfd. Avoirdupoids-Gewicht, wenn beide einen Tag lang ihre Arbeit fortsetzen. Daraus ergiebt sich wie sehr, bei gleicher Ermüdung und Zeit, die ganze oder absolute Anstrengung verschiedne Werthe erhalten kann, wenn man die Verbindungen der Anstrengung und Geschwindigkeit verändert.

Das Wort Wirkung aber bezeichnet hier die ganze Quantität Arbeit, die auf das Heben nicht nur einer Last, sondern auch des eignen Körpers verwendet wurde; nach Coulomb's Bemerkung ist es aber äußerst wichtig, die nutzbare Wirkung zu unterscheiden, das ist die Total-Wirkung, weniger den Werth, welcher die Uebertragung des Gewichts des menschlichen Körpers repräsentirt. Die Total-Wirkung ist die größtmögliche, wenn der Mann ohne Last aufsteigt; aber die nutzbare Wirkung ist dann Null; sie ist ferner Null, wenn der Mann so belastet ist, daß er sich nur mit Mühe bewegt; daher besteht zwischen diesen beiden Grenzen ein Werth der Last, bei dem die nutzbare Wirkung einen größten Werth hat. Coulomb setzt voraus, daß der Verlust der Quantität der Wirkung der Last proportional ist (eine Hypothese, welche die Erfahrung bestätigt), dadurch erhält er eine Gleichung, die, nach den Regeln der Maxima und Minima behandelt, 53 Kilogramme (117 Pfd. Avoird.) als das Gewicht giebt, mit dem der Mensch belastet werden muß, um während eines Tages durch Ersteigung von Treppen die größte nutzbare Wirkung hervorzubringen; die Quantität der Wirkung, welche sich aus dieser Bestimmung ergiebt, hat zu ihrem Werthe 56 Kilogramme (123½ Pfd. Avoird.), einen Kilometer oder beinahe 1094 Yards erhoben. Aber diese Art zu arbeiten ist mit einem Verluste von ¾ der ganzen Menschen-Wirkung begleitet, und kostet folglich viermal so viel als eine Arbeit, wobei der Mensch, nachdem er eine Reihe Stufen ohne Last erstiegen hatte, zufällig

fiel, so daß er ein Gewicht beinahe so groß als das seines Körpers zu erheben hätte.

Aus einer Untersuchung der Wirkung von Menschen, die auf einem horizontalen Wege mit oder ohne Last gingen, schloß Coulomb, daß die größte Quantität der Wirkung eintritt, wenn die Menschen belastet gehen, und daß sie sich zu der von Menschen, die mit einer Last von 58 Kilogrammen (128 Pfd. Avoird.) gehen, wie 7 zu 4 verhält. Das Gewicht, das ein Mann tragen muß, um die größte nutzbare Wirkung, nämlich diejenige Wirkung hervorzubringen, bei der die Quantität des Wirkens, die zum Tragen seines eigenen Gewichtes erforderlich ist, von der Total-Wirkung abgezogen wird, beträgt 50,4 Kilogramme oder 111,18 Pfd. Avoird.

Es findet ein besonderer Fall statt, der sich häufig bei Lasten, die in den Städten getragen werden, ereignet, nämlich der, daß die Menschen, nachdem sie ihre Last getragen haben, unbelastet nach einer neuen Last zurückgehen. Das Gewicht, das sie in diesem Falle tragen sollten, um die größte Wirkung hervorzubringen, ist 61,25 Kilogramme ($135\frac{1}{8}$ Pfd. Avoird.). Die Quantität nutzbarer Wirkung in diesem Falle mit der eines Mannes verglichen, der frei und ohne eine Last geht, ist beinahe wie 1 zu 5, oder mit andern Worten, er hat $\frac{4}{5}$ reinen Verlust an seiner Kraftäußerung. Läßt man einen Menschen frei und ohne Last eine Anzahl Stufen ersteigen, so ist die Quantität seiner Wirkung wenigstens eben so groß als bei einer andern Art des Gebrauchs seiner Kräfte erfordert wird.

Wenn Menschen an Bebauung des Bodens arbeiten, so beläuft sich die ganze einen Tag lang angewandte Quantität der Kraftäußerung auf 100 Kilogramme, einen Kilometer erhoben, das ist 220,6 Pfd. 1094 Yards gehoben. Coulomb, der diese Arbeit mit der von Menschen, welche Lasten Stufen hinauftragen, oder bei der Ramm-Maschine arbeiten, vergleicht, findet dabei einen Verlust von ungefähr nur $\frac{1}{20}$ der Quantität der Wirkung, was bei Untersuchungen dieser Art außer Acht gelassen werden kann.

Bei Schätzung mittlerer Resultate sollte man sie nicht nach Versuchen von kurzer Dauer bestimmen, noch Folgerungen aus Kraftäußerungen von Menschen, die mehr als gewöhnlichen Stärke besitzen, ziehen. Die mittleren Resultate beziehen sich auch auf das Klima. „Ich habe," sagt Coulomb, „von den Truppen in Martinique, wo das Thermometer selten tiefer als 20° Reaumür (77° Fahrenheit) steht, große Arbeiten verrichten lassen. Ich habe Arbeiten ähnlicher Art von den Truppen in Frankreich verrichten lassen: und ich kann versichern, daß unter dem 14ten Grade der Breite, wo die Menschen fast immer mit

Schweiß bedeckt sind, sie nicht vermögen, die halbe Arbeit zu verrichten, die sie in unserem Klima vollziehen."

10. Gänzlich übereinstimmend hiermit sind die Versuche vermittels eines Dynamometers, dessen Resultate nicht nur die größere Kraft der civilisirten Menschen in Vergleichung mit wilden, darthun, sondern auch die der Engländer, mit den Franzosen verglichen. Folgende Tafel ist nach einer von Regnier's Tafeln der mittleren Resultate reducirt.

Kraft.	Mit den Händen.		Mit den Zügeln.	
	Pfd.	Unzen.	Pfd.	Unzen.
Wilde von Van Dieman's Land . .	30	6	0	0
= = Neu-Holland	51	8	14	8
= = Timor	58	7	16	2
Civilisirte Menschen: Franzosen . .	69	2	22	1
= = Engländer . .	71	4	23	8

11. Ein Träger in London pflegt eine Last von 200 Pfd. drei Meilen in einer Stunde zu tragen; und ein Paar Sesftenträger gehen unter einer Last von 300 Pfd. 4 Meilen in einer Stunde. Jedoch sind diese Kraftäußerungen, wie Professor Leslie bemerkt, weit unter der Arbeit, die in der Türkey, der Levante und überhaupt an den Ufern des mittelländischen Meeres mit Unterbrechungen vollzogen wird. In Constantinopel trägt ein albanischer Träger 800 oder 900 Pfd. auf seinem Rücken, indem er geht, und seinen Gang durch einen kurzen Stab unterstützt. Solche Lasten werden jedoch nur sehr kleine Strecken getragen. In Marseille tragen, wie man versichert, 4 Träger die ungeheure Last von beinahe 2 Tonnen vermittels einer Art biegsamer Mulden *), die über ihren Kopf weggehen, und auf ihren Schultern mit den Enden von Pohlen ruhen, an denen die Güter angehangen sind.

12. In Rücksicht auf die Größe der verglichenen Kräfte eines Menschen bei verschiednen Beschäftigungen behauptete der verstorbene Robertson Buchanan, daß bei Pumpen, bei dem Drehen einer Haspel, bei dem Ziehen einer Glocke und dem Rudern eines Bootes die dynamischen Kräfte sich wie die Zahlen 100, 167, 227 und 248 verhalten.

Nach den interessanten Versuchen, die in Hachette's Traité des Machines beschrieben werden, hat man, wenn das Gewicht eines Cubikmeters Wassers, einen Meter hoch gehoben (das ist 2208 Pfd. Avoird. oder 4 Oxhoft, 3,281 Fuß

*) soft hods.

hoch gehoben, oder 1,3124 Oxhoft 10 Fuß hoch gehoben) als Einheit gesetzt wird, folgende Maße der täglichen Menschen-Wirkungen im Mittel genommen.

	Dyn. Einh.
1. Ein Mann $7\frac{1}{2}$ Stunden auf einem Abhange von 7 Graden mit einer Last von 15 bis 18 Pfd. gehend	225
2. In einem gebirgigen Lande ohne Last gehend	140
3. Ein Mann Holz eine Leiter hinauftragend, sein Gewicht 123, seine Last 112 Pfd.	109
4. Ein Mann, der Torf Treppen hinauf trägt, sein eigenes Gewicht eingeschlossen 112 bis	120
5. Ein Mann an dem Seile einer Rolle arbeitend, um den Klotz einer Ramm-Maschine zu erheben: drei Beispiele	75 40 48
6. Ein Mann aus einem Brunnen vermittels eines Seiles Wasser ziehend	71
7. Ein Mann an einer Ankerwinde arbeitend	116
8. Ein Mann an einer Ankerwinde arbeitend, um Wasser zu erheben	110

Nimmt man das Gewicht eines Cubikmeters Wasser einen Meter auf einer horizontalen Ebene getragen (22,08 Pfd., 3,281 Fuß) als Einheit für Transporte an, so haben wir für die tägliche Wirkung folgendes:

	Dyn. Einh.
1. Ein Mann, der ohne Last auf einem ebenen Wege reist, wenn sein Gewicht 154 Pfd., seine Reise $31\frac{1}{4}$ Meilen ist	3500
2. Ein Soldat, der 44 bis 55 Pfd. trägt und $12\frac{1}{2}$ Meilen geht, 1800 bis	1900
3. Derselbe bei einem Eilmarsche von 25 Meilen	2800
4. Ein französischer Kohlenträger, das Gewicht des Mannes nicht mit gerechnet, 792 bis	880
5. Ein Träger mit Schubkarren, das Gewicht des Mannes nicht mit gerechnet	1015
6. Träger mit einer Schleife	627
7. Ein Mann ein Boot auf einem Canale ziehend, 110310 Pfd. $6\frac{7}{8}$ Meilen gebracht	550000

14. B. Bevan, ein geschickter Ingenieur, hat über die Anwendung der menschlichen Kraft bei dem Gebrauche von Bohrern, Schraubenziehern u. dgl. Versuche angestellt. Er hat folgendes Verzeichniß bekannt gemacht, wobei er bemerkt, daß manche gewöhnliche Operationen in einem kurzen Zeitraume vollzogen werden, wo sie daher mit einer größeren Kraft-

äußerung geschehen können, als wenn eine längere Zeit nöthig wäre. So ist eine Person im Stande auf eine kurze Zeit folgende Werkzeuge oder Instrumente zu gebrauchen:

	Pfd.
Ein Schnittmesser mit einer Kraft von .	100
Einen Bohrer mit zwei Händen . . .	100
Einen Schraubenzieher mit einer Hand .	84
Die Handhabe eines gewöhnlichen Bank-Schraubenstocks	72
Einen Meißel und Pfrieme bei verticalem Drucke	72
Eine Haspel bei Umdrehung der Handhabe	60
Kneip- und Drahtzangen, Zusammendrückung	60
Einen Handhobel, horizontal	50
Einen Hand- oder Daum-Schraubestock .	45
Eine Hand-Säge	36
Eine Ankertauwinde beim Umdrehen .	16
Kleine Schraubenzieher oder Drehungen durch den blosen Daumen und Zeigefinger .	14

15. Morisot berichtet uns, daß die Zeit, die ein französischer Mauersteinsäger zu einem Schnitte von einer Quadrat-Toise (40,89 engl. Quadr.-Fuß) anwendete, bei verschiedenen Steinen wie folgt war:

	Stunden.
Kalkstein, von gleichem Kerne, spec. Gew. 2200	45
= harter, spec. Gew. 2300	62
Liais, ebenfalls hart, von feinem Kerne spec. Gew. 2400	67
Pyrenäischer Alabaster, der weichste Marmor .	56
Granit aus der Normandie	504
Granit von den Vogesen	700
Rother und grüner Porphyr	1177

Die Arbeitsleute machten 50 Schwingungen in einer Minute, jeder Zug betrug ungefähr $15\frac{3}{4}$ Zolle.

16. Hassenfratz bestimmt 13 Kilogramme als die mittlere Wirkung eines solchen Mannes, aber Navier betrachtet in seiner neuen Ausgabe von Belidor's hydraulischer Architektur diese Schätzung als zu hoch. Wäre sie richtig, so würde die tägliche Quantität Arbeit der Säger 376 Kilogramme einen Kilometer hoch (818 Pfd. $\frac{5}{8}$ Meile) gehoben seyn, eine Quantität, die mehr als das Dreifache von dem ist, was der Mensch an einer Winde arbeiten kann. Navier giebt ein correcteres Maß dieser Arbeit für 12 Stunden;

nämlich 188 Kilogramme einen Kilometer hoch gehoben, also halb so viel als vorher. Allein alles dies ist wahrscheinlich sehr unbestimmt.

17. Unter den vierfüßigen Thieren sind diejenigen, die zu einer mechanischen Arbeit angewendet werden, der Hund, Esel, Maulesel, Ochse, das Kameel und das Pferd. Unter allen diesen ist, so viel wir wissen, das Pferd das einzige Thier, dessen Thätigkeit sorgfältigen Versuchen unterworfen worden ist; und selbst über diese edlen Thiere sind die Meinungen in Rücksicht auf die mittleren Resultate ihrer Leistungen sehr abweichend. Die dynamische Kraft des Pferdes ist jedoch wahrscheinlich ungefähr sechsmal so groß als die eines starken und thätigen Arbeiters. Desaguliers stellt das Verhältniß von 5 zu 1 auf, das mit Smeaton's Bestimmungen übereinstimmt. Die französischen Schriftsteller betrachten gewöhnlich sieben Menschen einem Pferde gleich. Ich nahm in dem ersten Theile meiner Mechanik das Mittel zwischen beiden, nämlich das Verhältniß von 6 : 1, und bestimmte die Stärke eines Pferdes gleich 420 Pfd. bei einem mittelmäßigen Zuge. Jedoch darf das Verhältniß nicht als beständig betrachtet werden, sondern ändert sich häufig nach der Aufziehung des Thieres sowohl als nach der Natur der Arbeit, zu der es dient, ab. So ist die nachtheiligste Art, wie Delahire bemerkt, die Pferdekraft anzuwenden, wenn man es einen steilen Hügel hinaufziehen läßt, während der Bau des Menschen zu dieser Arbeit geeigneter ist; daher werden drei Menschen, jeder mit einem Gewichte von 100 Pfd. belastet, die einen solchen Hügel ersteigen, schneller vorwärts kommen als ein Pferd mit 300 Pfd.

18. In den Memoiren der französischen Akademie für das Jahr 1703 stehen vergleichende Beobachtungen von Amonton über die Geschwindigkeit der Pferde und Menschen, wo derselbe die Geschwindigkeit eines Pferdes mit seinem Reiter, eher höher als $5\frac{1}{4}$ Fuß in der Secunde oder $3\frac{1}{7}$ Meilen in der Stunde, und wenn es bei derselben Last mit einem mäßigen Schritte geht, auf ungefähr $8\frac{1}{2}$ Fuß in der Secunde oder 6 Meilen in der Stunde festsetzt. Diese Geschwindigkeiten sind jedoch etwas kleiner als die mittleren Geschwindigkeiten.

19. Die beste Art aber, die Pferdekraft anzuwenden, ist, sie Gewichte auf Wagen u. s. w. ziehen zu lassen. Auf diese Art Arbeit sollten daher die Untersuchungen der Beobachter gerichtet werden. Ein angespanntes Pferd, das zum Zuge sich anschickt, beugt sich vorwärts, neigt seine Schenkel und bringt seine Brust der Erde näher; und dies um so mehr, je bedeutender die Anstrengung ist. Wenn daher ein Pferd zieht, so

hängt seine Anstrengung sowohl von seinem eigenen Gewichte als auch von der Last ab, die es auf seinem Rücken trägt.

In der That ist es sehr gut, den Rücken eines ziehenden Pferdes bis zu einem bestimmten Maße zu belasten; obgleich, wie es beim ersten Anblick scheinen mag, man glauben kann, daß dadurch unnöthiger Weise die Beschwerde des Pferdes vergrößert würde; allein man muß bedenken, daß die Masse, mit der das Pferd vertical belastet ist, sich zum Theil zu der Anstrengung hinzufügt, die es in der Richtung des Zuges macht, und es daher nicht genöthigt wird, sich so weit vorwärts zu biegen als es sonst thun würde; und von diesem Gesichtspuncte aus betrachtet, möchte dadurch das Ziehen mehr erleichtert werden, als Beschwerde durch den verticalen Druck verursacht wird. Kärner und Fuhrleute wissen dies gewöhnlich recht gut, und bemühen sich, die Last so zu vertheilen, daß die Deichseln einen gehörigen Theil des Gewichts auf den Rücken des Deichselpferdes bringen. Es wird dies mit großem Erfolge in Yarmouth in Norfolk angewendet, wo eine Menge enger Straßen, die den Marktplatz mit dem Kai verbinden, auf die Erfindung und den Gebrauch kleiner, starker, schmaler Karren geleitet hat, die daher Yarmouth-Karren heißen und von einem Pferde gezogen werden; auf diesen werden die Lasten häufig verrückt, vorzüglich wenn die Karren über die Brücke gehen, damit sich die Thiere desto besser aufstemmen und folglich eine größere dynamische Kraft erhalten können.

20. Die beste Lage der Zugbänder während des Ziehens des Pferdes ist, daß sie auf dem Kummet an der Brust und den Schultern senkrecht sind; steht das Pferd still, so ist dann das Zugband mehr aufwärts von der Richtung des Weges geneigt; biegt es sich aber vorwärts, um die Last zu ziehen, so wird das Zugband ziemlich mit der Ebene, auf der das Fuhrwerk gezogen werden soll, parallel; und wenn es eine Schleife oder irgend etwas anderes ohne Räder zieht, so ist die Neigung des Zugbandes gegen den Weg (nach der Tafel Seite 252) ungefähr $18\frac{1}{2}^{\circ}$, wenn die Reibung ein Drittel des Druckes ist. Weicht jedoch das Verhältniß der Reibung zum Drucke hiervon ab, so wird doch die Tafel ebenfalls den Winkel angeben, den das Band mit der Straße machen muß.

21. Wenn ein Pferd in einem Kreise herumläuft, wie es oft bei Mühlen und anderen Maschinen, die von Pferden bewegt werden, der Fall ist, so müssen die Kreise gegeben seyn, in denen das Pferd laufen soll. Da eine geradlinige Bewegung für das Pferd am bequemsten ist, so leuchtet ein, daß, je weniger die Linie gekrümmt ist, mit desto mehr Leichtigkeit wird es darauf gehen, und desto weniger braucht es sich

aus seiner verticalen Lage zu biegen; überdies wird bei gleicher Geschwindigkeit die Centrifugalkraft desto kleiner seyn, je größer der Kreis ist, wobei verhältnißmäßig die Reibung des cylindrischen Theiles des Zapfens und die Arbeit der Bewegung der Maschine vermindert wird. Je größer ferner der Durchmesser des Kreises ist, den das Pferd durchläuft, desto näher fällt die Sehne des Kreises mit der Tangente zusammen, welches die vortheilhafteste Lage der Zuglinie ist. Obgleich daher ein Pferd in einem Kreise von 18 Fuß Durchmesser ziehen kann, so ist es doch im Allgemeinen besser, wenn er nicht unter 25 oder 30 Fuß ist; ja in manchen Fällen würden 40 Fuß vorzuziehen seyn.

22. Desaguliers und einige andere haben behauptet, daß ein Pferd, das täglich zu einem beinahe horizontalen Zuge angewendet wird, täglich acht Stunden ungefähr 200 Pfd. $2\frac{1}{2}$ Meile in der Stunde oder $3\frac{2}{3}$ Fuß in der Secunde ziehen kann. Wird das Gewicht bis auf ungefähr 240 oder 250 Pfd. vergrößert, so kann das Pferd nicht länger als 6 Stunden des Tages arbeiten, und zwar mit einer geringeren Geschwindigkeit. In beiden Fällen aber wird es besser ziehen, wenn es ein Gewicht trägt als wenn es dies nicht thut. Sauveur schätzt die mittlere Kraft eines Pferdes auf 175 franz. oder 189 Avoirdupoids-Pfd. nebst einer Geschwindigkeit von wenigstens 3 Fuß in der Secunde. Aber wahrscheinlich ist dies zu hoch, als daß es acht Stunden lang Tag für Tag fortgesetzt werden könnte. An einem anderen Orte bestimmt Desaguliers als mittlere Arbeit eines Pferdes die Erhebung eines Oxhofts mit Wasser angefüllt (550 Pfd.) 50 Fuß hoch in einer Minute. Aber Smeaton, dessen Autorität sehr viel gilt, behauptet, daß nach einer Anzahl Versuche die größte Wirkung 550 Pfd. 40 Fuß hoch in einer Minute gehoben, beträgt. Und aus einigen Versuchen, die die Gesellschaft zur Förderung der Künste, unter Leitung von Moore angestellt hatte, schloß man, daß ein Pferd, das in einer Stunde 3 Meilen läuft, eine Kraft von 80 Pfd. ausüben kann. Unglücklicher Weise sind wir mit der Natur dieser Versuche und Beobachtungen, aus denen dies geschlossen wurde, nicht genau genug bekannt, um eine gehörige Vergleichung ihrer Resultate anzustellen. Niemand jedoch sollte bestimmen wollen, was ein Pferd auf einem Wagen ziehen kann, weil in diesem Falle nur die Reibung zu überwinden ist (wenn die Last einmal in Bewegung gesetzt wurde); so daß ein mittelmäßiges Pferd, das an einem Wagen gut angespannt ist, oft mehr als 1000 Pfd. ziehen wird. Die beste Schätzung würde die seyn, die das Gewicht misst, das ein Pferd aus einem Ziehbrunnen herausziehen kann, indem es an

einem horizontalen Seile zieht, das durch eine einfache Rolle, deren Reibung so viel als möglich beseitigt ist, in eine verticale Lage gebracht wird.

23. Tredgold hat bei der neuen Ausgabe seines Werks über Eisenbahnen seine Aufmerksamkeit auf diesen Gegenstand der Pferdekraft gerichtet. Sein Ausdruck für die Kraft eines Pferdes ist schon (Seite 386) angeführt worden; nämlich $250\ v\left(1-\frac{v}{V}\right)$; und $\frac{250\ d\ v\left(1-\frac{v}{V}\right)}{1+n}$ für die tägliche Arbeit in Pfd. eine Meile gehoben, wo d die Anzahl Stunden bedeutet, die das Pferd arbeitet, das Gewicht aber des Wagens zu der der Last sich wie n : 1 verhält. Auch giebt er als die größte Geschwindigkeit $\frac{14,7}{\sqrt{d}}$, in Meilen für die Stunde. Diese Ausdrücke können jedoch nur als Versuche betrachtet werden, und bei aller Achtung für den höchst sinnreichen und unermüdlichen Verfasser müssen wir doch in Beziehung auf ihre vollkommene Genauigkeit unser Urtheil zurückhalten. Aber Tredgold ist ein Mann sowohl von Erfahrung als umfassenden Kenntnissen, so daß Alles Aufmerksamkeit verdient, was er über einen so zusammengesetzten Gegenstand vorbringt. Wir geben hier ein Täfelchen zur Vergleichung der Dauer der täglichen Arbeit eines unbelasteten Pferdes nebst der größten Geschwindigkeit.

Dauer der Arbeit, Stunden.	Größte Geschwindigkeit ohne Last, in Meilen für die Stunde.
1	14,7
2	10,4
3	8,5
4	7,3
5	6,6
6	6,0
7	5,5
8	5,2
9	4,9
10	4,6

Nimmt man 6 Arbeitsstunden des Tages an, das äußerste, was Tredgold für möglich hält, und die größte nutzbare Wirkung nach seiner Angabe zu 125 Pfd. 3 Meilen in einer Stunde bewegt, und betrachtet man die Kosten des Fuhrwerks als Einheit, so ist

Meilen in der Stunde.	Verhältnißmäßige Kosten.	Bewegende Kraft.
2 . .	$1\frac{1}{8}$ oder 1,125 . .	166 Pfd.
3 . .	1 . .	125 =
$3\frac{1}{2}$ . .	$1\frac{1}{3\frac{1}{5}}$ oder 1,0285 . .	104 =
4 . .	$1\frac{1}{8}$ oder 1,125 . .	83 =
$4\frac{1}{2}$ . .	$1\frac{1}{3}$ oder 1,333 . .	$62\frac{1}{2}$ =
5 . .	$1\frac{4}{5}$ oder 1,8 . .	$41\frac{2}{3}$ =
$5\frac{1}{8}$ . .	2 . .	$36\frac{1}{2}$ =

Das heißt, wenn die Kosten, um Güter 3 Meilen in der Stunde zu schaffen, 1 sind, so würden die Kosten bei $4\frac{1}{2}$ Meilen in der Stunde $1\frac{1}{3}$ seyn; u. s. f., indem die Kosten das Doppelte betragen, wenn die Geschwindigkeit $5\frac{1}{8}$ Meile in der Stunde ist.

24. Nach Tredgold werden also für den Tag von 6 Stunden 2250 Pfd. eine Meile erhoben. Bevan, der mehrere Versuche über die Zugkraft bei der Bewegung von Canal-Booten auf dem großen Verbindungs-Canale anstellte, fand die Zugkraft 80 Pfd., und den in einem Tage durchlaufenen Raum 26 Meilen; daraus ergiebt sich nur als Tagesarbeit $26 \times 80 = 2080$ Pfd. eine Meile gehoben, bei einer Geschwindigkeit von 2,45 Meilen in der Stunde; ein Resultat, das etwas geringer als das von Tredgold ist, indem die Differenz wahrscheinlich aus der Abweichung des Winkels der Kettenlinie von dem Horizonte entspringt. Vergl. S. 177.

2. Abschnitt. Passive Kräfte.

1. Wenn ein Gewicht von einer Stange getragen wird, die auf zwei Stützen ruht, so verhält sich der Druck auf jede Stütze wie ihre Entfernung vom Gewichte.

2. Der Zug eines Gewichtes, das in einem gegebenen Puncte einer Stange, die horizontal gelegt und an beiden Enden unterstützt ist, auf dieser liegt, ist dem Rechtecke der Abschnitte proportional, in die der Punct die Stange theilt.

3. Daher ist dieser Zug in der Mitte der Stange am größten, oder mit anderen Worten, wenn die Stange prismatisch ist, so ist sie in der Mitte am leichtesten zu brechen, oder sie ist daselbst am schwächsten.

4. Der Zug, der durch das Gewicht einer gleichartigen Stange in irgend einem Puncte ihrer Länge hervorgebracht wird, ist dem Zuge gleich, der durch das halbe Gewicht des einen Abschnitts, das an dem Ende eines Hebels von der Länge des anderen Abschnittes wirkt, hervorgebracht wird.

5. Erklärung. Ein vollkommen elastischer Körper wird anfänglich von gleichen Kräften in gleichen Graden ausgedehnt und zusammengedrückt und verhältnißmäßig von verhältnißmäßigen Kräften.

6. Erklärung. Der Modulus der Elasticität irgend einer Substanz ist eine Säule derselben Substanz, die fähig ist, auf ihre Grundfläche einen Druck auszuüben, der sich zu dem Gewichte, das einen gewissen Grad der Zusammenwirkung hervorbringt, verhält, wie die Länge des Körpers zur Verminderung seiner Länge.

Der Modulus der Elasticität ist das Maß der elastischen Kraft jeder Substanz.

Man kann leicht eine Formel für den Modulus der Elasticität erhalten. Es sey ε die Quantität, um die eine Stange von Holz, Eisen oder anderer Substanz auf einen Quadratzoll im Durchschnitte und einen Fuß in der Länge durch die Kraft f ausgedehnt oder zusammengedrückt wird; l aber sey eine andere Länge einer Stange von gleicher Grundfläche und gleicher Substanz, dann wird sich verhalten:

$1 : l = \varepsilon : \triangle$ oder $l\varepsilon = \triangle$ die Ausdehnung oder Verminderung in der Länge l.

Der Modulus der Elasticität wird auf eine ähnliche Art gefunden; wie sich die Verminderung der Länge einer Substanz zu ihrer Länge verhält, so verhält sich die Kraft, die diese Verminderung hervorbrachte, zu dem Modulus der Elasticität. Oder wenn man das Gewicht des Modulus in Pfd. für eine Grundfläche von einem Quadratzolle mit m bezeichnet, so ist:

$$\varepsilon : f = 1 : m = \frac{f}{\varepsilon}.$$

Und wenn w das Gewicht einer Stange der Substanz für einen Quadratzoll Durchschnitt und einen Fuß in der Länge bezeichnet; ferner M die Größe des Modulus der Elasticität ist, so hat man

$$\frac{f}{w\varepsilon} = M.$$

7. Wenn eine Kraft an einer elastischen Säule von einer rechtwinklig-prismatischen Gestalt in einer Richtung parallel mit der Axe angebracht wird, so äußern die der Richtungslinie der Kraft zunächst liegenden Theile einen Widerstand in einer entgegengesetzten Richtung; diejenigen Theilchen, die in einem Abstande von der Axe sich befinden, der gleich ist der dritten Proportionale zu der Dicke und dem zwölffachen Abstande von der Richtungslinie der Kraft, bleiben in ihrem na-

türlichen Zustande; und die Theile weiter hinaus wirken in der Richtung der Kraft.

8. Wenn das Gewicht des Modulus der Elasticität einer Säule m ist, f ein Gewicht, das dieselbe auf irgend eine Art biegt, D der Abstand desselben von der Axe und d die Dicke der Säule, so wird der Krümmungshalbmesser seyn: $\frac{d^2 m}{12 D f}$.

9. Der Abstand des Punctes der größten Krümmung einer prismatischen Stange von der Richtungslinie der Kraft ist zweimal der Sinus versus desjenigen Kreisbogens der größten Krümmung, dessen Ende demjenigen der Stange parallel ist.

Wirkt die Last nach der Länge und die Krümmung ist unbeträchtlich, so fällt die Gestalt mit der harmonischen Curve zusammen, indem die Krümmung dem Abstande von der Axe proportional ist; und der Abstand des Indifferenzpunctes von der Axe wird die Secante eines Bogens, der dem Abstande von der Mitte der Säule proportional ist.

10. Wenn eine Stange von Natur die Gestalt hat, die eine prismatische Stange erhalten würde, wenn sie langsam durch eine Längenkraft gebogen würde, so wird, wenn man ihre Dicke d, ihre Länge l, die Peripherie eines Kreises vom Durchmesser 1, c, das Gewicht des Modulus der Elasticität m, die natürliche Ablenkung von der geradlinigten Gestalt $\triangle'$, und eine an den Enden der Axe angebrachte Kraft f nennt, die ganze Ablenkung von der geradlinigten Gestalt seyn:

$$\triangle' = \frac{d^2\ c^2\ \triangle\ m}{d^2\ c^2\ m - 12\ l^2\ f}.$$

Anmerkung. Aus dieser Formel ergiebt sich, daß, wenn die anderen Quantitäten unverändert bleiben, $\triangle'$ sich im Verhältnisse zu $\triangle$ verändert, und wenn $\triangle = 0$ ist, die Stange nicht in einem gebogenen Zustande zurückgehalten werden kann, so lange der Nenner des Bruchs eine endliche Größe bleibt; wird aber $d^2\ c^2\ m = 12\ l^2\ f$, so wird $\triangle'$ unendlich, welches auch die Größe von $\triangle$ seyn mag, und die Kraft wird die Stange überwältigen, oder sie zuletzt so sehr biegen, daß die Wirkung der übrigen Kräfte vernichtet wird. In diesem Falle ist $f = \left(\frac{d\,c}{l}\right)^2 \cdot \frac{m}{12} \cdot 0{,}8225\ \frac{d^2}{l^2}\ m$, welches die Kraft ist, die die Stange bei einem bedeutenden Grade von Krümmung in Gleichgewicht zu erhalten vermag. Ist daher der Modulus für irgend einen Körper bekannt, so können wir sogleich das Gewicht bestimmen, was eine gegebene fast gerade Stange zu tragen vermag. Setzt man z. B. bei Tannenholze die Höhe desselben auf 10000000 Fuß, so kann eine Stange von einem

Quadratzolle Grundfläche und 10 Fuß Länge anfangen, sich zu biegen bei dem Gewichte einer Stange von derselben Dicke, und in der Länge $= 0{,}8225 \times \frac{1}{120 \times 120} \times 10000000$ Fußen $= 571$ Fußen; das ist, bei einem Gewichte von ungefähr 120 Pfd., ohne die Wirkung des Gewichts der Stange selbst zu berücksichtigen. Auf dieselbe Art kann die Stärke einer Stange von einer anderen Substanz bestimmt werden, entweder durch unmittelbare Versuche über ihre Biegsamkeit, oder aus dem Klange, den sie hervorbringt. Wenn $f = \frac{m}{n}$, so ist $\frac{l^2}{d^2} = 0{,}8225\ n$ und $\frac{l}{d} = \sqrt{0{,}8225\ n} = 0{,}907 \sqrt{n}$; kennt man daher die Kraft, welche erfordert wird, eine Stange oder Säule zu brechen, so kann man berechnen, welches das Verhältniß ihrer Länge zu ihrer Dicke seyn muß, damit sie eher anfangen muß sich zu biegen als zerdrückt zu werden.

11. Wenn eine Längenkraft an die Enden einer geraden prismatischen Stange in dem Abstande D von der Axe angebracht wird, so wird die Beugung der Mitte der Stange seyn $D \left[\text{sec. arc.} \left(\sqrt{\frac{3f}{m}} \times \frac{l}{d} \right) - 1 \right]$.

12. Die Gestalt einer elastischen Stange, die an einem Ende befestigt ist und an dem andern ein Gewicht trägt, wird zuletzt eine cubische Parabel, und die Ablenkung ist $\frac{2}{3}$ des Sinus versus eines gleichen Bogens bei dem kleinsten Krümmungskreise.

13. Das Gewicht des Modulus der Elasticität einer Stange verhält sich zu einem Gewichte, das an ihrem Ende wirkt, wie der vierfache Würfel der Länge zu dem Producte des Quadrats der Dicke in die Ablenkung.

14. Wenn eine gleichartige Stange horizontal an einem Ende befestigt und durch ihr eigenes Gewicht gebogen wird, so wird die Biegung am Ende seyn der halbe Sinus versus eines gleichen Bogens in dem Krümmungskreise am befestigten Puncte.

15. Die Höhe des Modulus der Elasticität einer an einem Ende befestigten Stange, die durch ihr eigenes Gewicht gebogen wird, ist die Hälfte mehr als die vierte Potenz der Länge, durch das Product des Quadrats der Dicke und der Biegung dividirt.

16. Die Ablenkung einer an beiden Enden unterstützten Stange, ist, wenn sie durch das Gewicht derselben erzeugt

wird, $\frac{5}{6}$ sin. vers. des halben gleichen Bogens in dem Kreise der kleinsten Krümmung.

17. Die Höhe des Modulus der Elasticität einer Stange, die an beiden Enden unterstützt ist, ist $\frac{5}{32}$ der vierten Potenz der Länge, dividirt durch das Product der Biegung in das Quadrat der Dicke.

Nach einem von Leslie über eine Stange unter diesen Umständen angestellten Versuche scheint die Höhe des Modulus der Elasticität des Tannenholzes 9328000 Fuß zu seyn. Chladni's Beobachtungen über den Klang des Tannenholzes geben sehr nahe dasselbe Resultat.

18. Das Gewicht, unter dem eine verticale an dem Ende nicht befestigte Stange anfängt sich zu biegen, steht zu jedem Gewichte, das auf die Mitte derselben Stange gelegt wird, wenn man diese an den Enden in einer horizontalen Lage unterstützt, beinahe in dem Verhältnisse von $\frac{514}{10000}$ der Länge zu der Ablenkung.

19. Erklärung. Die Steifheit der Körper wird durch ihren Widerstand bei einer gleichen linearen Ablenkung gemessen.

20. Die Steifheit einer Stange verhält sich direct wie ihre Breite, wie der Würfel ihrer Dicke und umgekehrt wie der Würfel ihrer Länge.

21. Die directe Cohäsions- oder Repulsiv-Kraft eines Körpers ist in dem zusammengesetzten Verhältnisse seiner ursprünglichen Elasticität, seiner Zähigkeit und der Größe seines Durchschnitts.

Obgleich die meisten natürlichen Substanzen ihrer ursprünglichen Beschaffenheit nach vollkommen elastisch zu seyn scheinen, so ist es doch oft der Fall, daß sich ihre Zähigkeit in Beziehung auf Ausdehnung und Zusammendrückbarkeit sehr wesentlich unterscheidet. Im Allgemeinen kann man sagen, daß die Körper weniger Zähigkeit im Widerstande gegen die Ausdehnung als gegen die Zusammendrückung zeigen.

22. Die transversale Stärke einer Stange verhält sich direct wie das Quadrat der Breite und das Quadrat der Dicke, umgekehrt aber wie die Länge.

Anmerkung. Wenn eine der Oberflächen einer Stange sich nicht zusammendrücken ließe, und die Cohäsionskraft aller ihrer Schichten auf der anderen vereinigt wäre, so würde ihre Stärke sechsmal so groß als in dem natürlichen Zustande seyn; denn der Krümmungshalbmesser wäre dann $\frac{d^2\ m}{Df}$, ein Ausdruck, der nicht kleiner als doppelt so groß wie im natürlichen Zustande seyn kann, weil die Schichten bei derselben Krümmung

zweimal so viel ausgedehnt werden würden, als wenn der neutrale Punct in der Axe liegt; f aber würde dann sechsmal so groß seyn.

23. Erklärung. Die Federkraft (resilience) einer Stange kann als der Höhe proportional gedacht werden, von der ein gegebener Körper fallen muß, um sie zu brechen.

24. Die Federkraft prismatischer Körper steht im einfachen Verhältnisse ihrer Masse.

25. Die steifste Stange, die aus einem gegebenen Cylinder geschnitten werden kann, ist die, deren Dicke sich zur Breite wie die Quadratwurzel von 3 zu 1 verhält; bei der stärksten verhalten sie sich wie die Quadratwurzel von 2 zu 1; mit der größten Kraft aber wird diejenige zurückspringen, wo Dicke und Breite gleich sind.

26. Denkt man sich eine Röhre von verschwindender Dicke in eine ähnliche Röhre von größerem Durchmesser, aber gleicher Länge hineingesteckt, so wird, wenn die Quantität der Materie ungeändert bleibt, die Stärke in dem Verhältnisse des Durchmessers, die Steifheit in dem Verhältnisse des Quadrats des Durchmessers zunehmen, die Federkraft jedoch unverändert bleiben.

27. Die Steifheit eines Cylinders verhält sich zu der seines umschriebenen Prisma's wie die dreifache Masse des Cylinders zur vierfachen des Prima's.

28. Wenn eine Säule, die einer Längenkraft unterworfen ist, aus einem Brete von gleichmäßiger Dicke geschnitten wird, so daß die Dehnbarkeit und Zusammendrückbarkeit der Oberflächen ursprünglich überall gleich seyn soll, so muß ihr Umriß ein Kreisbogen seyn.

29. Wenn eine Säule aus einer Pfoste von gleichmäßiger Breite geschnitten wird und der Umriß, der ihre Dicke begrenzt, aus zwei Dreiecken zusammengesetzt ist, die an ihren Grundlinien verbunden sind, so wird die Spannung der Oberflächen, die durch eine Längenkraft hervorgebracht wird, überall gleich seyn, wenn der Krümmungshalbmesser in der Mitte gleich der halben Länge der Säule wird, und in diesem Falle wird die Curve eine Cykloide seyn.

Unterscheidet sich die Krümmung in der Mitte von der der Cykloide, so wird die Untersuchung der Figur der Säule schwieriger. Sie kann jedoch mechanisch bestimmt werden, wenn man sowohl die Dicke der Säule als ihren Krümmungshalbmesser immer der $\sqrt{a}$ proportional macht. Verändert sich die Breite der Säule in demselben Verhältnisse als die Dicke, so müssen sie sich beide überall wie die Cubikwurzel aus a, der Ordinate, verhalten. (Young's Natur-Philosophie Th. 2.)

30. Der Modulus der Elasticität ist noch nicht in Beziehung auf so viele Gegenstände bestimmt worden, wie man es wünschen könnte. Professor Leslie führt jedoch mehrere an, die unten folgen werden. Vom weißen Marmor ist er 2150000 Fuß oder ein Gewicht von 2520000 Pfd. Avoird. auf den Quadratzoll, während er bei dem Portland-Stein nur 1570000 Fuß ist, was einem Gewichte von 1530000 Pfd. auf den Quadratzoll entspricht.

Bei dem weißen Marmor und dem Portland-Stein fand man für jeden Quadratzoll des Durchschnitts eine Cohäsionskraft von 1811 Pfd. und 857 Pfd., daher würden aufgehangene Säulen dieser Steine von der Höhe von 1542 und 945 Fußen oder nur dem 1394sten und 1789sten Theil ihres Elasticitäts-Maßes durch ihr eigenes Gewicht auseinander gerissen werden.

31. Die beigefügte Tafel giebt von den hauptsächlichsten Arten von Zimmerholz, die bei dem Bauen angewendet werden, den Modulus der Elasticität und den Theil desselben an, welcher ihre Cohäsion bestimmt, oder der sie der Länge nach auseinander reißen würde.

Teak	6040000	Fuß .	168tel,
Eiche	4150000	Fuß .	144tel,
Feigenbaum . .	3860000	Fuß .	108tel,
Buche	4180000	Fuß .	107tel,
Esche	4617000	Fuß .	109tel,
Ulme	5680000	Fuß .	146tel,
Memel-Tanne .	8292000	Fuß .	205tel,
Christiania-Tanne	8118000	Fuß .	146tel,
Lerchenbaum . .	5096000	Fuß .	121tel.

Leslie giebt auch diese tabellarische Uebersicht von ihrer absoluten Cohäsion oder der Last, die ein Prisma von einem Quadratzolle zerreißen würde und der Höhe des Prismas, das durch die Wirkung seiner Schwere abgerissen werden würde.

Teak . . .	12915 Pfd.	.	36049 Fuß,
Eiche . . .	11880 Pfd.	.	32900 Fuß,
Feige . . .	9630 Pfd.	.	35800 Fuß,
Buche . . .	12225 Pfd.	.	38940 Fuß,
Esche . . .	14130 Pfd.	.	42080 Fuß,
Ulme . . .	9720 Pfd.	.	39050 Fuß,
Memel-Tanne	9540 Pfd.	.	40500 Fuß,
Christiania-Tanne	12346 Pfd.	.	55500 Fuß,
Lerchenbaum .	12240 Pfd.	.	42160 Fuß.

32. Der Modulus der Elasticität von Hanf-Fasern ist nicht bestimmt, kann aber wahrscheinlich ungefähr 5000000

Fuß angeschlagen werden. Ihre Cohäsion ist für jeden Quadratzoll des Queerdurchschnitts 6400 Pfd. Die beste Art die Stärke eines Hanfseils zu schätzen ist, das Quadrat seines Umfangs in Zollen mit 200 zu multipliciren; dann wird das Product die Spannung in Pfunden ausdrücken, in die es ohne Schaden versetzt werden kann; für Schiffsseile multiplicire man mit 120 anstatt mit 200. Die äußerste Spannung ist wahrscheinlich das Doppelte von diesem, wie es aus folgendem Berichte von Dühamel's Versuchen hervorzugehen scheint. Wird Garn von 180 Yard Länge in ein Seil von nur 120 Yard gedreht, so wird es ein Viertel seiner Stärke verlieren, indem nur die äußersten Fasern dem größten Theile der Spannung Widerstand leisten. Das Tauwerk des verstorbenen Capitän Huddart hat beinahe die ganze Kraft der Seile, da es bei der Verbindung der Fäden eine Zusammenziehung von nur dem achten Theile erleidet.

33. Die äußerste Kraft, die ein Seil aushalten kann, bevor es reißt, schätzt man ziemlich richtig, wenn man ein Fünftel des Quadrats des Umfangs des Seiles nimmt, und damit die Tonnen ausdrückt, die es tragen kann. Dies ist ungefähr das Doppelte der Regel, die wir oben (Artikel 32) gegeben haben; auch ist sie für getheerte Seile, die immer schwächer sind als ungetheerte, zu groß.

Die folgenden Versuche wurden von Dühamel zu Rochfort mit Seilen von 3 franz. Zollen Umfang, aus dem besten Hanf von Riga verfertigt, den 8. August 1741 angestellt.

	Unbetheerte.		Betheerte.
Es rissen bei einem Zuge von	4500 Pfd.	. .	3400 Pfd.
	4000 =	. .	3300 =
	4800 =	. .	3258 =
	Den 25. August 1743.		
	4600 =	. .	3500 =
	5000 =	. .	3400 =
	5000 =	. .	3400 =
	Den 23. September 1746.		
	3880 =	. .	3000 =
	4000 =	. .	2700 =
	4200 =	. .	2800 =

Ein Theil unbetheerter und betheerter Seile wurde von einer Quantität genommen, die den 12. Februar 1746 gemacht waren.

Diese wurden in das Magazin gelegt und von Zeit zu Zeit Vergleichungen angestellt, als:

	Unbetheerte.	Betheerte.	Unterschied.
1746 den 14. April .	2645 Pfd. .	2315 Pfd. .	333 Pfd.
1747 den 18. Mai .	2762 = .	2155 = .	607 =
1747 den 21. October .	2710 = .	2050 = .	660 =
1748 den 19. Juni .	2575 = .	1752 = .	823 =
1748 den 2. October .	2425 = .	1837 = .	588 =
1749 den 25. September	2917 = .	1865 = .	1052 =

Dühamel sagt, es sey durch Versuche entschieden, daß bei fortgesetztem Gebrauche unbetheerte Seile ein Drittel dauerhafter sind als betheerte; auch behalten sie zweitens ihre Kraft weit länger, wenn sie aufbewahrt werden; drittens widerstehen sie dem Wetter ein Viertel länger. Diese Bemerkungen verdienen die Aufmerksamkeit der Praktiker.

34. Die Metalle unterscheiden sich in ihrer Elasticitäts- und Cohäsions-Kraft weit mehr von einander als die verschiednen Arten von Holz oder vegetabilischen Faserstoffen. So ist die Cohäsion feinen Stahles ungefähr 135000 Pfd. für den Quadratzoll, während die des gegossenen Bleies sich nur ungefähr auf $\frac{1}{130}$ davon oder auf 1800 Pfd. beläuft.

Nach den genauen Versuchen von Georg Rennie im Jahre 1817 ist die Cohäsionskraft einer Stange von einem Zoll Grundfläche von verschiednen Metallen in Pfunden des Avoirdupoids-Gewichts mit der entsprechenden Länge in Fußen die folgende.

Gegossener Stahl . . .	134256 Pfd. .	39455 Fuß,
Schwedisches gehämmertes Eisen	72064 = .	19740 =
Englisches desgl. . . .	55872 = .	16938 =
Gegossenes Eisen . . .	19096 = .	6110 =
Gegossenes Kupfer . .	19072 = .	5003 =
Messing	17958 = .	5180 =
Gegossenes Zinn . . .	4736 = .	1496 =
Gegossenes Blei . . .	1824 = .	348 =

Nach Professor Leslie's Bemerkung wird ein verticaler Stab von Blei 348 Fuß lang durch sein eigenes Gewicht zusammenbrechen. Der beste Stahl hat beinahe die doppelte Stärke des englischen weichen Eisens, und dies ist wieder ungefähr dreimal stärker als gegossenes Eisen. Kupfer und Messing haben fast immer dieselbe Cohäsion als gegossenes Eisen. Diese Haltbarkeit wird bisweilen beträchtlich durch Hämmern oder durch Drahtziehen vermehrt; beim Kupfer wird sie beinahe verdoppelt, beim Blei nach Eytelwein mehr als vervierfacht. Die Verdichtung wird hauptsächlich an der Oberfläche hervorgebracht, daher wird ein geringer Einschnitt mit einer Feile

einen harten metallenen Stab bedeutend schwächen. Englisches gehämmertes Eisen hat 7550000 Fuß für seinen Modulus der Elasticität oder das Gewicht von 24920000 Pfd. auf den Quadratzoll, während gegossenes Eisen 5895000 Fuß und 18421000 Pfd. hat. Bei andern Metallen ist der Modulus der Elasticität wahrscheinlich kleiner, ist jedoch noch nicht bestimmt worden.

35. Die longitudinale Compression, die eine Säule erleidet, ist zuerst der Ausdehnung gleich, welche von einem gleichen und entgegengesetzten Zuge hervorgebracht wird, nämlich in beiden Fällen dem Modulus der Elasticität proportional. Wird aber das lastende Gewicht vergrößert, so nimmt auf gleiche Weise der Modulus der Elasticität zu, so lange die Säule der Beugung widersteht. Fängt sie an sich zu biegen, so tritt bald eine Seitenbrechung ein. Ein dünnes verticales Prisma kann daher weniger Druck als Dehnung aushalten. So wurde ein Cubikzoll Eichenholz erst bei der Last von 3860 Pfd. gebrochen, aber eine Stange von einem Quadratzolle im Durchschnitte und 5 Zollen Höhe gab unter dem Gewichte von 2572 Pfd. nach. Offenbar würde sie noch schwächer gewesen seyn, wenn sie länger gewesen wäre. Wenn dagegen die Breite einer Säule im Verhältnisse zu ihrer Höhe beträchtlich ist, so wird sie einen größeren Druck ertragen als ihre Cohäsionskraft beträgt. Obgleich auf diese Art die Cohäsion eines Stabes von gegossenem Eisen von einem Viertel-Quadratzolle im Durchschnitte nur 300 Pfd. ist, so wird doch ein Würfel von dieser Dimension 1440 Pfd. erfordern, um zu zerbrechen.

So lange im Allgemeinen die widerstehende Masse ihre aufrechte Gestalt behauptet, werden die verschiednen Schnitte durch hinzugefügtes Gewicht zusammengedrückt und ausgedehnt, und ihre widerstehenden Theilchen werden nicht nur näher an einander gerückt, sondern auch vermehrt. Dieser Widerstand wird auf gleiche Weise durch Seitenwirkung vermehrt, indem sich der Raum zum Ausweichen der Theilchen rundum verengert. Es wird daher der ursprüngliche Widerstand vergrößert, wenn man fortfährt die Säule zu belasten.

36. Die genauesten Versuche über diesen Gegenstand scheinen die von Rennie angestellten zu seyn. Die Gewichte, welche erfordert wurden, um Würfel von gewissen Metallen von einem Viertelzolle Seite zu zerbrechen, waren folgende:

Gegossenes Eisen vertical . .	11140 Pfd.
Gegossenes Eisen horizontal . .	10110 =
Gegossenes Kupfer	7318 =
Gegossenes Zinn	966 =
Gegossenes Blei	483 =

Würfel von einem Zolle wurden durch folgende Gewichte gebrochen:

Ulme	1284 Pfd.
Weiße Tanne	1928 =
Englische Eiche	3860 =
Craigleith Quaderstein	8688 =

Von Würfeln von $1\frac{1}{4}$ Zollen, die folglich einen $2\frac{1}{4}$ mal so großen Schnitt als die vorigen hatten, konnte man erwarten, daß sie nach diesem Verhältnisse Widerstand leisten würden. Sie wurden jedoch durch weit geringere Lasten gebrochen:

Rother Ziegelstein	1817 Pfd.
Gelbgebrannter Ziegelstein . .	2254 =
Getrockneter Mauerstein . . .	3864 =
Craigleith Stein nach der Richtung der Schichten	15560 =
Desgl. queer durch die Schichten .	12346 =
Weißer Statuenmarmor . . .	13632 =
Weißgeaderter italien. Marmor .	21783 =
Purbecker Kalkstein	20610 =
Granit von Cornwallis . . .	14302 =
Granit von Peterhead	18636 =
Blauer Granit von Aberdeen . .	24536 =

Diese Angaben zeigen die relative Stärke verschiedner Materialien, man muß aber bedauern, daß solche Resultate von nicht großem praktischen Werthe sind, da sie nur auf ein sehr geringes Verzeichniß beschränkt, und nur auf Cubik-Klötze anwendbar sind. Bleibt die Breite ungeändert, so scheint der Widerstand von einem unbestimmten Verhältnisse der Säule abzuhängen.

Ja es hat wahrscheinlich, wie Professor Leslie bemerkt, selbst die absolute Höhe einen wesentlichen Einfluß auf die Wirkung. So scheint aus einigen in Frankreich gemachten Versuchen hervorzugehen, daß Prismen von trockener Eiche, zwei Quadratzolle im Durchschnitte und zwei, vier oder sechs Fuß in der Höhe durch verticale Drucke von 17500, 10500 und 7000 Pfd. gebrochen werden; daß sie aber bei vier Quadratzollen im Durchschnitte und denselben Höhen nur unter Lasten von 80000 Pfd., 70000 Pfd. und 50000 Pfd. unterliegen. In der ersten Reihe Versuche steigt die Cohäsionskraft auf 130000 Pfd. und bei der zweiten auf 520000 Pfd. Die verticale Kraft ist daher weit unter diesen Grenzen. Wenn die Länge der Säule ihre Breite 36 Mal übersteigt, so scheint der Widerstand, der der longitudinalen Compression entgegengesetzt wird, 18 Mal geringer zu seyn. — (Leslie's Elemente und Duhamel in den Memoiren der Pariser Akademie).

37. B. Bevan hatte die Güte dem Verfasser eine tabellarische Uebersicht seiner Resultate in Beziehung auf den Modulus der Cohäsion oder die Länge in Fußen eines prismatischen Körpers, mitzutheilen, welche erfordert wurde, um seine Cohäsion zu vernichten und ihn aus einander zu reißen.

Bevan's Resultate.

	Fuß.
Gegerbtes Rindsleder	10250
= Kalbleder	5050
= Pferdeleder	7000
= Cordovan	3720
= Schaafleder	5600
Ungegerbtes Pferdeleder	8900
Altes Riemzeug von 30 Jahren . .	5000
Hanffaden	75000
Darmsaite, einige Jahre alt . . .	23000
Garten=Flechten (garden matting) .	27000
Schreibepapier (foolscap)	8000
Braunes Packpapier, dünnes . . .	6700
Binsen (holcus)	79000
Fischbein	14000
Mauersteine (Fenny Stratford) . .	970
= (Leighton)	144
Eis	300
Leicestershire=Schiefer	7300

Für den Modulus der Elasticität giebt Bevan folgende Resultate:

	Fuß.
Stahl	9300000
Stangeneisen	9000000
Desgl.	8450000
Gelbe Fichte	9150000
Desgl.	11840000
Finnland=Tanne	6000000
Mahagony	7500000
Rosenholz	3600000
Trockene Eiche	5100000
Tanne, vom unteren Theile, 25 Jahre alt	7400000
Petersburger Tanne	6000000
Lanzenholz	5100000
Weide	6200000
Eiche	4350000

	Fuß.
Atlaßholz	2290000
Lincolnshire Moor=Eiche	1710000
Guajacholz	1850000
Teakholz	4780000
Eibenbaum	2220000
Fischbein	1000000
Rohr	1400000
Glasröhre	4440000
Eis	6000000
Kalkstein	
= Dinton, Buck	2400000
= Ketton	1600000
= Jetternoe	625000
Pflasterstein von Yorkshire	1320000
Kork	3300
Leicestershire=Schiefer	7800000

Manche andere Resultate hat Tredgold in seinem Werke: „Versuch über die Stärke des gegossenen Eisens“ *) gesammelt, wo man sich über diese und andere Gegenstände mehr belehren kann.

Wir hatten in diesem Abschnitte blos die Absicht, eine kurze Uebersicht der leitenden Grundsätze zu geben, die in die Lehre von den passiven Kräften gehören, und die sichersten und passenden Data auszuheben. Dieser Gegenstand ist bei Bauten höchst wichtig und interessant. Außer dem angezeigten Werke kann man noch nachlesen: Tredgold's Zimmermannsbaukunst, Barlow über die Stärke des Bauholzes, Gregory's Mechanik Th. 1, die Vorlesungen des Dr. Young und Professor Leslie, und Girard's analytische Abhandlung über den Widerstand fester Körper.

*) Deutsche Uebersetzung, Leipzig.

Hülfstafeln.

Tafel 1. Angaben über einige Gewichts-, Längen-, Flächen- und Körpermaße.

I. Gewichte.

Engl. Troy-Gewicht.

Grains.					
24	=	1 Pfenniggewicht			
480	=	20	=	1 Unze	
5760	=	240	=	12	= 1 Pfd.

1 Pfund Troy = 372,965 franz. Grammes.

Engl. Apotheker-Gewicht.

Gran. gr.					
20	=	1 Scrupel	℈		
60	=	3	=	1 Drachme	ʒ
480	=	24	=	8 =	1 Unze ℥
5760	=	288	=	96 =	12 = 1 Pfund ℔.

Avoirdûpois-Gewicht.

Drachmen						
16	=	1 Unze				
256	=	16	=	1 Pfund		
7168	=	448	=	28	=	1 Quarter
28672	=	1792	=	112	=	4 = 1 Centner
573440	=	35840	=	2240	=	80 = 20 = 1 Tonne.

14 Unz. 11 Pfennigg. 15½ Grs. Troy = 1 Pfd. Avoirdûpois.

Neufranzösisches Gewicht.

Milligramm							
10	=	1 Centigramm					
100	=	10	=	1 Decigramm			
1000	=	100	=	10	=	1 Gramm	
10000	=	1000	=	100	=	10	= 1 Decagramm
100000	=	10000	=	1000	=	100 =	10 = 1 Hectogramm
1000000	=	100000	=	10000	=	1000 =	100 = 10 = 1 Kilogramm
10000000	=	1000000	=	100000	=	10000 =	1000 = 100 = 10 = 1 Myriogr.

154457,9386 engl. Troy-Grains = 1 Myriogramm.

Neues preußisches Gewicht.

Gran
4½ = 1 Quent.
18 = 4 = 1 Loth
288 = 64 = 16 = 1 Mark
576 = 128 = 32 = 2 = 1 Pfund
63360 = 14080 = 3520 = 220 = 110 = 1 Centner.

4000 Pfund = 1 Schiffslast.
1 Pfund preuß. = 0,467707 Kilogramm.
= 1,031339 Pfund Avoirdûpois.

II. Längenmaße.

Englisch.

Gerstenkörner.
3 = 1 Zoll
36 = 12 = 1 Fuß
108 = 36 = 3 = 1 Yard
594 = 198 = 16½ = 5½ = 1 Pole
23760 = 7920 = 660 = 220 = 40 = 1 Furlong
190080 = 63360 = 5280 = 1760 = 320 = 8 = 1 Meile.

1 Fuß engl. = 0,3047909 franz. Meter.

Französisch, alt.

Puncte
12 = 1 Lin.
144 = 12 = 1 Zoll
1728 = 144 = 12 = 1 Fuß
10368 = 864 = 72 = 6 = 1 Klafter (toise)
31104 = 2592 = 216 = 18 = 3 = 1 Ruthe (perche).

Französisch, neu.

Millimeter							
10 =	1 Centimeter						
100 =	10 =	1 Decimeter					
1000 =	100 =	10 =	1 Meter				
10000 =	1000 =	100 =	10 =	1 Decameter			
100000 =	10000 =	1000 =	100 =	10 =	1 Hectometer		
1000000 =	100000 =	10000 =	1000 =	100 =	10 =	1 Kilometer	
10000000 =	1000000 =	100000 =	10000 =	1000 =	100 =	10 =	1 Myriameter
100000000 =	10000000 =	1000000 =	100000 =	10000 =	1000 =	100 =	10 = 1 Grad der Erde

400 Grad = Erdumfang.

1 Meter = 3,078444 alte Pariser Fuß.

Preußisches (Rheinländisches).

Scrupel
12 = 1 Lin.
144 = 12 = 1 Zoll
1728 = 144 = 12 = 1 Fuß
10368 = 864 = 72 = 6 = 1 Faden.
20736 = 1728 = 144 = 12 = 2 = 1 Ruthe.

1 Fuß preuß. = 139,13 altfranz. Lin.
2000 preuß. Ruthen = 1 preuß. Meile.

III. Flächenmaße.

Englisch.

Quadr.Zoll.
144 = 1 Q.Fuß
1296 = 9 = 1 Q.Yard
39204 = $272\frac{1}{4}$ = $30\frac{1}{4}$ = 1 Q.Pole
1568160 = 10890 = 1210 = 40 = 1 Q.Ruthe (Rood)
6272640 = 43560 = 4840 = 160 = 4 = 1 Acker.

Französisch, alt.

Q.Fuß
36 = 1 Q.Klafter
324 = 9 = 1 Q.Ruthe
32400 = 900 = 100 = 1 Morgen.

Französisch, neu.

Das Grundmaß heißt Are, und ist ein Quadrat von 10 Meter Seite. Es wird auf dieselbe Weise wie die Längen und Gewichte nach dem Decimalsystem in Deciares, Centiares ꝛc. eingetheilt und zu Decares, Hectares u. s. w. zusammengesetzt.

Preußisch.

Quadrat-Ruthen
180 = 1 Morgen
5400 = 30 = 1 Hufe
4000000 = $22222\frac{2}{9}$ = $740\frac{20}{21}$ = 1 Quadrat-Meile.

IV. Körpermaße.

Engl. Weinmaße.

Pints						
2	=	1 Quart				
8	=	4	=	1 Gallon		
336	=	168	=	42	=	1 Tierce
504	=	257	=	63	=	1½ = 1 Hogshead
672	=	336	=	84	=	2 = 1⅓ = 1 Puncheon
1008	=	504	=	126	=	3 = 2 = 1½ = 1 Pipe
2016	=	1008	=	252	=	6 = 4 = 3 = 1 Tonne. (tun)

231 Cubik-Zoll = 1 Gallon.

Engl. Ale- und Biermaß.

Pints						
2	=	1 Quart				
8	=	4	=	1 Gallon		
72	=	36	=	9	=	1 Firkin
144	=	72	=	18	=	2 = 1 Kilderkin
288	=	144	=	36	=	4 = 2 = 1 Barrel
432	=	216	=	54	=	6 = 3 = 1½ = 1 Hogshead
576	=	288	=	72	=	8 = 4 = 2 = 1⅓ = 1 Puncheon
864	=	432	=	108	=	12 = 6 = 3 = 2 = 1½ = 1 Butt.

282 Cubikzoll = 1 Gallon.

Englische Getreidemaße.

Pints						
8	=	1 Gallon				
16	=	2	=	1 Perk		
64	=	8	=	4	=	1 Bushel (Scheffel)
256	=	32	=	16	=	4 = 1 Coom
512	=	64	=	32	=	8 = 2 = 1 Quarter
2560	=	320	=	160	=	40 = 10 = 5 = 1 Wey
5120	=	640	=	320	=	80 = 20 = 10 = 2 = 1 Last.

2150 Cubikzoll = 1 Bushel.

Französische, neu.

Die geometrische Körpermessung geht vom Stère aus, welches ein Cubikmeter ist. Es giebt Decistere, Centistere ꝛc., eben so Decastere, Hectastere ꝛc. nach derselben Eintheilungsart wie in den anderen Maßen.

Für Flüssigkeiten dient das Litre = einem Cubikdecimeter. Es wird eingetheilt in Decilitre, Centilitre ꝛc., zusammengesetzt zu Decalitres, Hectalitres ꝛc.

Preußische Weinmaße.

Quartier
4 = 1 Quart
120 = 30 = 1 Anker
240 = 60 = 2 = 1 Eimer
480 = 120 = 4 = 2 = 1 Ohm
720 = 180 = 6 = 3 = 1½ = 1 Oxhoft.

Biermaße.

Quartier
4 = 1 Quart
50 = 12½ = 1 Achteltonne oder 1 halber Vierling
100 = 25 = 2 " = 2 " = 1 Viertelтonne oder Vierling
200 = 50 = 4 " = 4 " = 2 Viertelтonnen = 1 Halbetonne
400 = 100 = 8 " = 8 " = 4 Viertelтonnen = 2 Halbetonnen = 1 Tonne.

1 preuß. Quart = 64 Cubikzoll preuß.

Getreidemaße.

Vierlinge
4 = 1 Mäßel
16 = 4 = 1 Metze
64 = 16 = 4 = 1 Viertel
256 = 64 = 16 = 4 = 1 Scheffel
3072 = 768 = 192 = 48 = 12 = 1 Malter
6144 = 1536 = 384 = 96 = 24 = 2 = 1 Wispel.

1 preuß. Scheffel = 3072 Cubikzoll preuß.

Tafel 2. Nützliche Factoren, bis auf mehrere Decimalstellen, in denen π die Peripherie eines Kreises vom Durchmesser 1 darstellt.

$\pi = 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706798214808651328230664709384 46 +$

2π . . . 6,28318530717958647692528676655900

4π . . 12,56637061435917295385057353311800

$\frac{1}{2}\pi$ . . . 1,57079632679489661923132169163975

$\frac{1}{4}\pi$ . . . 0,78539816339744830961566084581988

$\frac{4}{3}\pi$ . . . 4,18879020478639098461685784437216

$\frac{1}{6}\pi$ . . . 0,52359877559829887307710723054658

$\frac{1}{8}\pi$ . . . 0,39269908169872415480783042290994

$\frac{1}{12}\pi$ . . . 0,26179938779914943653855361527329

$\frac{1}{360}\pi$ . . 0,00872664625997164788461845384244

$\frac{1}{\pi}$ . . . 0,31830988618379067153776752674503

$\frac{2}{\pi}$ . . . 0,63661977236758134307553505349006

$\frac{4}{\pi}$ . . . 1,27323954473516268615107010698012

$\frac{1}{4\pi}$ . . . 0,07957747154594766788444188168626

$\sqrt{2}$ . . . 1,41421356237309504880168872420970 nahe

$\sqrt{\frac{1}{2}}$ . . . 0,70710678118654752440084436210485

$\pi\sqrt{2}$ . . 4,44288293815836624701588099006054

$\pi\sqrt{\frac{1}{2}}$ . . 2,22144146907918312350794049503027

$\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1}{2}}$ . . 0,22507907903927651738879977514124

$\frac{1}{\pi}\sqrt{2}$ . . 0,45015815807855303477759559550563

$\sqrt{\pi}$ . . 1,77245385090551602729816748334114

$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ . . 0,88622692545275801364908374167057

$2\sqrt{\pi}$ . . 3,54490770181103205459633496668228

$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ . . . 1,25331413731550025120788264240186

$\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ . . . 0,79788456080286535587989211986876

$\sqrt{\frac{1}{\pi}}$ . . . 0,56418958354775628694807945156077

$2\sqrt{\frac{1}{\pi}} = 1,12837916709551257389615890312154$

$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi}}$ . . 0,28209479177387814347403972578 0

π^2 . . . 9,869604401089358618834490999876

$\frac{1}{\pi^2}$ . . . 0,10132118364233777144387946320 9

$\frac{1}{2\pi^2}$ . . 0,05066059182116888572193973160 4

$\frac{1}{6\pi^2}$ . . 0,01688686394038962857397991053 4

$2\sqrt{\frac{1}{\pi}}$ . . 1,12837916709551257389615890312 0

$\frac{1}{6}\sqrt{\frac{1}{\pi}}$ . . 0,09403159725795938115801324192 6

$\frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{\pi}}$ . . 0,07052369794346953586850993144 5

$\frac{1}{6\pi}$ . . 0,05305164769729844525629458779 0

$\frac{360}{\pi}$. 114,59155902616464175359630962820 0

$\frac{2}{3}\pi$ . . . 2,09439510239319549230842892218 6

$\frac{\pi}{24}$ . . . 0,13089969389957471826927680763 6

$\frac{6}{\pi}$ . . . 1,90985931710274402922660516047 0

$\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$ . . . 1,2407009819 u. s. w.

$6\pi^2$ . . 59,21762640653615171300694599925 6

$\sqrt{6\pi^2}$ . . 3,89777707 u. s. w.

36π . 113,09733552923255658465516179806 2

$\sqrt[3]{36\pi}$ . . 4,83597586204 u. s. w.

$\frac{1}{8}\sqrt{\pi}$ . . 0,22155673136318950341227093541 8

$\frac{1}{2\pi}$ . . . 0,15915494309189533576888376337 2

$\sqrt[3]{\frac{\pi}{6}}$ . . . 0,805995977007 u. s. w.

$\sqrt{231}$. 15,19868415357066 36

$\sqrt{282}$. 16,792855623746 6 + u. s. w.

$\sqrt{10152}$ . . 100,7571337 4

$\sqrt{\frac{282}{0,785398 \text{ u. s. w.}}} = 18,948708$ u. s. w.

$\sqrt{277,274} = 16,65154647474.$

Tafel 3. Kreistafel, aus der man, wenn der Durchmesser gegeben ist, den Flächeninhalt, die Peripherie und die Seiten des gleichen Quadrats finden kann.

Gegeben	Gesucht		
Durchmesser.	Flächeninhalt.	Peripherie.	Seite des gleichen Quadrats.
1,00	0,7853981	3,14159265	0,88622692
,25	1,22718463	3,92699081	1,10778365
,5	1,76714586	4,71238898	1,32934038
,75	2,40528187	5,49778714	1,55089711
2,	3,14159265	6,28318530	1,77245384
,25	3,97607820	7,06858347	1,99401058
,5	4,90873852	7,85398163	2,21556731
,75	5,93957361	8,63937979	2,43712404
3,	7,06858347	9,42477796	2,65868077
,25	8,29576810	10,21017612	2,88023750
,5	9,62112750	10,99557428	3,10179423
,75	11,04466167	11,78097245	3,32335096
4,	12,56637061	12,56637061	3,54490769
,25	14,18625432	13,35176877	3,76646442
,5	15,90431280	14,13716694	3,98802116
,75	17,72054606	14,92256510	4,20957789
5,	19,63495408	15,70796326	4,43113462
,25	21,64753687	16,49336143	4,65269135
,5	23,75829444	17,27875959	4,87424808
,75	25,96722677	18,06415775	5,09580482
6,	28,27433388	18,84955591	5,31736155
,25	30,67961575	19,63495408	5,53891828
,5	33,18307240	20,42035224	5,76047501
,75	35,78470382	21,20575041	5,98203174
7,	38,48456000	21,99114857	6,20358847
,25	41,28249096	22,77654673	6,42514520
,5	44,17864669	23,56194490	6,64670193
,75	47,17297718	24,34734306	6,86825866
8,	50,26548245	25,13274122	7,08981539
,25	53,45616249	25,91813939	7,31137213
,5	56,74501730	26,70353755	7,53292886
,75	60,13204688	27,48893571	7,75448559
9,	63,61725123	28,27433388	7,97604232
,25	67,20063035	29,05973204	8,19759905
,5	70,88218424	29,84513020	8,41915578
,75	74,66191290	30,63052837	8,64071251
10,	78,53981633	31,41592653	8,86226925
,25	82,51589454	32,20132469	9,08382598
,5	86,59014751	32,98672286	9,30538270
,75	90,76257525	33,77212102	9,52693944
11,	95,03317777	34,55751918	9,74849617
,25	99,40195505	35,34291735	9,97005290
,5	103,86890711	36,12831551	10,19160964
,75	108,43403393	36,91371367	10,41316637
12,	113,09733553	37,69911184	10,63472310
,25	117,85881189	38,48451000	10,85627983

Gegeben	Gesucht		
Durchmesser.	Flächeninhalt.	Peripherie.	Seite des gleichen Quadrats.
12,5	122,71846303	39,26990816	11,07783656
,75	127,67628893	40,05530633	11,29939329
13,	132,73228961	40,84070449	11,52095002
,25	137,88646506	41,62610265	11,74250675
,5	143,13881527	42,41150082	11,96406348
,75	148,48934026	43,19689898	12,18562021
14,	153,93804002	43,98229714	12,40717695
,25	159,48491455	44,76769531	12,62873368
,5	165,12996385	45,55309347	12,85029041
,75	170,87318792	46,33849163	13,07184714
15,	176,71458676	47,12388980	13,29340388
,25	182,65416028	47,90928796	13,51496061
,5	188,69190875	48,69468613	13,73651734
,75	194,82783190	49,48008429	13,95807407
16,	201,06192982	50,26548245	14,17963080
,25	207,39420252	51,05088062	14,40118753
,5	213,82464998	51,83627878	14,62274426
,75	220,35327221	52,62167694	14,84430099
17,	226,98006922	53,40707511	15,06585772
,25	233,70504099	54,19247327	15,28741446
,5	240,52818753	54,97787143	15,50897119
,75	247,44950885	55,76326960	15,73052792
18,	264,46900493	56,54866776	15,95208465
,25	266,58667578	57,33406592	16,17364138
,5	268,80252140	58,11946409	16,39519811
,75	276,11654180	58,90486225	16,61675484
19,	283,52873696	59,69026041	16,83831157
,25	291,03910692	60,47565858	17,05986830
,5	298,64765163	61,26105674	17,28142503
,75	306,35437111	62,04645490	17,50298177
20,	314,15926535	62,83185307	17,72453850
,25	322,06233437	63,61725123	17,94609524
,5	330,06357816	64,40264939	18,16765197
,75	338,16299672	65,18804756	18,38920870
21,	346,36059005	65,97344572	18,61076543
,25	354,65635814	66,75884388	18,83232216
,5	363,05030101	67,54424205	19,05387889
,75	371,54241865	68,32964021	19,27543562
22,	380,13271106	69,11503837	19,49699235
,25	388,82117826	69,90043654	19,71854908
,5	397,60782021	70,68583470	19,94010581
,75	406,49263694	71,47123286	20,16166255
23,	415,47562843	72,25663103	20,38321928
,25	424,55679467	73,04202919	20,60477601
,5	433,73613573	73,82742735	20,82633274
,75	443,01365154	74,61282552	21,04788945
24,	452,38934207	75,39822368	21,26944618
,25	461,86320745	76,18362184	21,49100291
,5	471,43524757	76,96902001	21,71255964
,75	481,10546239	77,75441817	21,93411637
25,	490,87385212	78,53981634	22,15567313
,25	500,74041655	79,32521450	22,37722986
,5	510,70515575	80,11061266	22,59878659
,75	520,76806971	80,89601083	22,82034332
26,	530,92915845	81,68140899	23,04190006
,25	541,18842196	82,46680715	23,26345679

Gegeben	Gesucht		
Durchmesser.	Flächeninhalt.	Peripherie.	Seite des gleichen Quadrats.
26,5	551,54586024	83,25220532	23,48501352
,75	562,00147328	84,03760348	23,70657025
27,	572,55526110	84,82300164	23,92812698
,25	583,20722369	85,60839981	24,14968371
,5	593,95736105	86,39379797	24,3712404½
,75	604,80567318	87,17919613	24,59279717
28,	615,75216017	87,96459430	24,81435390
,25	626,79682177	88,74999246	25,03591063
,5	637,93965822	89,53539062	25,25746737
,75	649,18066943	90,32078879	25,47902410
29,	660,51985541	91,10618695	25,70058083
,25	671,95721616	91,89158511	25,92213756
,5	683,49275169	92,67698328	26,14369429
,75	695,12646198	93,46238144	26,36525102
30,	706,85834704	94,24777960	26,58680776
,25	718,68840688	95,03317777	26,80836449
,5	730,61664148	95,81857593	27,02992122
,75	742,64305085	96,60397409	27,25147794
31,	754,76763502	97,38937226	27,47303468
,25	766,99039394	98,17477042	27,69459141
,5	779,31132762	98,96016858	27,91614814
,75	791,73043607	99,74556675	28,13770488
32,	804,24771930	100,53096491	28,35926161
,25	816,86317729	101,31636307	28,58081834
,5	829,57681005	102,10176124	28,80237507
,75	842,38861759	102,88715940	29,02393180
33,	855,29859989	103,67255756	29,24548853
,25	868,30675696	104,45795573	29,46704526
,5	881,41308881	105,24335389	29,68860199
,75	894,61759542	106,02875205	29,91015872
34,	907,92027688	106,81415022	30,13171545
,25	921,32113305	107,59954838	30,35327219
,5	934,82016398	108,38494654	30,57482892
,75	948,41736968	109,17034471	30,79638565
35,	962,11275016	109,95574287	31,01794239
,25	975,90630540	110,74114103	31,23949912
,5	989,79803541	111,52653920	31,46105585
,75	1003,78794019	112,31193736	31,68261258
36,	1017,87601975	113,09733552	31,90416931
,25	1032,06227407	113,88273369	32,12572604
,5	1046,34670316	114,66813185	32,34728277
,75	1060,72930703	115,45353001	32,56883950
37,	1075,21008569	116,23892818	32,79039623
,25	1089,78903909	117,02432634	33,01195296
,5	1104,46616727	117,80972450	33,23350970
,75	1119,24147022	118,59572267	33,45506643
38,	1134,11494794	119,38052083	33,67662316
,25	1149,08660043	120,16591899	33,89817989
,5	1164,15642768	120,95131716	34,11973662
,75	1179,32442971	121,73671532	34,34129335
39,	1194,59060651	122,52211348	34,56285008
,25	1209,95495809	123,30751165	34,78440681
,5	1225,41748449	124,09290981	35,00596354
,75	1240,97818552	124,87830797	35,22752027
40,	1256,63704143	125,66370614	35,44907701
,25	1272,39411208	126,44910430	35,67063374

Gegeben	Gesucht		
Durchmesser.	Flächeninhalt.	Peripherie.	Seite des gleichen Quadrats.
40,5	1288,24933751	127,23450246	35,89219048
,75	1304,20273770	128,01990063	36,11374721
41,	1320,25431266	128,80529879	36,33530394
,25	1336,40406240	129,59069695	36,55686067
,5	1352,65198690	130,37609512	36,77841740
,75	1368,99808617	131,16149328	36,99997413
42,	1385,44236022	131,94689144	37,22153086
,25	1401,98480903	132,73228961	37,44308759
,5	1418,62543261	133,51768777	37,66464432
,75	1435,36423096	134,30308593	37,88620105
43,	1452,20120412	135,08348410	38,10775779
,25	1469,13635202	135,87388226	38,32931452
,5	1486,16967468	136,65928042	38,55087125
,75	1503,30117212	137,44467859	38,77242798
44,	1520,53084433	138,23007675	38,99398471
,25	1537,85869131	139,01547491	39,21554144
,5	1556,28471306	139,80087308	39,43709817
,75	1572,80890957	140,58627124	39,65865490
45,	1590,43128086	141,37166940	39,88021164
,25	1608,15182692	142,15706757	40,10176837
,5	1625,97054775	142,94246573	40,32332510
,75	1643,88744335	143,72786390	40,54488183
46,	1661,90251374	144,51326206	40,76643856
,25	1680,01575889	145,29866022	40,98799530
,5	1698,22717880	146,08405839	41,20955203
,75	1716,53677348	146,86945655	41,43110876
47,	1734,94454294	147,65485471	41,65266549
,25	1753,45048716	148,44025288	41,87422222
,5	1772,05460615	149,22565104	42,09577891
,75	1790,75689992	150,01104920	42,31733568
48,	1809,55736845	150,79644797	42,53889241
,25	1828,45601175	151,58184553	42,76044914
,5	1847,45282982	152,36724369	42,98200587
,75	1866,54782267	153,15264186	43,20356261
49,	1885,74099031	153,93804002	43,42511934
,25	1905,83233270	154,72343818	43,64667607
,5	1924,42184986	155,50883635	43,86823280
,75	1943,90954179	156,29423451	44,08978953
50,	1963,49540848	157,07963268	44,31134627
,25	1983,17944995	157,96503084	44,53290300
,5	2002,96166619	158,65042900	44,75445973
,75	2022,84205720	159,43582717	44,97601646
51,	2042,82062298	160,22122533	45,19757319
,25	2062,89736352	161,00662349	45,41912992
,5	2083,07227884	161,79202166	45,64068665
,75	2103,34536893	162,57741982	45,86224338
52,	2123,71663382	163,36281798	46,08380012
,25	2144,18607346	164,14821615	46,30535685
,5	2164,75368786	164,93361431	46,52691358
,75	2185,41947703	165,71901247	46,74847031
53,	2206,18344098	166,50441064	46,97002704
,25	2227,04557969	167,28980880	47,19158377
,5	2248,00589318	168,07520696	47,41314050
,75	2269,06438143	168,86060513	47,63469723
54,	2290,22104445	169,64600329	47,85625386
,25	2311,47588225	170,43140145	48,07781069

Gegeben	Gesucht		
Durchmesser.	Peripherie.	Flächeninhalt.	Seite des gleichen Quadrats.
54,5	2332,82889481	171,21679962	48,29936743
,75	2354,28008215	172,00219778	48,52092416
55,	2375,82944427	172,78759594	48,74248089
,25	2397,47698115	173,57299411	48,96403763
,5	2419,22269280	174,35839227	49,18559436
,75	2441,06657922	175,14379043	49,40715109
56,	2463,00864068	175,92918860	49,62870782
,25	2485,04887637	176,71458676	49,85026455
,5	2507,18728710	177,49998492	50,07182128
,75	2520,42387260	178,28538309	50,29337801
57,	2551,75863286	179,07078125	50,51493474
,25	2574,19156790	179,85617941	50,73649147
,5	2596,72267781	180,64157758	50,95804820
,75	2619,35196239	181,42697574	51,17960494
58,	2642,07942166	182,21237390	51,40116167
,25	2664,90505579	182,99777207	51,62271840
,5	2687,82886464	183,78317023	51,84427513
,75	2710,85084834	184,56856839	52,06583186
59,	2733,97100678	185,35396656	52,28738859
,25	2757,18933998	186,13936472	52,50894532
,5	2780,50584795	186,92476288	52,73050205
,75	2803,92053070	187,71016105	52,95205878
60,	2827,43338821	188,49555921	53,17364552
,25	2851,04442049	189,28095737	53,39517225
,5	2874,75362754	190,06635554	53,61672898
,75	2898,56100937	190,85175370	53,83828572
61,	2922,46656692	191,63715186	54,05984245
,25	2946,47029734	192,42255003	54,28139918
,5	2970,57220350	193,20794819	54,50295591
,75	2994,77228444	193,99334635	54,72451264
62,	3019,07054008	194,77874452	54,94606937
,25	3043,46697053	195,56414268	55,16762610
,5	3067,96157576	196,34954084	55,38918283
,75	3092,55435572	197,13493901	55,61073956
63,	3117,24531051	197,92033717	55,83229629
,25	3142,03444002	198,70573533	56,05385303
,5	3166,92174434	199,49113350	56,27540976
,75	3191,90722341	200,27653166	56,49696640
64,	3216,99087720	201,06192982	56,71852322
,25	3242,17270581	201,84732799	56,94007995
,5	3267,45270920	202,63272615	57,16163668
,75	3292,83088742	203,41812431	57,38319341
65,	3318,30724030	204,20352248	57,60475015
,25	3343,88176802	204,98892064	57,82630688
,5	3369,55447036	205,77431880	58,04786361
,75	3395,32534774	206,55971697	58,26942034
66,	3421,19439974	207,34511513	58,49097707
,25	3447,16162652	208,13051329	58,71253380
,5	3473,22702806	208,91591146	58,93409054
,75	3499,39060438	209,70130962	59,15564727
67,	3525,65235549	210,48670778	59,37720400
,25	3552,01228735	211,27210595	59,59876073
,5	3578,47038197	212,05750411	59,82031746
,75	3605,02665737	212,84290227	60,04187419
68,	3631,68110754	213,62830044	60,26343092
,25	3658,43373248	214,41369860	60,48498765

Gegeben	Gesucht		
Durchmesser.	Peripherie.	Flächeninhalt.	Seite des gleichen Quadrats.
68,5	3685,28453219	215,19909676	60,70654438
,75	3712,23350667	215,98449493	60,92810111
69,	3739,28065592	216,76989309	61,14965785
,25	3766,42597994	217,55529125	61,37121458
,5	3793,66947873	218,34068942	61,59277131
,75	3821,01115229	219,12608758	61,81432804
70,	3848,45100064	219,91148574	62,03588478
,25	3875,98902375	220,69688391	62,25744151
,5	3903,62522162	221,48228207	62,47899824
,75	3931,35959426	222,26768023	62,70055497
71,	3959,19214168	223,05307840	62,92211170
,25	3987,12286386	223,83847656	63,14366843
,5	4015,15176082	224,62387472	63,36522516
,75	4043,27883254	225,40927289	63,58678189
72,	4071,50407903	226,19467105	63,80833862
,25	4099,82750030	226,98006921	64,02989536
,5	4128,24909633	227,76546738	64,25145209
,75	4156,76886714	228,55086554	64,47300882
73,	4185,38681274	229,33626370	64,69456555
,25	4214,10293309	230,12166187	64,91612228
,5	4242,91722821	230,90706003	65,13767901
,75	4271,82969810	231,69245819	65,35923574
74,	4300,84034275	232,47785636	65,58079247
,25	4329,94916219	233,26325452	65,80234920
,5	4359,15615638	234,04865268	66,02390593
,75	4388,46132535	234,83405085	66,24546267
75,	4417,86466909	235,61944901	66,46701940
,25	4447,36618760	236,40484717	66,68857613
,5	4476,96588088	237,19024534	66,91043287
,75	4506,66374893	237,97564350	67,13168960
76,	4536,45979178	238,76104166	67,35324633
,25	4566,35400937	239,54643983	67,57480306
,5	4596,34640174	240,33183799	67,79635979
,75	4626,43696897	241,11723615	68,01791652
77,	4656,62571078	241,90263432	68,23947325
,25	4686,91262745	242,68803248	68,46102998
,5	4717,29771890	243,47343064	68,68258671
,75	4747,78098511	244,25882881	68,90414344
78,	4778,36242610	245,04422697	69,12570018
,25	4809,04204185	245,82962513	69,34725691
,5	4839,81983238	246,61502330	69,56881364
,75	4870,79579767	247,40042146	69,79037037
79,	4901,66993776	248,18581962	70,01192710
,25	4932,74225260	248,97121779	70,23348383
,5	4963,91274221	249,75661595	70,45504056
,75	4995,18140659	250,34201411	70,67659729
80,	5026,54824574	251,32741228	70,89815403
,25	5058,01325966	252,11281044	71,11971076
,5	5089,57644835	252,89820860	71,34126749
,75	5121,23781181	253,68360677	71,56282422
81,	5152,99735004	254,46900493	71,78438096
,25	5184,85506304	255,25440309	72,00593769
,5	5216,81095081	256,03980126	72,22749442
,75	5248,86501335	256,82579942	72,44905115
82,	5281,01725068	257,61059758	72,67060788
,25	5313,26766276	258,39599575	72,89216461

Gegeben	Gesucht		
Durchmesser.	Peripherie.	Flächeninhalt.	Seite des gleichen Quadrats.
82,5	5345,61624962	259,18139391	73,11372134
,75	5378,06301124	259,96679207	73,33527807
83,	5410,60794764	260,75219024	73,55683480
,25	5443,25105880	261,53758840	73,77839153
,5	5475,99234474	262,32298656	73,99994827
,75	5508,83180544	263,10838473	74,22150500
84,	5541,76944092	263,89378269	74,44306173
,25	5574,80525116	264,67918105	74,66461846
,5	5607,93923618	265,46457922	74,88617519
,75	5641,17139596	266,24997738	75,10773192
85,	5674,50173054	267,03537554	75,32928866
,25	5707,93023987	267,82077371	75,55084539
,5	5741,45692397	268,60617187	75,77240212
,75	5775,08178284	269,39157003	75,99395885
86,	5808,80481648	270,17696820	76,21551558
,25	5842,62602489	270,96236636	76,43707232
,5	5876,54540807	271,74776452	76,65862904
,75	5910,56296602	272,53316269	76,88018578
87,	5944,67869874	273,31856085	77,10174251
,25	5978,89260623	274,10395901	77,32329924
,5	6013,20468849	274,88935718	77,54485597
,75	6047,61494552	275,67475534	77,76641270
88,	6082,12337734	276,46015350	77,98796943
,25	6116,72998392	277,24555167	78,20952616
,5	6151,43476526	278,03094983	78,43103289
,75	6186,23772138	278,81634799	78,65263962
89,	6221,13885226	279,60174616	78,87419635
,25	6256,13815792	280,38714432	79,09575309
,5	6291,23563834	281,17254248	79,31730982
,75	6326,43129354	281,95794065	79,53886655
90,	6361,72512350	282,74333881	79,76042329
,25	6397,11712824	283,52873697	79,98198002
,5	6432,60730774	284,31413514	80,20353673
,75	6468,19566202	285,09953330	80,42509348
91,	6503,88219109	285,88493146	80,64669021
,25	6539,66689491	286,67032962	80,86820694
,5	6575,54977350	287,45572779	81,08976367
,75	6611,53082686	288,24112595	81,31132040
92,	6647,61005499	289,02652412	81,53287713
,25	6683,78745789	289,81192228	81,75443366
,5	6720,06303556	290,59732044	81,97599060
,75	6756,43678800	291,38271861	82,19754733
93,	6792,90871521	292,16811677	82,41910406
,25	6829,47881719	292,95351493	82,64066079
,5	6866,14709394	293,73891310	82,86221752
,75	6902,91354546	294,52431126	83,08377425
94,	6939,77817177	295,30970942	83,30533096
,25	6976,74097284	296,09510759	83,52688771
,5	7013,80194367	296,88050579	83,74844444
,75	7050,96109928	297,66590391	83,97000117
95,	7088,21842465	298,45130208	84,19155791
,25	7125,57992480	299,23670024	84,41311464
,5	7163,02759971	300,02209840	84,63467136
,75	7200,57944940	300,80749657	84,85622810
96,	7238,22947380	301,59289473	85,07778484
,25	7275,97767308	302,37829269	85,29934157

Gegeben	Gesucht		
Durchmesser.	Peripherie.	Flächeninhalt.	Seite des gleichen Quadrats.
96,5	7313,82404707	303,16369106	85,52089830
,75	7351,76859584	303,94908922	85,74245503
97,	7389,81131940	304,73448738	85,96401176
,25	7427,95221771	305,51988555	86,18556849
,5	7466,19129079	306,30528371	86,40712522
,75	7504,52853864	307,09068187	86,62868195
98,	7542,96396126	307,87608004	86,85023869
,25	7581,49755865	308,66147820	87,07179542
,5	7620,12933081	309,44687635	87,29335215
,75	7658,85927774	310,23227453	87,51490888
99,	7697,68739944	311,01767269	87,73646568
,25	7736,61369591	311,80307085	87,95802234
,5	7775,63816715	312,58846902	88,17957907
,75	7814,76081316	313,37386718	88,40113580
100,	7853,98163397	314,15926535	88,62269254
,25	7893,30062952	314,94466352	88,84424927
,5	7932,71779985	315,73006168	89,06580600
,75	7972,23314494	316,51545984	89,28736273

Die vorhergehenden Tafeln wurden mit großer Sorgfalt von dem geachteten Freunde des Verfassers, dem verstorbenen Goodwin, Esq. von Blackheath, berechnet, einem Manne, dessen unermüdliche Ausdauer und seltene Genauigkeit bei numerischen Berechnungen nicht hoch genug geschätzt werden kann. Sie sind hier beigefügt worden, um der Nothwendigkeit überhoben zu seyn, mehrere falsche Tafeln über den Flächeninhalt u. s. w. der Kreise, die vor Kurzem (in England) in Umlauf gekommen sind, zu vermeiden.

Setzt man z. B. die Einheit gleich einem Zolle, so stellt die letzte Tafel den Flächeninhalt, den Umkreis und die Seite eines gleichen Quadrates für die Durchmesser dar, die von 1 bis 100 von Viertel- zu Viertelzoll wachsen.

Aber dieselbe Tafel kann auch für manche dazwischenliegende sowohl als andere Durchmesser gebraucht werden, die weiter hinaus liegen als sie diese Tafel angiebt, indem man blos zu bedenken hat, daß die Peripherieen und die Seiten der gleichen Quadrate sich wie die Durchmesser, die Flächeninhalte aber wie die Quadrate der Durchmesser verhalten.

So dividire man eine

Peripherie oder Seite des gleichen Quadrats } durch 2, 3, 4, 5, 6, 10 } so giebt der Quotient { die Peripherie oder Seite des gleichen Quadrats zu $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$ } des ursprünglichen Durchmessers

28

Oder man multiplicire mit 2, 3, 4, 5 u. s. w., so wird das Product die Peripherie oder Seite des gleichen Quadrats den 2, 3, 4, 5 u. s. w. =fachen angenommenen Durchmesser geben.

Bei Flächeninhalten nehme man anstatt des 2ten, 3ten, 4ten, 5ten u. s. w. Theils $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{25}$ u. s. w. des angenommenen Durchmessers und umgekehrt, 4, 9, 16, 25, 100 Mal u. s. w. den Flächeninhalt für einen, der dem 2, 3, 4, 5, 10fachen u. s. w. von dem Durchmesser zugehört, welchem der angenommene Flächeninhalt entsprechen soll.

Beispiel 1. Man sucht den Flächeninhalt eines Kreises, dessen Durchmesser 8,125 ist.

Flächeninhalt für den Durchmesser 16,25 ist 207,39420252
Dividirt durch $2^2 =$ 4

So ist der Quotient der gesuchte Flächeninhalt 51,84855063.

Beispiel 2. Man sucht den Flächeninhalt eines Kreises, dessen Durchmesser 8,1 ist.

Flächeninhalt für den Durchmesser 81 ist 5152,99735604
Dividirt durch $10^2 =$ 100

Der Quotient ist der gesuchte Flächeninhalt 51,5299735604.

Beispiel 3. Der äußere und innere Durchmesser eines Kreisringes ist 8,75 und 8,1; es wird sein Flächeninhalt gesucht.

Flächeninhalt für den Durchmesser 8,75
aus der Tafel 60,13204688
Flächeninhalt für den Durchmesser 8,1
aus obigem 51,52997356

Die Differenz ist der Flächeninhalt des Ringes 8,60205332

Multiplicirt man die auf diese Art gefundenen Ringe in ihre Dicke, so erhält man ihren körperlichen Inhalt, wie es bei den Rändern der Schwungräder u. s. w. geschieht; kennt man daher das Gewicht eines Cubikzolles oder Cubikfußes, so ist das ganze Gewicht bekannt; jedoch wird die oben Seite 302 gegebene Methode, wenn nicht große Genauigkeit erforderlich ist, gewöhnlich den Vorzug verdienen; in diesem Falle kann man von dieser Tafel Gebrauch machen.

Tafel 4. Verhältnisse zwischen Bogen, Abscisse, Ordinate und Subnormale der Kettenlinie; nützlich bei der Construction von äquilibrirten Ketten=Bogen bei Brücken oder Pulvermagazinen.

Bogen AP	Abscisse AG	Ordinate GP	Subnormale GK	Bogen AP	Abscisse AG	Ordinate GP	Subnormale GK
1	1,00	0,02	25,00	40	31,22	22,17	19,51
2	2,00	0,08	24,97	41	31,74	23,02	19,36
3	2,99	0,18	24,94	42	32,26	23,88	19,20
4	3,99	0,32	24,91	43	32,77	24,74	19,05
5	4,97	0,50	24,86	44	33,27	25,61	18,90
6	5,95	0,71	24,79	45	33,76	26,48	18,75
7	6,92	0,96	24,71	46	34,24	27,36	18,61
8	7,87	1,25	24,60	47	34,71	28,24	18,46
9	8,82	1,57	24,50	48	35,18	29,12	18,32
10	9,75	1,93	24,37	49	35,64	30,01	18,18
11	10,67	2,31	24,25	50	36,09	30,90	18,05
12	11,58	2,73	24,12	51	36,53	31,80	17,91
13	12,47	3,18	23,98	52	36,97	32,70	17,77
14	13,36	3,65	23,86	53	37,40	33,60	17,64
15	14,23	4,16	23,72	54	37,82	34,51	17,51
16	15,07	4,68	23,55	55	38,24	35,42	17,38
17	15,90	5,23	23,38	56	38,65	36,33	17,25
18	16,72	5,81	23,22	57	39,06	37,24	17,13
19	17,52	6,40	23,05	58	39,46	38,16	17,01
20	18,31	7,01	22,89	59	39,85	39,08	16,89
21	19,08	7,65	22,72	60	40,24	40,00	16,77
22	19,84	8,31	22,55	61	40,62	40,93	16,65
23	20,59	8,98	22,38	62	40,99	41,85	16,53
24	21,32	9,66	22,21	63	41,36	42,78	16,42
25	22,03	10,36	22,03	64	41,73	43,71	16,30
26	22,73	11,08	21,86	65	42,09	44,65	16,19
27	23,42	11,80	21,68	66	42,45	45,58	16,08
28	24,09	12,54	21,51	67	42,80	46,51	15,97
29	24,76	13,29	21,34	68	43,15	47,45	15,86
30	25,40	14,05	21,17	69	43,49	48,39	15,76
31	26,04	14,83	21,00	70	43,83	49,33	15,65
32	26,66	15,61	20,83	71	44,17	50,28	15,55
33	27,27	16,41	20,66	72	44,50	51,22	15,45
34	27,87	17,21	20,49	73	44,82	52,17	15,35
35	28,45	18,02	20,33	74	45,14	53,11	15,25
36	29,03	18,83	20,16	75	45,46	54,06	15,16
37	29,59	19,66	20,00	76	45,77	55,01	15,06
38	30,14	20,49	19,83	77	46,08	55,96	14,96
39	30,68	21,33	19,67	78	46,39	56,91	14,87

Tafel 4. Verhältnisse der Kettenlinien.

Bogen AP	Abscisse AG	Ordinate GP	Subnormale GK	Bogen AP	Abscisse AG	Ordinate GP	Subnormale GK
79	46,69	57,86	14,77	115	55,77	92,68	12,13
80	46,99	58,81	14,68	116	55,98	93,66	12,07
81	47,29	59,77	14,59	117	56,19	94,64	12,01
82	47,58	60,72	14,50	118	56,39	95,62	11,95
83	47,87	61,68	14,42	119	56,60	96,59	11,90
84	48,16	62,64	14,33	120	56,80	97,57	11,84
85	48,44	63,60	14,25	121	57,00	98,55	11,78
86	48,73	64,56	14,16	122	57,21	99,53	11,73
87	49,00	65,52	14,08	123	57,41	100,51	11,67
88	49,28	66,48	14,00	124	57,61	101,49	11,62
89	49,55	67,44	13,92	125	57,81	102,47	11,57
90	49,82	68,41	13,84	126	58,00	103,45	11,51
91	50,09	69,37	13,76	127	58,20	104,42	11,46
92	50,35	70,34	13,68	128	58,39	105,42	11,41
93	50,61	71,30	13,60	129	58,58	106,40	11,36
94	50,87	72,27	13,53	130	58,77	107,38	11,30
95	51,13	73,24	13,45	131	58,96	108,35	11,25
96	51,38	74,20	13,38	132	59,15	109,35	11,20
97	51,63	75,17	13,31	133	59,34	110,33	11,15
98	51,88	76,14	13,23	134	59,52	111,31	11,10
99	52,13	77,11	13,16	135	59,71	112,28	11,06
100	52,37	78,08	13,09	136	59,89	113,28	11,01
101	52,61	79,05	13,02	137	60,07	114,26	10,96
102	52,85	80,02	12,95	138	60,25	115,25	10,91
103	53,09	81,00	12,89	139	60,43	116,23	10,87
104	53,32	81,97	12,82	140	60,60	117,22	10,82
105	53,55	82,94	12,75	141	60,77	118,20	10,77
106	53,78	83,91	12,69	142	60,95	119,18	10,73
107	54,01	84,89	12,62	143	61,12	120,15	10,68
108	54,24	85,86	12,56	144	61,29	121,15	10,64
109	54,47	86,83	12,50	145	61,46	122,14	10,59
110	54,69	87,81	12,43	146	61,63	123,12	10,55
111	54,91	88,78	12,37	147	61,79	124,11	10,50
112	55,13	89,76	12,31	148	61,96	125,10	10,46
113	55,35	90,73	12,25	149	62,12	126,09	10,42
114	55,56	91,71	12,19	150	62,29	127,08	10,38

Seite 176 ist eine Verhältnißtafel für Kettenlinien gegeben worden, die so eingerichtet ist, daß sie bei der Aufhängung von Hängebrücken und der Bestimmung des Gewichtes

und der Spannung der verschiednen Theile nützlich wird. Die jetzt gegebene Tafel stimmt mit jener in den Principien überein, hat aber ein ganz anderes Ansehen; sie soll nämlich zur Construction von äquilibrirten Ketten-Bogen sowohl bei Brükken als Pulvermagazinen dienen.

Es ist in Rücksicht auf das Gleichgewicht der Bogen sehr bekannt, daß, wenn das Material der Structur durch seine Schwerkraft senkrecht niederwärts drückt, für einen parabolischen Bogen als Begrenzung der concaven Fläche des Gewölbes die Gesetze des Gleichgewichts eine gleiche und ähnliche Curve als Grenze der convexen Seite erfordern, die überall denselben Abstand von der inneren Curve hat; in diesem Falle können die Curven leicht dargestellt und die Fugen der Wölbsteine gefunden werden (nach den Methoden Seite 162, 163.) Aber eben so wahr ist es, daß nach denselben allgemeinen Gesetzen des Gleichgewichts auch eine Kettenlinie als Bogen und zwei dergleichen ähnliche und gleichabstehende Curven angenommen werden können, vorausgesetzt, daß der gleiche Abstand in jedem Puncte auf dem Krümmungshalbmesser gemessen wird und in Vergleich mit der Größe des Bogens nur klein ist. Constructionen, die sich auf die Kenntniß dieses Factums gründen, sind lange verworfen worden, wurden aber vor kurzem wieder eingeführt; in dieser Rücksicht ist Tafel 4 beigefügt worden, damit die Praktiker ihre Zeit nicht mit nutzlosen Berechnungen verschwenden möchten.

Es stelle die Figur Seite 161 eine Kettenlinie dar, in der, wie es die Tafel angiebt, AP einen Theil der Curven, AG und GP die entsprechende Abscisse und Ordinate, GK die Subnormale bezeichnet; p sey der Parameter oder die unveränderliche horizontale Spannung am Scheitel der Curve. Dann ist bekanntlich

$$AP = \sqrt{AG^2 + 2p\,AG.}$$

und $$\frac{1}{p} = \frac{2AG}{GP^2} - \frac{2AG^3}{3GP^4} + \frac{26AG^5}{45GP^6} - \frac{662AG^7}{945GP^8} + \text{u.s.w.}$$

Nun giebt die Tafel Werthe für AG, GP, GK, die verschiednen Werthen des Bogens AP unter der Voraussetzung entsprechen, daß p, der Parameter oder die Spannung am Scheitel, 25 ist.

Als ein Beispiel von dem Gebrauche der Tafel verlange man ein Gewölbe zu construiren, dessen halbe Basis 8 (Yard zum Beispiel) und dessen Höhe 10 sey; man findet sein Modell, wenn man die Abscisse AG aufsucht, die sich zu ihrer Ordinate GP wie 10 zu 8 verhält; dies ist dann der Fall, wenn der Bogen 80 ist; dann ist die Abscisse 58,81, die Or-

dinate 46,99, die für praktische Zwecke nahe genug, in dem Verhältnisse von 10,01 : 8 stehen. Denkt man sich nun den Bogen in 80 gleiche Theile getheilt, so wird die Tafel die berechneten Verhältnisse von 80 Wölbsteinen auf jeder Seite des Scheitels, oder vielmehr von 79 Wölbsteinen und dem halben Schlußsteine darstellen. Auch können sie auf 40, 20 oder 10 auf jeder Seite des Scheitels reducirt werden. Für die Dimensionen 10 und 8 findet man die wirklichen Werthe, wenn man jede Zahl in der Tafel mit $\frac{8}{46,99}$ oder mit 0,1702 multiplicirt; oder um die Dimensionen in Fußen zu haben, muß der Factor $3 \times 0,1702 = 0,5106$ seyn. Auf diese Art kann man die Werthe von AG, GP, AP für jeden Wölbstein vom Scheitel der Curve an niederwärts finden, während die entsprechenden Werthe von AG + GK die Puncte K geben, von denen die Linie KP gezogen werden muß, um in jedem Falle die Richtung der Fuge zu geben. In dem angenommenen Falle würde der Werth des Parameters p seyn $25 \times 0,1792 = 4,255$, und dies wäre das Maß des horizontalen Drucks.

Die so bestimmte Curve wird in der Mitte des Bogens, zwischen der concaven und convexen Oberfläche des Gewölbes liegen. Darüber und darunter zeichne man in dem Abstande $\frac{1}{2}$t (der halben Dicke am Scheitel) in den respectiven Richtungen der Fugen gemessen, zwei Curven, die der mittleren Kettenlinie parallel sind; so wird man den verlangten Bogen des Gleichgewichts erhalten.

In Fällen, wo das verlangte Verhältniß der Höhe und der halben Länge des Bogens nicht mit hinlänglicher Genauigkeit aus den Tafeln gefunden werden kann, gebraucht man die gewöhnlichen Approximations-Methoden, deren man sich in Beziehung auf Proportional-Theile bedient. Soll z. B. die halbe Weite des Bogens gleich der Höhe seyn, so liegen bei dieser Bedingung die Bogen zwischen 60 und 61; und durch die erwähnte Methode findet man, daß, wenn der Bogen gleich 60,44 ist, die Höhe sowohl als die Basis 40,40 der horizontale Druck 25 seyn werden.

Sollte ein ins Gleichgewicht gesetzter Bogen von derselben Weite, Höhe und Dicke am Scheitel errichtet werden, so würde der horizontale Druck 31,6 seyn. Daher scheint es, im Vorbeigehen gesagt, daß ein nach diesen Verhältnissen äquilibrirter Kettenbogen einen geringeren horizontalen Druck als ein Kreisbogen erzeugt; gerade das Gegentheil von Bossüt's *) Meinung.

*) Équilibre des voûtes.

Druckfehler und Verbesserungen.

Seite	Zeile		statt	lies
v	13	v. u.	unentbehrlich	entbehrlich
12	9	—	121175	120675
16	1	—	oder ein	oder ihr Unterschied ist ein
31	14	v. o.	Dividend	Dividend, ohne Berücksichtigung der niedrigsten Ziffer,
52	4	—	$-6bc$	$+6bc$
55	4	—	Glied Quotienten	Glied des Quotienten
—	19	—	$x-z)x^3$	$x-z)x^3$
57	11. 12	—	$+z^3$	$\pm z^3$
65	2	—	$\frac{m}{n\,n}$	$a^{\frac{m}{n\,n}}$
66	5	—	95^4	$9s^4$
67	8	—	$\sqrt{\frac{ax-ax^2}{a-x}}$	$\sqrt{\frac{a^2x-ax^2}{a-x}}$
68	1	v. u.	Joung	Young
—	7	—	rein	reine
78	7	—	$(x^2+px+p)^2$	$(x^2+pq+q)^2$
80	4	v. o.	$(a\pm\sqrt{c+a^2})^{\frac{n}{2}}$	$(a\pm\sqrt{c+a^2})^{\frac{z}{n}}$
83	2	v. u.	0,255	0,225
86	7	v. o.	2×20	20×20
88	1	—	wird n	und n
91	11	—	hyperbelische	hyperbolische

Seite	Zeile		statt	lies
95	9	v. o.	wir	wie.
104	7	—	a e b	a c b
105	5	v. u.	Pheripherie	Peripherie
125	10 u. 15	—	verwandeln	reduciren
131	16	—	der drei	von drei
—	13	—	jedes	eines
132	10	—	1741	1743
136	7	—	jeder	jede
137	4	—	Teleskop	Teleſkop
142	6	—	F F	E F
146	3	—	Francouer's	Francoeur's
147	4	v. o.	indem	in dem
—	15	v. u.	Linie	Leine
153	7	—	$\varphi \sqrt{t^2 - c^2}$	$\varphi, \sqrt{t^2 - c^2}$
154	7	—	F K	T K
159	15	—	beſchreiben	beſchrieben
160	6	—	Leitlinie	Leitlinie oder Directrix
164	10	v. o.	dieſe	die
165	13	—	dem Lineale	das Lineal
169	19	—	die durch	wodurch
175	5	—	vermittels Schnellwagen ꝛc.	vermittels federnder Zieh-waagen
178	4	—	Fügung	Structur
181	8	—	und	um
206	22	—	Anknüpfepuncte	Angriffspuncte
208	1	—	erſteres	erſtere
213	8	—	gebräuchlichſte	Nützlichſte
216	17	—	die durch	durch
—	19	—	angebracht ſind,	angebracht
218	18	v. u.	Rollen	Räder
221	21	—	den	einen
—	15	—	deſſen	deren
—	14	—	ſeinen	ihren
231	6	—	dies	dieſe Verbindung
233	15	—	Winkel	Winkelpunct
234	4	—	er aushält	er zu tragen hat

Seite	Zeile		statt	lies
235			stellen die 4 einzelnen Figuren von oben nach unten die Stangen der Basis, die Diagonal-, Hängestangen und Verbindungsbolzen dar.	
236	9	v. o.	da	indem
238	9	v. u.	$\frac{2s}{t}$ gft	$\frac{2s}{t} = gft$
—	7	—	g =	f =
243	6	v. o.	untereinander gleichen	gleichen
244	10	—	auf	mit
—	4	—	Neigung	Neigung braucht
—	1	—	abhängig	abhängig, gegeben
246	2	—	des Stoßes	des Stoßes
247	10	—	wird,	wird und
251	2	—	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$
253	20	v. o.	nur flach)	mit der Fläche (flatwise)
—	3	v. u.	3 × Sehne	4 × Sehne
255	11	v. o.	$\frac{1}{2}$ - - 36,469	$\frac{1}{8}$ - - 36469
258	11	—	seidner	seidne
262	13	v. u.	0,6892	0,9892
264	1	v. u.	der Sinus	die Sinus
267	1	—	ICQ = ICP	IcQ = IcP
269	5	—	$\sqrt{\ldots}$ PW	$\sqrt{\ldots}$ — PW
276	9	v. o.	gerechnet,	gerechnet, gewunden wurde
277	5	—	überall	jederzeit
278	1	v. u.	Drehungen	Schwingungen, Wendungen (turus)
280	18	—	frei . . erneut	frei, und ein Zahn des Steigrades erneut, in dem ꝛc.
288	5	—	. . . über DC	in der Röhre über DC
290	7	—	$\frac{8}{11}$ b d²	$\frac{3}{11}$ b d²
293	13	v. o.	$8\frac{1}{3}$	$8\frac{1}{5}$
295	11	—	192 = $7\frac{1}{2}$	192 × $7\frac{1}{4}$
302	15	—	1,382	0,1382
—	16	—	1,1762	1,762
307	11	v. u.	auch nicht	auch
309	4	—	Dr. Robison	Dr. Blat

Seite	Zeile		statt	lies
315	19	v. u.	Dagegen	Umgekehrt
316	6 u. 7	—	Q =	Q für
317	1	v. o.	$66 + 5{,}6$	$66 \times 5{,}6$
330	17	v. u.	v	V
336	14	v. o.	295	495
—	1	v. u.	Plaufair's	Playfair's
338	11	—	h	h′
339	17	v. o.	$a^2 h'$	$a^2 h$
—	8	v. u.	die elaſtiſche	der elaſtiſchen
345	15	—	+ ME	× ME
348	Figur oben ſtatt c			e
349	7	v. u.	$\frac{v^2 s^3}{440}$ 0,00...	$\frac{v^2 s^3}{440} = 0{,}00...$
350	16	—	$x^{2.2}$	$x^{2,2}$
355	5	—	gewöhnliche	nutzbare
356	2	v. o.	desgl.	desgl.
358	9	v. u.	des	eines
361	3	v. o.	plug-frame	ein plug-frame
367	21	—	geſehen	geſehen wird.

Tab. I.

Fig. 2.

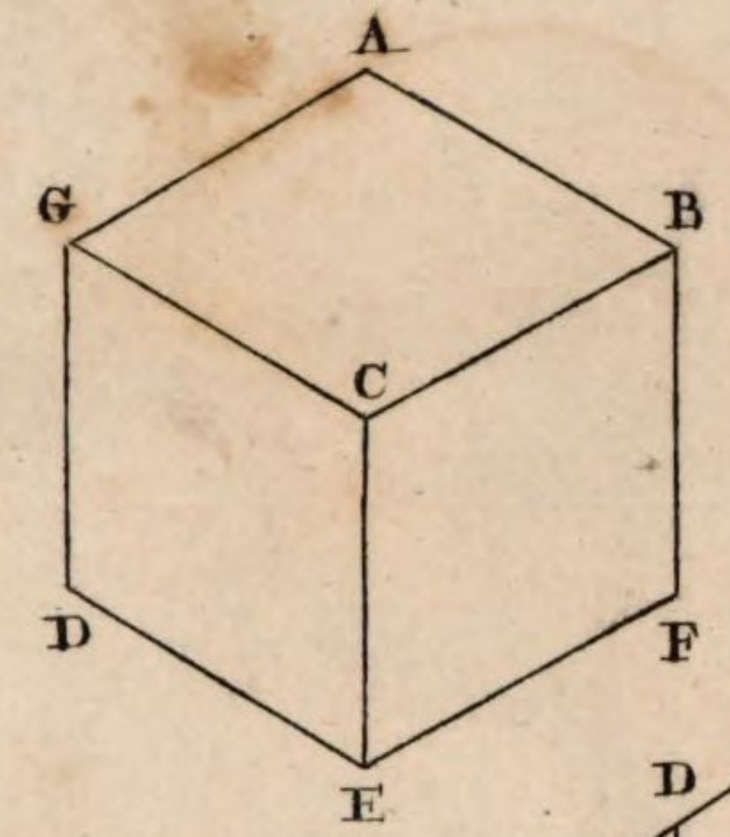


Fig. 4.

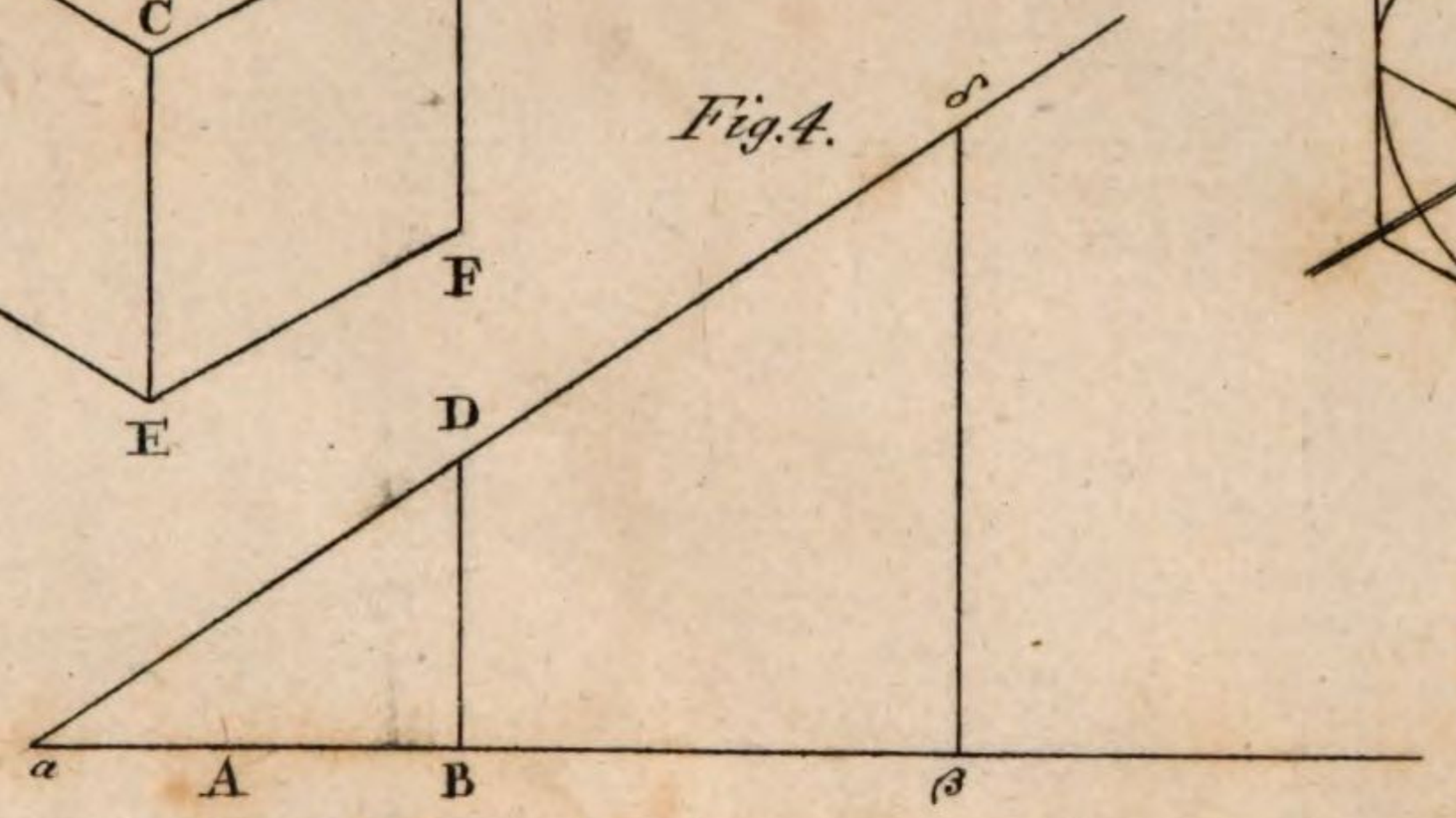


Fig. 3.

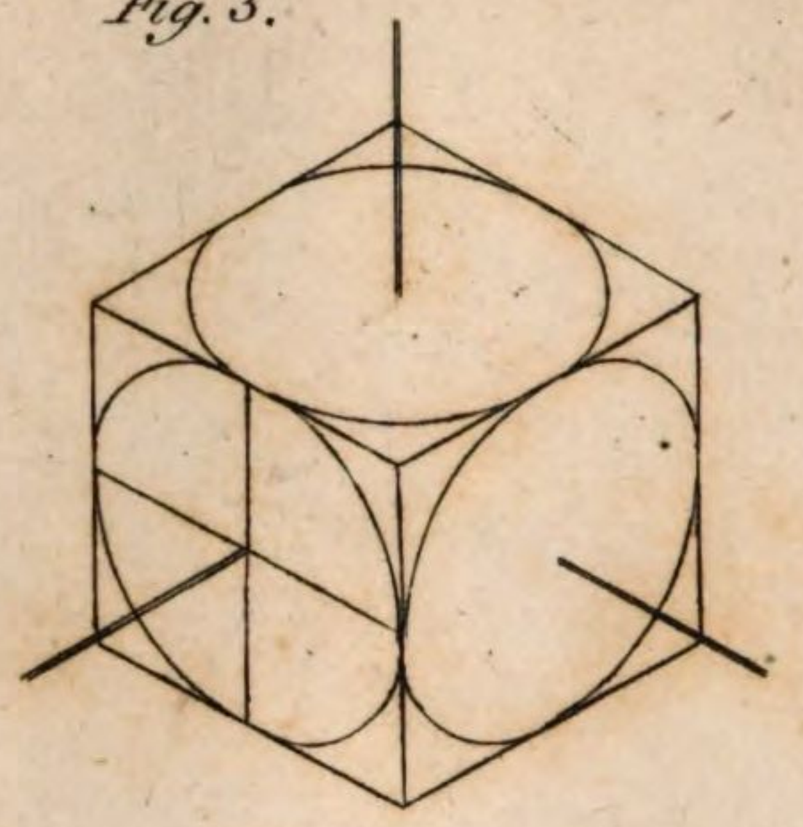


Fig. 7.

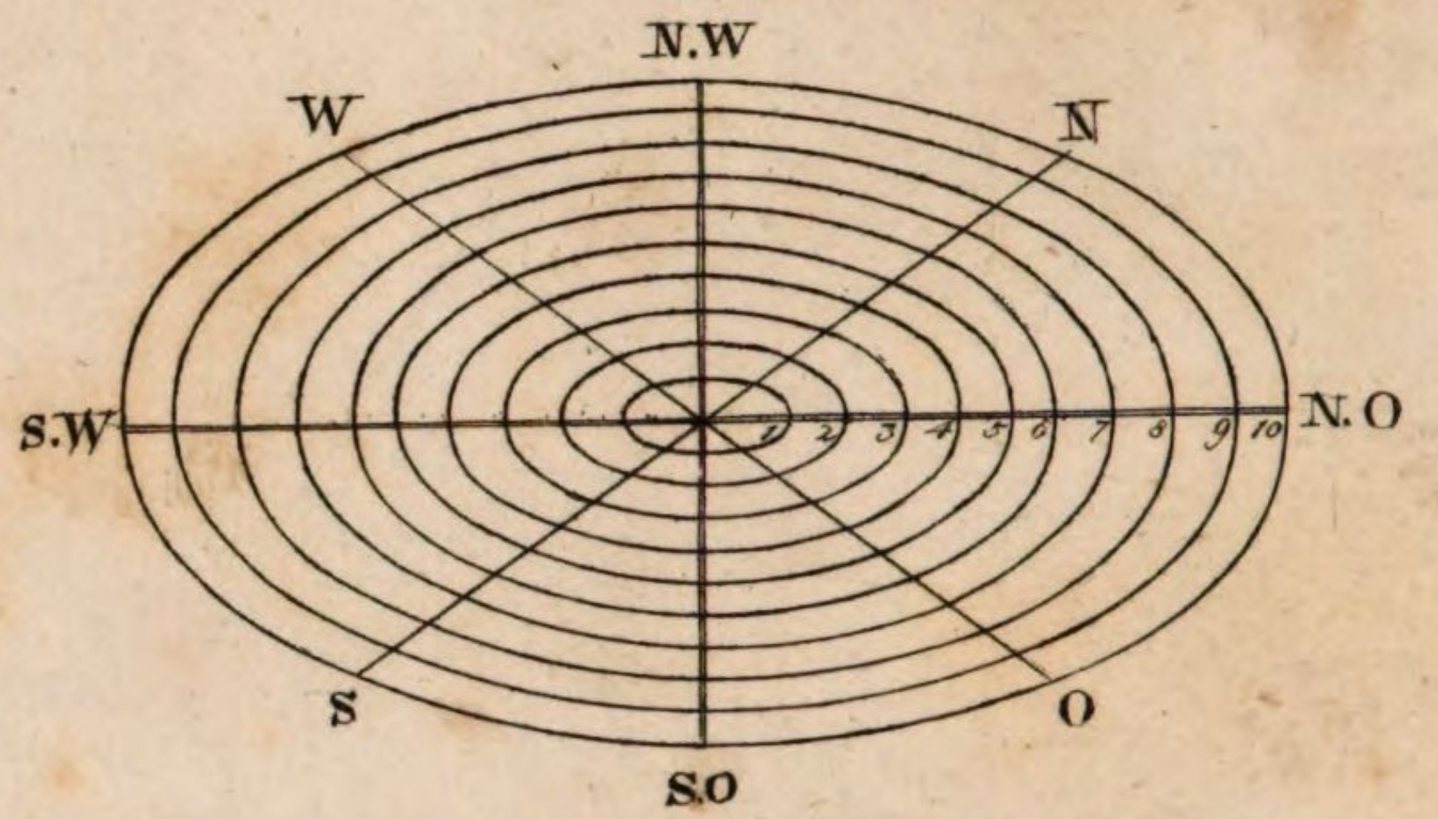


Fig. 1.

Fig. 5.

Fig. 8.

Tab. II.

...rspfwagen.

Fig. 4.

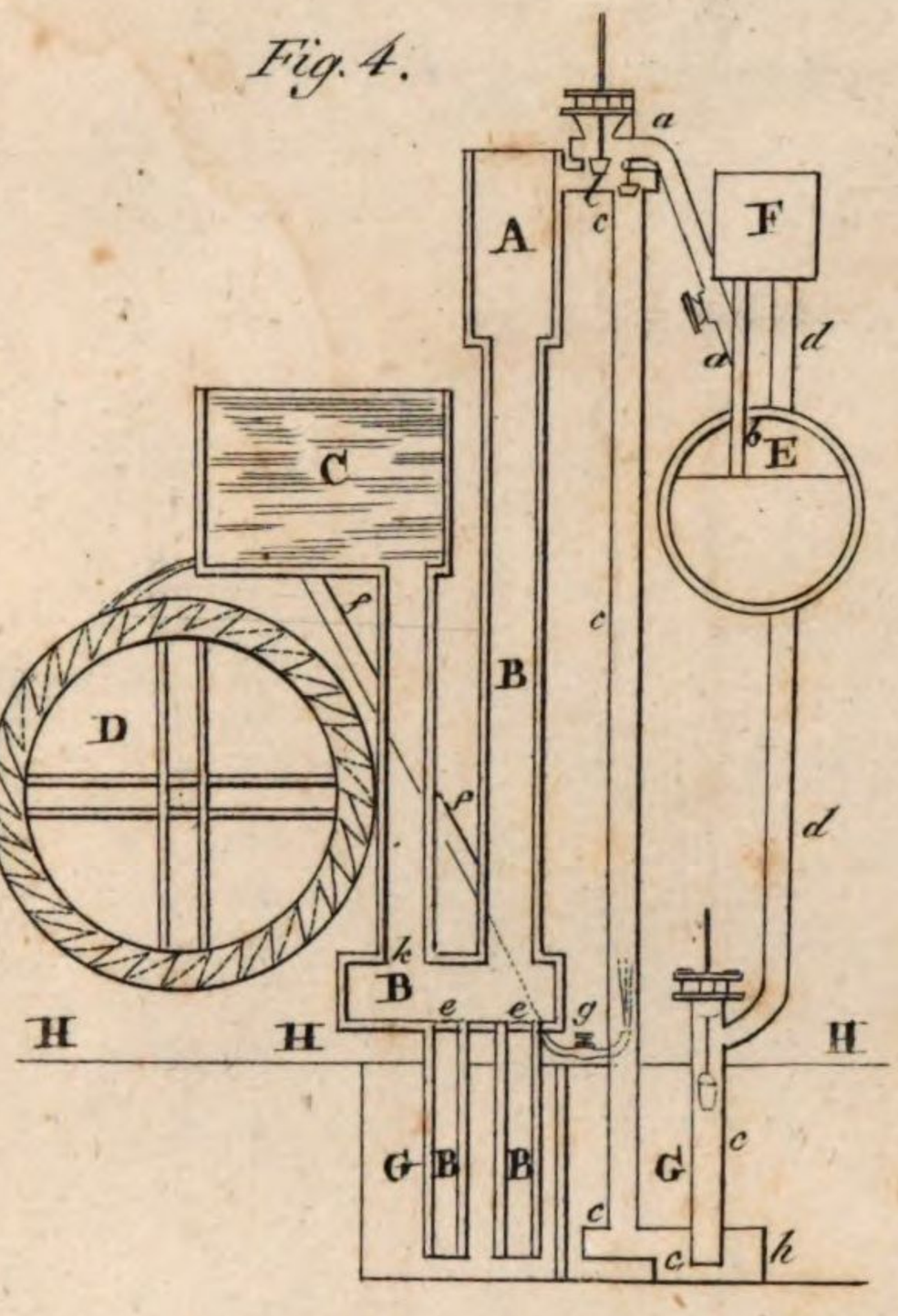
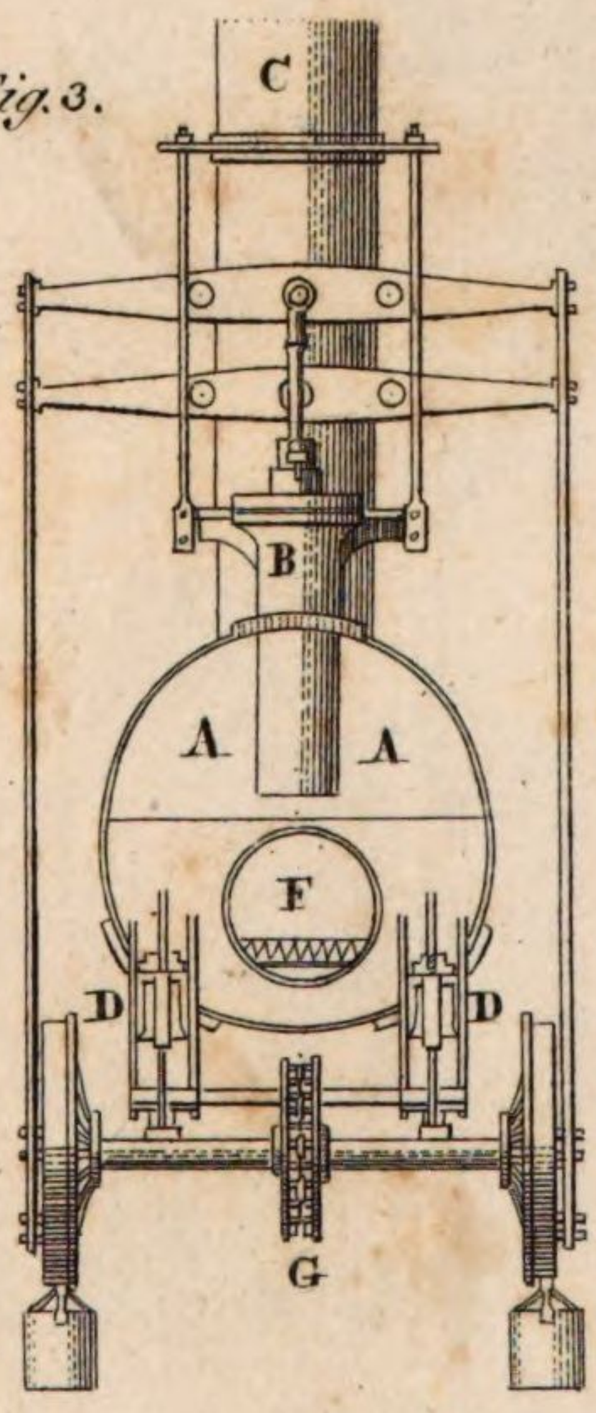


Fig. 3.



8 Pferdekraft

Kugelschalen mit Deckel beschwert.

Kugelschalen mit Deckel beschwert. Wird

$$\pi \sqrt{\frac{A^2+a^2}{2}} =$$

Fünfhundertsechs und [illegible] Pfund.

Zweihundertsechs und [illegible] Pfund beschenkt Wird

$$\pi \sqrt{\frac{A^2 + a^2}{2}} =$$

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Gregory, Olinthus,

Mathematik für Praktiker oder Sammlung von Grund- und Lehrsätzen, Regeln und Tafeln aus den verschiedenen Theilen der reinen und angewandten Mathematik

Leipzig 1828

Math.u. 62 x
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10593856-1